

BAC

سلسلة هباج

مطابق للبرنامج الجديد

الرياضيات

دروس و تمارين محلولة بالتفصيل

➔ حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي

➔ حلول مفصلة لتمرين نموذجية

➔ حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي

kimou.

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

3^e Année Secondaire : Mathématiques

الجزء

2

سلسلة هباج

الرياضيات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نماذج للبكالوريا

الجزء الثاني

ثانوي



السنة

تقني رياضي - رياضيات - علوم تجريبية

0773 26 52 81

TEL : 0773 26 52 81

الإشتقاقية

العدد المشتق و الدالة المشتقة :

تعريف : f دالة معرفة على مجال I جزئي من $\mathbb{R}$. يشمل العدان a و $a+h$ حيث $h \in \mathbb{R}$

نقول أن f قابلة للاشتقاق عند a إذا و فقط إذا كانت للنسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ عندما يؤول h إلى 0 نهاية محدودة .

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بـ $f'(a)$

ملاحظة (1) يمكن كتابة النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ من الشكل $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ بوضع $x=a+h$ فإن $h=x-a$

$$\text{إذن : } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ملاحظة (2) : إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من المجال I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و دالتها

المشتقة الأولى . f' معرفة بـ : $f' : x \mapsto f'(x)$

مثال : $f(x) = x^2 + 1$

ليكن a عدد حقيقي كفي . هل f قابلة للاشتقاق عند a ؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2+1)-(a^2+1)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2+1-a^2-1}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-a^2}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x+a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} a+a \\ &= 2a \end{aligned}$$

بما أن $2a \in \mathbb{R}$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند a و $f'(a) = 2a$

نتيجة : الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة $f' : a \mapsto 2a$ و خاصة $f' : x \mapsto 2x$

إذن : $f'(x) = 2x$

التفسير الهندسي للعدد المشتق

f دالة معرفة على مجال I . (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x_0 حيث $x_0 \in I$ فإن المنحنى (C) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماسا (T) معامل

توجيهه $f'(x_0)$ و معادلته $y = f'(x_0)[x - x_0] + f(x_0)$

المشتقات من الدرجة n ($n \in \mathbb{N}^*$)

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة الأولى . إذا قبلت الدالة f' بدورها الاشتقاق على المجال I فإن

دالتها المشتقة الأولى تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بـ f''

إذن بهذه الطريقة يمكن تعريف دوال مشتقة من الدرجة 3 ؛ 4 ؛ 5 و نرمز لها بـ f''' ؛ $f^{(4)}$ و علامة $f^{(n)}$

مثال : $f(x) = x^4$ إذن : $f'(x) = 4x^3$

و $f''(x) = 12x^2$

و $f'''(x) = 24x$

و $f^{(4)}(x) = 24$

نشاط (1)

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة f' معرفة بـ $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

نعرف الدالة h على IR بـ $h(x) = f(2x - 1)$

أحسب $h'(x)$ دون تعيين $h(x)$

الحل :

لنعرف الدالة u كمايلي : $u: x \mapsto 2x - 1$ منه $u': x \mapsto 2$

$$h(x) = f(2x - 1) = f(u(x)) = f \circ u(x)$$

إذن :

$$h'(x) = u'(x) \times (f'(u(x)))$$

منه :

$$= 2 \times f'(2x - 1)$$

$$= 2 \times \frac{1}{(2x - 1)^2 + (2x - 1) + 1}$$

$$= \frac{2}{4x^2 - 4x + 1 + 2x - 1 + 1}$$

$$= \frac{2}{4x^2 - 2x + 1}$$

إتجاه تغير دالة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

إذا كان $f'(x) > 0$ من أجل كل x من المجال I فإن الدالة f متزايدة تماما على I

إذا كان $f'(x) < 0$ من أجل كل x من المجال I فإن الدالة f متناقصة تماما على I

إذا كان $f'(x) = 0$ من أجل كل x من المجال I فإن الدالة f ثابتة على I

القيم الحدية المحلية لدالة على مجال

f دالة معرفة على مجال I يشمل العدد x_0

إذا كان من أجل كل x من المجال I : $f(x) \leq f(x_0)$ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية عظمى محلية على المجال I للدالة f

إذا كان من أجل كل x من المجال I : $f(x) \geq f(x_0)$ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية صغرى محلية على المجال I للدالة f

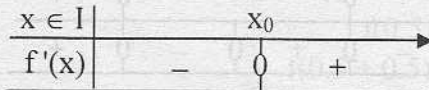
مبرهنة :

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال I يشمل العدد x_0

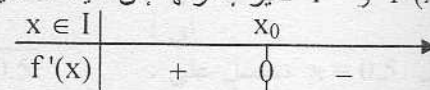
إذا كان $f'(x_0) = 0$ و f' تغير إشارتها حول x_0 فإن $f(x_0)$ هي قيمة حدية محلية للدالة f على المجال I

تفسير :

$f'(x_0) = 0$ و f' تغير إشارتها إذن لدينا الحالتين التاليتين :

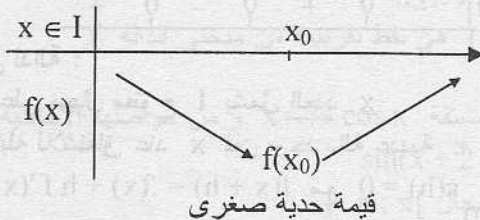


f' تغير إشارتها من - إلى +

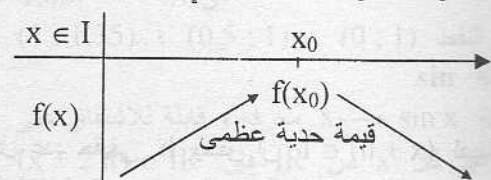


f' تغير إشارتها من + إلى -

إذن : جدول التغيرات يكون كالتالي :



أو



مشتقات بعض الدوال المركبة

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

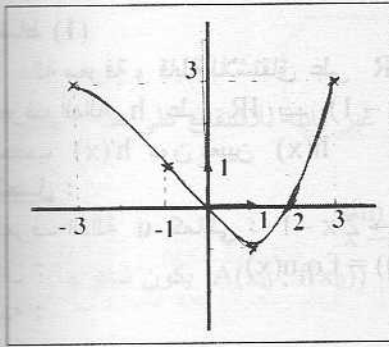
مشتقة الدالة $\sqrt{u(x)}$ هي $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} u'(x)$ حيث $u(x) > 0$

مشتقة الدالة $[u(x)]^n$ هي $x \mapsto n \times u'(x) \times [u(x)]^{n-1}$ عدد طبيعي أكبر من 1

مشتقة الدالة $\sin(u(x))$ هي $x \mapsto u'(x) \times \cos(u(x))$

مشتقة الدالة $\cos(u(x))$ هي $x \mapsto -u'(x) \times \sin(u(x))$

نشاط :

إليك التمثيل البياني لدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[-1; 3]$ 1 - أرسم جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-1; 3]$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[-1; 3]$ 2 - لنعتبر دالة عددية f على المجال $[-1; 3]$ معرفة بـ $f(x) = [g(x)]^2$
أحسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثم إستنتج إشارة $f'(x)$

الحل :

1 - جدول تغيرات الدالة g على $[-1; 3]$ من منحنى الدالة g نلاحظ أن : g متناقصة على المجال $[-1; 1]$ و متزايدةعلى المجال $[1; 3]$ و $g(-1) = 1$ ؛ $g(1) = -1$ ؛ $g(3) = 3$ ؛ $g(0) = 0$ و $g(2) = 0$
منه : جدول التغيرات التالي :

x	-1	0	1	2	3
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	1		-1		3

x	-1	1	3
$g'(x)$	-	0	+

نتيجة : جدول إشارة $g'(x)$:

x	-1	0	2	3
$g(x)$	+	0	-	+

جدول إشارة $g(x)$:2 - لدينا : $f(x) = [g(x)]^2$ إذن : $f'(x) = 2 \times g'(x) \times g(x)$ إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g'(x) \times g(x)$ كمايلي :

x	-1	0	1	2	3
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	+	0	-	0	+
$g'(x) \times g(x)$	-	0	+	0	+

خلاصة : جدول إشارة $f'(x)$ على المجال $[-1; 3]$:

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	-	0	+	0	+

التقريب التآلفي لدالة :

 f دالة معرفة على مجال مفتوح I يشمل العدد x إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x فإن يوجد دالة عددية ε حيث من أجل كل عدد حقيقي h يحقق أن $(x+h) \in I$ لدينا :

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + h \varepsilon(h) \quad \text{مع} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{أي من أجل} \quad h \text{ قريب من الصفر فإن} :$$

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) \quad \text{لأن} \quad h \times \varepsilon(h) = 0$$

في هذه الحالة العدد $f(x) + h f'(x)$ يسمى التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h يقترب من 0 مرفق بالدالة f ملاحظة : إذا وضعنا $\Delta_x = (x+h) - x$ و $\Delta_y = f(x+h) - f(x)$ فإن المساواة $f(x+h) = f(x) + h f'(x) + h \varepsilon(h)$

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + h \varepsilon(h) \quad \text{تصبح}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_y = f(x+h) - f(x) \\ \Delta_x = (x+h) - x = h \end{array} \right\} \quad \text{أي :} \quad \Delta_y = f'(x) \Delta_x + \varepsilon(\Delta_x) \cdot \Delta_x \quad \text{لأن} \quad \Delta_y = f'(x) \Delta_x + \varepsilon(\Delta_x) \cdot \Delta_x$$

إذن : $\Delta_y = f'(x) \Delta_x$ لما Δ_x يقترب من 0نضع إصطلاحا الصياغة التفاضلية التالية : $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ أي $dy = f'(x) dx$

2002

أذن تصفة عامة الرمز $\frac{d f}{d x}$ يستعمل بدلا من $f'(x)$ مثلا : $\frac{d^2 f}{d x^2}$ بدلا من $f''(x)$ و $\frac{d^n f}{d x^n}$ بدلا من $f^{(n)}(x)$

طريقة أولر لتقريب دالة

الهدف من طريقة أولر هو البحث عن صور أعداد حقيقية متتابة حيث يكون الفرق بينها عدد حقيقي h يؤول إلى 0 و ذلك بتطبيق التقريب التآلفي لدالة f كمايلي :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتول I يشمل العدد x_0 و h عدد حقيقي يؤول إلى 0

نضع : $x_1 = x_0 + h$ ؛ $x_2 = x_1 + h$ ؛ $x_3 = x_2 + h$ ؛ ؛ $x_n = x_{n-1} + h$

حيث كل الأعداد x_1 ؛ x_2 ؛ x_3 ؛ ؛ x_n تنتمي إلى المجال I

أذن : بتطبيق التقريب التآلفي للدالة f على المجال I نحصل على :

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0)$$

$$f(x_2) = f(x_1 + h) = f(x_1) + h f'(x_1)$$

$$f(x_3) = f(x_2 + h) = f(x_2) + h f'(x_2)$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) = f(x_{n-1} + h) = f(x_{n-1}) + h f'(x_{n-1})$$

بهذه الطريقة يمكن تعيين النقط $A_0(x_0 ; f(x_0))$ ؛ $A_1(x_1 ; f(x_1))$ ؛ $A_2(x_2 ; f(x_2))$ ؛ ؛ $A_n(x_n ; f(x_n))$ و عند

الربط بين هذه النقط نحصل على تمثيل بياني تقريبي لمنحنى الدالة f على المجال I كلما اقترب h من 0

ملاحظة : العدد h يسمى الخطوة

نشاط :

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f'(x) = \sqrt{x} \end{array} \right\} \text{ دالة تحقق } f$$

باستعمال طريقة أولر من أجل الخطوة $h = 0,5$ أحسب $f(0,5)$ ؛ $f(1)$ ؛ $f(1,5)$

الحل :

$$f(x + h) = f(x) + h f'(x)$$

التقريب التآلفي للدالة f هو من الشكل :

$$f(x + 0,5) = f(x) + h f'(x)$$

و من أجل $h = 0,5$ نحصل على :

بما أن $f'(x) = \sqrt{x}$ نعتبر المجال $[0 ; 2]$

$$f(0 + 0,5) = f(0) + 0,5 \sqrt{0}$$

من أجل $x = 0$ نحصل على :

$$f(0,5) = 1 + 0 = 1$$

أي :

$$f(0,5 + 0,5) = f(0,5) + 0,5 \sqrt{0,5}$$

من أجل $x = 0,5$ نحصل على :

$$f(1) = 1 + 0,5 \sqrt{0,5} \approx 1,35$$

أي :

$$f(1 + 0,5) = f(1) + 0,5 \sqrt{1}$$

من أجل $x = 1$ نحصل :

$$f(1,5) = 1,35 + 0,5 = 1,85$$

أي :

أذن النقط $(0 ; 1)$ ؛ $(0,5 ; 1)$ ؛ $(1 ; 1,35)$ ؛ $(1,5 ; 1,85)$ هي نقط تقريبية من منحنى الدالة f

الدالة $\sin$

الدالة $x \mapsto \sin x$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة $\cos x$ و من خواصها الأساسية مايلي :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$ و $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

أذن : الدالة $\sin$ دورية و دورها 2π إذن يكفي دراستها على المجال $[-\pi ; \pi]$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $(-x) \in \mathbb{R}$ و $\sin(-x) = -\sin x$

إذن الدالة $\sin$ فردية أي منحنائها يقبل مبدأ المعلم كمرکز تناظر

جدول التغيرات على المجال $[-\pi ; \pi]$

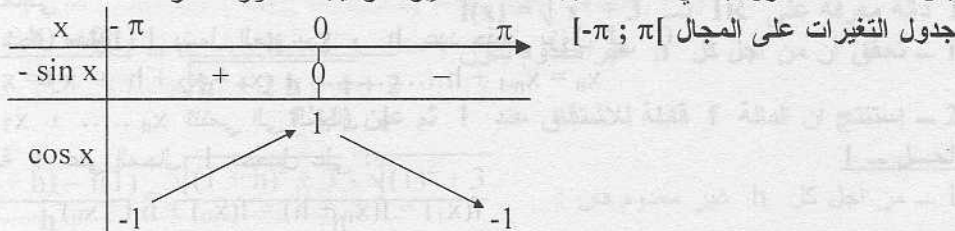
x	$-\pi$	$-\pi/2$	$\pi/2$	π
$\cos x$	$-$	0	$+$	$-$
$\sin x$	0	-1	1	0

الدالة $\cos$

الدالة $x \mapsto \cos x$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة $x \mapsto -\sin x$ و من خواصها الأساسية :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ و $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$ إذن الدالة $\cos$ دورية و دورها 2π إذن يكفي دراستها على المجال $[-\pi; \pi]$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $\cos(-x) = \cos x$ و $(-x) \in \mathbb{R}$ إذن الدالة $\cos$ زوجية أي منحناها يقبل حامل محور الترتيب كمحور تناظر

الدالة $\tan$

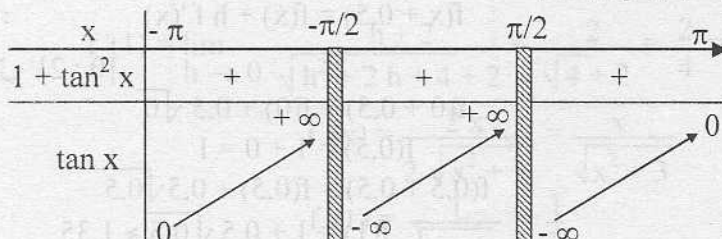
الدالة $x \mapsto \tan x$ معرفة من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + \pi k$ حيث k عدد صحيح لأن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ إذن معرفة من أجل $\cos x \neq 0$ و من خواصها الأساسية :

من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + \pi k$ فإن $\tan(x + \pi) = \tan x$ إذن الدالة $\tan$ دورية و دورها π إذن يكفي دراستها على المجال $[-\pi; 0]$

من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + \pi k$ فإن $\tan(-x) = -\tan x$ إذن الدالة $\tan$ فردية منه منحناها يقبل مبدأ المعلم كمركز تناظر

من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + \pi k$ فإن الدالة $\tan$ قابلة للاشتقاق عند x و دالتها المشتقة $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ إذن موجبة تماما .

جدول التغيرات على المجال $[-\pi; \pi]$



$$\tan(-\pi) = \frac{\sin(-\pi)}{\cos(-\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\tan(\pi) = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} \cos x = 0^- \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-\pi/2)}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-\pi/2)}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\pi/2)}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi/2)}{y} = -\infty$$

نشاط :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin^2 x$ و (C) منحناها في معلم متعامد $(0; \vec{i}; \vec{j})$

1 - بين أن الدالة f دورية و دورها π

2 - بين أن حامل محور الترتيب هو محور تناظر للمنحنى (C)

3 - أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; \pi/2]$ 4 - أرسم المنحنى (C) على $[0 ; \pi/2]$ ثم على المجال $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$

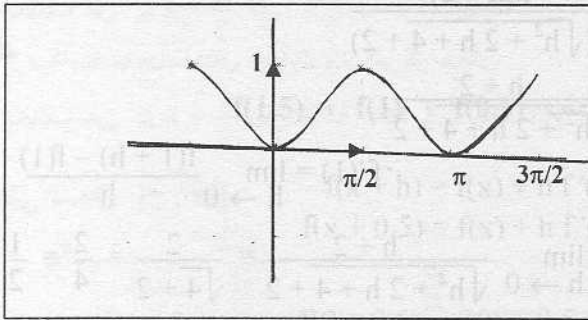
الحل :

1 - من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $(x + \pi) \in \mathbb{R}$ و $\sin^2(x + \pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$ إذن : $f(x + \pi) = f(x)$ منه f دورية و دورها π 2 - من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $(-x) \in \mathbb{R}$ و $\sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$ إذن : $f(-x) = f(x)$ منه f دالة زوجية إذن : محور الترتيب هو محور تناظر للمنحنى (C)3 - معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0 ; \pi/2]$ و دالتها المشتقة $f'(x) = 2 \cos x \sin x$ إذن : $f'(x) > 0$ من أجل $x \in]0 ; \pi/2[$ لأن $\cos x > 0$ و $\sin x > 0$

منه جدول التغيرات :

x	0		$\pi/2$
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	0		1

4 - طريقة الرسم :

✓ نرسم جزء المنحنى (C) على المجال $[0 ; \pi/2]$ ✓ بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب (دالة زوجية) نرسم المنحنى على $[-\pi/2 ; 0]$ ✓ بإجراء سحب المنحنى على المجال $[-\pi/2 ; \pi/2]$ بخطوة قدرها π (الدالة دورية و دورها π) نحصل على المنحنى(C) على المجال $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$ 

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 1

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

1 - تحقق أن من أجل كل h غير معدوم يكون : $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h+2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2}$

2 - استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 ثم عيّن $f'(1)$

الحل 1

1 - من أجل كل h غير معدوم فإن :

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{\sqrt{(1+h)^2 + 3} - \sqrt{1^2 + 3}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h^2 + 2h + 4} - 2}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h^2 + 2h + 4} - 2}{h} \times \frac{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2} \\ &= \frac{h^2 + 2h + 4 - 4}{h(\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2)} \\ &= \frac{h(h+2)}{h(\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2)} \\ &= \frac{h+2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2} \end{aligned}$$

2 - نعلم أن : $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+2}{\sqrt{h^2 + 2h + 4} + 2} = \frac{2}{\sqrt{4} + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

إذن :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

تحقيق :

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1 + 3}} = \frac{1}{2}$$

إذن :

التمرين 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = |x|$. أثبت أن f لا تقبل الاشتقاق عند 0

الحل 2

ليكن $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \end{aligned}$$

نميز حالتين كمايلي :

$$\lim_{h \rightarrow 0} |h| = h \quad \text{لأن} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

الأولى :

$$\lim_{h \rightarrow 0} |h| = -h \quad \text{لأن} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

الثانية :

نتيجة : النسبة $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ لا تقبل نهاية لما يؤول h إلى 0

إذن : الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0

التمرين 3 -

f دالة قابلة للاشتقاق عند (-1) حيث $f'(-1) = 2$

علما أن المنحنى الممثل للدالة f في معلم يمر بالنقطة $A(-1; -3)$ ، أكتب معادلة لمماس هذا المنحنى عند النقطة A

الحل 3 -

النقطة $A(-1; -3)$ تنتمي إلى منحنى الدالة f إذن : $f(-1) = -3$

نعلم أن معادلة مماس المنحنى عند نقطة ذات الفاصلة (-1) تكتب من الشكل :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$y = 2(x + 1) + (-3)$$

أي :

$$y = 2x - 1$$

أي :

$y = 2x - 1$ و هي معادلة المماس المطلوبة .

التمرين 4 -

(C) منحنى بياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق عند 0

المستقيم (T) ذو المعادلة $y = 2 - 3x$ هو مماس للمنحنى (C) عند النقطة $A(0; 2)$

1 - حدد $f(0)$ ؛ $f'(0)$

2 - فسر هندسيا النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$ ثم برر وجودها و عين قيمتها

الحل 4 -

1 - النقطة $A(0; 2)$ تنتمي إلى المنحنى (C) إذن : $f(0) = 2$

مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 له المعادلة $y = 2 - 3x$ أي ميله هو -3 منه $f'(0) = -3$

2 - النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$ تمثل ميل مماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0 لأنها تكتب من الشكل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad (\text{حيث } f(0) = 2)$$

إذن : هذه النهاية موجودة لأن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 و قيمتها $f'(0) = -3$

التمرين 5 -

إليك التمثيل البياني لدالة f والمستقيمتين (T_1) و (T_2) مماسات له

1 - حدد القيم التالية : $f(0)$ ؛ $f'(0)$ ؛ $f(1)$ ؛ $f'(1)$

2 - أكتب معادلة لكل من المستقيمين (T_1) و (T_2)

الحل 5 -

1 - من منحنى الدالة f نلاحظ أن النقط $A(0; 2)$ و $B(1; 2)$

تنتمي إلى المنحنى (C) للدالة f إذن : $f(0) = 2$ و $f(1) = 2$

نلاحظ أيضا أن مماس المنحنى عند النقطة $B(1; 2)$ يوازي محور

الافاصل إذن ميله معدوم أي $f'(1) = 0$

نلاحظ أيضا أن مماس المنحنى عند النقطة $A(0; 2)$ مائل بزاوية 0

حيث $\tan 0 = \frac{-1}{-2} = -2$

منه ميل المماس هو $f'(0) = -2$

نتيجة : $f'(0) = -2$ و $f'(1) = 0$

2 - (T_1) مماس لمنحنى الدالة f عند $A(0; 2)$ إذن معادلته :

$$y = -2x + 2 \quad \text{أي } y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

(T_2) مماس لمنحنى الدالة f عند $B(1; 2)$ إذن معادلته $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ أي $y = 2$ لأن $f'(1) = 0$

التمرين 6 -

(C) تمثيل بياني لدالة f يشمل النقطة $A(-2; 3)$

(T) مماس للمنحنى (C) عند النقطة A يوازي المستقيم ذو المعادلة $3x - 2y + 1 = 0$

أكتب معادلة المستقيم (T)

الحل 6 -

المماس (T) يوازي المستقيم ذو المعادلة $3x - 2y + 1 = 0$ إذن لهما نفس معامل التوجيه الذي يساوي $3/2$ - a/b من

أجل معادلة مستقيم من الشكل $ax + by + c = 0$ حيث $b \neq 0$

إذن : $f'(-2) = 3/2$

من جهة أخرى النقطة $A(-2; 3)$ تنتمي إلى المنحنى (C) إذن : $f(-2) = 3$

منه معادلة المماس (T) هي : $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

أي : $y = \frac{3}{2}(x+2) + 3$

أي : $y = \frac{3}{2}x + 6$

تحقيق : هل $A(-2; 3)$ تنتمي إلى (T) ؟

$$\frac{3}{2}(-2) + 6 = -3 + 6 = 3 \text{ محقق .}$$

التمرين 7

(C) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 + |x-1|$

1 - أثبت أن من أجل $h \neq 0$ فإن $\frac{f(1+h)-1}{h} = h+2 + \frac{|h|}{h}$

2 - هل العبارة $\frac{f(1+h)-1}{h}$ تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0 ؟

3 - أعط تفسيرا هندسيا للجواب عن السؤال (2) ثم أكتب معادلتى نصفي المماسين للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1

الحل 7

1 - من أجل $h \neq 0$ لدينا :

$$\frac{f(1+h)-1}{h} = \frac{(1+h)^2 + |1+h-1| - 1}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 2h + 1 + |h| - 1}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 2h + |h|}{h}$$

$$= \frac{h^2}{h} + \frac{2h}{h} + \frac{|h|}{h}$$

$$= h + 2 + \frac{|h|}{h}$$

2 - بما أن العبارة $\frac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0 لأن :

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

النهائيتين مختلفتين

إذن العبارة $h+2 + \frac{|h|}{h}$ لا تقبل أيضا نهاية لما يؤول h إلى 0 .

3 - التفسير الهندسي :

العبارة $h+2 + \frac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية لما يؤول h إلى 0 هذا يعني أن العبارة $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ لا تقبل نهاية لما يؤول h إلى 0

أي الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1

و لكن : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h+2 + \frac{|h|}{h} = 3$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \text{ لأن } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h+2 + \frac{|h|}{h} = 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1 \text{ لأن } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h+2 + \frac{|h|}{h} = 1$$

أي الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين 1 و عددها المشتق هو 3

و تقبل الاشتقاق على يسار 1 و عددها المشتق هو 1

إذن المنحنى (C) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1 أحدهما على اليمين و ميله 3 و الآخر على

اليسار و ميله 1 معادلتهما على الترتيب :

على اليمين : $y = 3(x-1) + f(1)$ أي $y = 3(x-1) + 1$ أي $2-y = 3x$

على اليسار : $y = 1(x-1) + f(1)$ أي $y = x - 1 + 1$ أي $y = x$ التمرين - 8

$f(x) = \sqrt{x+2}$ على $[-2; +\infty[$ بـ

1 - أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$

2 - هل الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين (-2) ؟ فسر هندسيا

الحل - 8

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2+h+2} - \sqrt{-2+2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

2 - بما أن : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = +\infty$ (حسب السؤال الأول) لأن $f(-2) = 0$

فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين -2

هندسيا : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يمين -2 - يوازي حامل محور الترتيب

التمرين - 9

I مجال جزئي من R يشمل العدد α . f دالة معرفة على I وقابلة للاشتقاق عند α حيث $f'(\alpha) = l$ مع $l \in R$

نعتبر الدالة g معرفة على المجال I بـ $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} & : x \neq \alpha \\ l & : x = \alpha \end{cases}$

1 - أثبت أن g مستمرة عند α

2 - من أجل $x \in I - \{\alpha\}$ أكتب $f(x)$ بدلالة x و $g(x)$

3 - أحسب $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ إذا تستنتج ؟

الحل - 9

1 - الدالة f قابلة للاشتقاق عند α و $f'(\alpha) = l$ إذن حسب التعريف فإن : $f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = l$

لكن $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = l$ إذن : $g(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

نتيجة : $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = l = g(\alpha)$ إذن : الدالة g مستمرة عند α

2 - من أجل $x \in I - \{\alpha\}$ لدينا : $g(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

أي : $(x - \alpha) g(x) = f(x) - f(\alpha)$

أي : $f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha) g(x)$

3 - حسب السؤال (2) فإن : $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(\alpha) + (x - \alpha) g(x)$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = l$ لأن $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(\alpha) + (x - \alpha) l = f(\alpha)$

$\lim_{x \rightarrow \alpha} (x - \alpha) l = 0$ لأن $f(\alpha) = f(\alpha)$

نتيجة : $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ إذن : f دالة مستمرة عند α

التمرين - 10

لتكن f دالة معرفة على R بـ $f(x) = 3x + |x^2 - 4|$

1 - تحقق أن f مستمرة عند -2

2 - برهن أن من أجل $h \in]-1/2; 0[\cup]0; 1/2[$ فإن $\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = 3 + \frac{|h|}{4-h}$

3 - هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند -2 ؟

الحل - 10

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} 3x + |x^2 - 4| = -6 \quad -1$$

$$f(-2) = 3(-2) + |(-2)^2 - 4| = -6$$

نتيجة : $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$ إذن f مستمرة عند -2

2 - ليكن $h \in]-1/2; 0[\cup]0; 1/2[$

$$\frac{f(-2+h) + 6}{h} = \frac{3(-2+h) + |(-2+h)^2 - 4| + 6}{h}$$

$$= \frac{-6 + 3h + |4 - 4h + h^2 - 4| + 6}{h}$$

$$= \frac{3h + |h^2 - 4h|}{h}$$

$$= \frac{3h + |h| \times |h - 4|}{h}$$

$$= 3 + \frac{|h|}{h} \times |h - 4|$$

بما أن $h \in]-1/2; 0[\cup]0; 1/2[$ فإن $h - 4 < 0$ أي $|h - 4| = 4 - h$

منه : $\frac{f(-2+h) + 6}{h} = 3 + \frac{|h|}{h} (4 - h)$ وهو المطلوب

$$3 - لدينا : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 6}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 3 + \frac{|h|}{h} (4 - h) \quad \text{بحسب السؤال (2)}$$

إذن : نميز حالتين :

$$\text{الأولى : } \lim_{h \rightarrow 0^-} 3 + \frac{|h|}{h} (4 - h) = 3 - 1(4 - 0) = -1 \quad \text{لأن } |h| = -h$$

$$\text{الثانية : } \lim_{h \rightarrow 0^+} 3 + \frac{|h|}{h} (4 - h) = 3 + 1(4 - 0) = 7 \quad \text{لأن } |h| = h$$

$$\text{نتيجة : } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

إذن : الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند -2

التمرين - 11

في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة التعريف للدالة ثم أحسب مشتقتها

$$h(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \sqrt{x} \quad -3 \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \quad -1$$

$$l(x) = \sqrt{x^2+4} \quad -4 \quad g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \quad -2$$

الحل - 11

1 - f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1-x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

2 - g معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1 \times \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{2x - (x+1)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

3 - h معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$h'(x) = \left(1 + \frac{0-1}{x^2}\right) \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x} \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)$$

4 - l معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$l'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

التمرين 12

عين في كل حالة من الحالات التالية مشتقة الدالة f على المجال D

D = $\mathbb{R}$ f(x) = x + x cos x - 1

D = $\mathbb{R}$ f(x) = cos x sin x - 2

D = $\mathbb{R}^*$ f(x) = $\frac{\sin x}{x}$ - 3

D = $]0; \pi[$ f(x) = $\frac{1}{\sin x}$ - 4

D = $[0; \pi/2[$ f(x) = $\frac{\cos x}{-1 + \sin x}$ - 5

D = $\mathbb{R}$ f(x) = $\cos\left(-3x + \frac{5}{\pi}\right)$ - 6

D = $\mathbb{R}$ f(x) = $3x \sin\left(-x + \frac{5}{\pi}\right)$ - 7

D = $\mathbb{R}$ f(x) = $(2x+4)^5$ - 8

D = $]4; +\infty[$ f(x) = $\sqrt{x-4}$ - 9

D = $]-\infty; 2[$ f(x) = $\sqrt{-2x+4}$ - 10

الحل 12

1 - f(x) = x + x cos x إذن :

f'(x) = 1 + 1 × cos x - x sin x

= 1 + cos x - x sin x

2 - f(x) = cos x sin x إذن :

f'(x) = -sin x × sin x + cos x × cos x

= cos² x - sin² x

= cos 2x

$$f'(x) = \frac{(\cos x) \times x - 1 \times \sin x}{x^2} \quad : \text{إذن } f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad - 3$$

$$= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{0(\sin x) - \cos x}{\sin^2 x} \quad : \text{إذن } f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad - 4$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x(-1 + \sin x) - (0 + \cos x) \cos x}{(-1 + \sin x)^2} \quad : \text{إذن } f(x) = \frac{\cos x}{-1 + \sin x} \quad - 5$$

$$= \frac{\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(-1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(-1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-1 + \sin x}{(-1 + \sin x)^2}$$

$$f'(x) = -3 \left(-\sin \left(-3x + \frac{5}{\pi} \right) \right) \quad : \text{إذن } f(x) = \cos \left(-3x + \frac{5}{\pi} \right) \quad - 6$$

$$= 3 \sin \left(-3x + \frac{5}{\pi} \right)$$

$$f'(x) = 3 \times \sin \left(-x + \frac{5}{\pi} \right) + 3x \times \left(-\cos \left(-x + \frac{5}{\pi} \right) \right) \quad : \text{إذن } f(x) = 3x \sin \left(-x + \frac{5}{\pi} \right) \quad - 7$$

$$= 3 \sin \left(-x + \frac{5}{\pi} \right) - 3x \cos \left(-x + \frac{5}{\pi} \right)$$

$$f'(x) = 2(2x+4)^4 \times 5 = 10(2x+4)^4 \quad : \text{إذن } f(x) = (2x+4)^5 \quad - 8$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} \quad : \text{إذن } f(x) = \sqrt{x-4} \quad - 9$$

$$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{-2x+4}} = \frac{-1}{\sqrt{-2x+4}} \quad : \text{إذن } f(x) = \sqrt{-2x+4} \quad - 10$$

التمرين 13

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \cos x$

1 - عين $f'(x)$ ؛ $f''(x)$ ؛ $f^{(3)}(x)$ ؛ $f^{(4)}(x)$ الدوال المشتقة المتتالية للدالة f

2 - استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n غير المعدوم عبارة $f^{(n)}(x)$

الحل 13

$$f'(x) = -\sin x \quad - 1$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f^{(3)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$$

2 - لاحظ أن من أجل $n = 5$ فإن $f^{(5)}(x) = f'(x)$ لأن $f^{(4)}(x) = f(x)$

$$\left. \begin{aligned} f^{(6)}(x) &= f''(x) \\ f^{(7)}(x) &= f^{(3)}(x) \\ f^{(8)}(x) &= f^{(4)}(x) = f(x) \end{aligned} \right\} \quad : \text{إذن}$$

و منه النتيجة التالية :

✓ إذا كان $n = 4k$ فإن $f^{(n)}(x) = \cos x$ مع $k \in \mathbb{N}^*$

✓ إذا كان $n = 4k + 1$ فإن $f^{(n)}(x) = -\sin x$ مع $k \in \mathbb{N}$

✓ إذا كان $n = 4k + 2$ فإن $f^{(n)}(x) = -\cos x$ مع $k \in \mathbb{N}$

✓ إذا كان $n = 4k + 3$ فإن $f^{(n)}(x) = \sin x$ مع $k \in \mathbb{N}$

التمرين 14 -

من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ نعرف الدالتين f و g كمايلي : $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
 نسمي $f^{(n)}$ و $g^{(n)}$ المشتقتان ذات الرتبة n للدالتين f و g على الترتيب حيث n عدد طبيعي غير معدوم .
 عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n يكون من أجله $f^{(n)} = g^{(n)}$

الحل - 14

لاحظ أن من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ فإن : $g(x) = f(x) + x^2$
 لنعرف الدالة h على $\mathbb{R}^*$ بـ $h(x) = x^2$
 إذن : من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $g(x) = f(x) + h(x)$
 منه : من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + h^{(n)}(x)$
 إذن : يكون $g^{(n)} = f^{(n)}$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $h^{(n)}(x) = 0$
 لدينا : $h'(x) = 2x$ و $h''(x) = 2$ و $h^{(3)}(x) = 0$
 إذن : أصغر عدد طبيعي n يحقق $g^{(n)} = f^{(n)}$ هو $n = 3$

التمرين 15 -

لنكن f و g دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin \theta x$ و $g(x) = \cos \theta x$ حيث θ عدد حقيقي غير معدوم

$$1 - \text{بين أن } f''(x) = -\theta^2 f(x)$$

$$2 - \text{بين أن } g''(x) = -\theta^2 g(x)$$

من أجل كل عددين حقيقيين a و b نضع $h(x) = a f(x) + b g(x)$

$$3 - \text{بين أن } h''(x) = -\theta^2 h(x)$$

الحل - 15

1 - $f(x) = \sin \theta x$ إذن : $f'(x) = \theta \cos \theta x$
 منه : $f''(x) = \theta(-\theta \sin \theta x)$
 أي : $f''(x) = -\theta^2 \sin \theta x$
 أي : $f''(x) = -\theta^2 f(x)$ و هو المطلوب
 $g(x) = \cos \theta x$ إذن : $g'(x) = -\theta \sin \theta x$
 منه : $g''(x) = -\theta(\theta \cos \theta x)$
 أي : $g''(x) = -\theta^2 \cos \theta x$ و هو المطلوب
 2 - $h(x) = a f(x) + b g(x)$ إذن : $h''(x) = a f''(x) + b g''(x)$
 أي : $h''(x) = a(-\theta^2 f(x)) + b(-\theta^2 g(x))$
 أي : $h''(x) = -\theta^2(a f(x) + b g(x))$
 أي : $h''(x) = -\theta^2 \cdot h(x)$ و هو المطلوب

التمرين 16 -

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

1 - تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$
 2 - استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x : $(1+x^2) f''(x) + x f'(x) - f(x) = 0$

الحل - 16

1 - من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$
 أي : $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
 أي : $f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}$
 أي : $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$
 منه : $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$ و هو المطلوب
 2 - لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \sqrt{1+x^2} \times f'(x)$

ليكن $g(\alpha) = 0$ إذن : لما $x \in]-\infty; \alpha[$ فإن $g(x) < 0$ لما $x = \alpha$ فإن $g(x) = 0$ لما $x \in]\alpha; +\infty[$ فإن $g(x) > 0$ منه جدول إشارة $f'(x)$ حيث $f'(x) = g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

التمرين 19**f** دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 1$ 1 - أدرس تغيرات الدالة **f**2 - هل **f** تقبل قيم حدية محلية ؟3 - هل **f** محدودة على $\mathbb{R}$ ؟**الحل 19**1 - التغيرات : **f** معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 6x^2 + 24x = 6x(x + 4)$$

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$	
$6x(x+4)$	+	0	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$-\infty$	65	1	$+\infty$	

$$f(-4) = 2(-64) + 12(16) + 1 = 65$$

2 - من جدول تغيرات الدالة **f** نستنتج أن :**f** تقبل قيمة حدية محلية عظمى عند -4 و قيمتها 65**f** تقبل قيمة حدية محلية صغرى عند 0 و قيمتها 13 - الدالة **f** ليست محدودة على $\mathbb{R}$ لأن إحدى نهايتها غير منتهية**التمرين 20****n** عدد طبيعي غير معدوم و **f** دالة عددية معرفة بـ $f(x) = x^n$ 1 - أدرس حسب قيم **n** تغيرات الدالة **f**2 - ناقش حسب قيم **n** و **a** عدد حلول المعادلة $x^n = a$ حيث **a** ثابت حقيقي**الحل 20**1 - **f** وحيد حد من الدرجة **n** إذن معرف و قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و مشتقة $f'(x) = nx^{n-1}$ إذن : f' من إشارة x^{n-1} لأن $n > 0$

نميز الحالتين التاليتين :

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} \quad -4$$

لاحظ أن $f'(x) > 0$ من أجل كل x من $R - \{-1\}$

إذن :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	متزايدة	متزايدة	متزايدة

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} \quad -5$$

$$= \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) \quad \text{لأن } x \in]0; +\infty[$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$ لأن $\frac{1}{x^2} > 0$

$$\text{لدينا : } -1 + \frac{1}{2}\sqrt{x} \geq 0 \quad \text{يكافئ} \quad \frac{1}{2}\sqrt{x} \geq 1$$

$$\text{يكافئ} \quad \frac{1}{4}x \geq 1 \quad \text{لأن الطرفين موجبين}$$

$$\text{يكافئ} \quad x \geq 4$$

منه جدول الإشارة التالي :

x	0	4	$+\infty$
$-1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$	-	0	+
f	متناقصة	f	متزايدة

التمرين - 18

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

1 - أحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$

2 - استنتج إشارة $f'(x)$ على IR

3 - أنجز جدول تغيرات الدالة f

الحل - 18

$$f'(x) = 4 \times \frac{1}{12}x^3 + 3 \times \frac{1}{6}x^2 + 2 \times \frac{1}{2}x + 1 \quad -1$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

$$f''(x) = 3 \times \frac{1}{3}x^2 + 2 \times \frac{1}{2}x + 1$$

$$= x^2 + x + 1$$

$$2 - \text{لندرس تغيرات الدالة } g : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \quad (g(x) = f'(x))$$

لدينا : g معرفة وقابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = x^2 + x + 1$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \quad \text{إذن : لا تتعدم و تأخذ إشارة موجبة .}$$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
g(x)	$-\infty$	0	$+\infty$

لدينا :

$$\begin{aligned}
 (f^{n+1})' &= [f(x) \times f^n(x)]' \\
 &= f'(x) \times f^n(x) + [f^n(x)]' \times f(x) \\
 &= f'(x) \times f^n(x) + [n f'(x) \times f^{n-1}(x)] \times f(x) \\
 &= f'(x) \times f^n(x) + n f'(x) \times f^n(x) \\
 &= f'(x) \times f^n(x) [1 + n] \\
 &= (n+1) f'(x) \times f^n(x)
 \end{aligned}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

خلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1 فإن $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$ حذار ! $f^n(x) = [f(x)]^n$ لكن $f^{(n)}$ هي المشتقة ذات الرتبة n للدالة f

2- ليكن $z \in \mathbb{Z} - \{-1; 0; 1\}$ إذا كان $z \in \mathbb{IN}$ فإن الخاصية محققة حسب السؤال الأولإذا كان $z \notin \mathbb{IN}$ نضع $z = -n$ حيث $n \in \mathbb{IN}$ من أجل $f(x) \neq 0$ فإن :

$$\begin{aligned}
 [f^z(x)]' &= [f^{-n}(x)]' \\
 &= \left[\frac{1}{f^n(x)} \right]' \\
 &= \frac{0 - n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{[f^n(x)]^2} \\
 &= \frac{-n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{f^{2n}(x)}
 \end{aligned}$$

$$= -n f'(x) \times f^{n-1-2n}(x)$$

$$= -n f'(x) \times f^{-n-1}$$

$$z = -n \quad \text{لأن} \quad z f'(x) \times f^{z-1}$$

إذن : الخاصية تبقى صحيحة من أجل $z \in \mathbb{Z} - \{-1; 0; 1\}$ **التمرين 23**

باستعمال حاسبة بيانية مثلنا المنحنيين اللذين معادلتيهما $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ و $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$ كما يلي :

1- ماذا تلاحظ بالنسبة للمنحنيين عند النقطة ذات الفاصلة 1 ؟

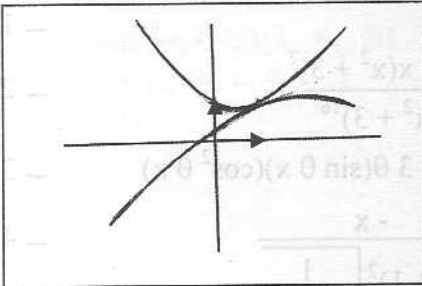
2- نعرف على $\mathbb{R}$ الدالتين f و g كما يلي :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

برهن أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ 3- أحسب $f(1)$ ؛ $f'(1)$ ؛ $g(1)$ ؛ $g'(1)$

4- تحقق من الملاحظة المصروحة في السؤال (1) ثم أكتب معادلة المماس

**الحل 23**

1- نلاحظ أن المنحنيين يتماسان في النقطة ذات الفاصلة 1 (لهما نفس المماس عند هذه النقطة)

2- بما أن الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ 1- $x^2 - x + 1 > 0$ فإن الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ 2- بما أن g دالة كثير حدود فإنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

3-

$$f(1) = \sqrt{1 - 1 + 1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$f'(1) = \frac{2 - 1}{2\sqrt{1 - 1 + 1}} = \frac{1}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$g(1) = -\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 1$$

الحالة (1) فردية إذن : (n-1) زوجي	الحالة (2) زوجية إذن : (n-1) فردية
$\begin{array}{c ccc} x & -\infty & 0 & +\infty \\ \hline x^{n-1} & + & 0 & + \\ \hline x^n & -\infty & 0 & +\infty \end{array}$	$\begin{array}{c ccc} x & -\infty & 0 & +\infty \\ \hline x^{n-1} & - & 0 & - \\ \hline x^n & +\infty & 0 & +\infty \end{array}$

2- لنكن المعادلة $x^n = a$ حيث $a \in \mathbb{R}$

نميز حالتين :

الحالة (1) فردية n :

من أجل كل $a \in \mathbb{R}$ فإن المعادلة $x^n = a$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$

الحالة (2) زوجية n :

من أجل $a < 0$ المعادلة $x^n = a$ لا تقبل أي حل في $\mathbb{R}$

من أجل $a = 0$ المعادلة $x^n = a$ تقبل حلا واحدا وهو 0

من أجل $a > 0$ المعادلة $x^n = a$ تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{R}$

التمرين 21

عين مشتقات الدوال التالية على $\mathbb{R}$:

1- $f(x) = (x^3 - x + 1)^5$

2- $g(x) = \frac{1}{(x^2 + 3)^8}$

3- $h(x) = \cos^3 \theta x$ حيث θ عدد حقيقي غير معدوم

4- $k(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}$

الحل 21

1- $f'(x) = 5(3x^2 - 1)(x^3 - x + 1)^4$

2- $g'(x) = \frac{0 - 8(2x)(x^2 + 3)^7 \times 1}{(x^2 + 3)^{16}} = -\frac{16x(x^2 + 3)^7}{(x^2 + 3)^{16}}$

3- $h'(x) = 3 \times (-\theta \sin \theta x) \times \cos^2 \theta x = -3\theta(\sin \theta x)(\cos^2 \theta x)$

4- $k'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}} = \frac{-x}{(x^2 + 1)^2 \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}}$

التمرين 22

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة الأولى

1- أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1 فإن $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$

2- برهن أنه يمكن تمديد هذه الخاصية إلى كل عدد صحيح غير معدوم Z

الحل 22

1- لنبرهن صحة هذه الخاصية بالتراجع على n كإبالي :

من أجل $n = 2$ لدينا : $(f^2(x))' = [f(x) \times f(x)]'$

حسب الخواص $= f'(x) \times f(x) + f(x) \times f'(x)$

$= 2 \times f'(x) \times f(x)$

$= 2 \times f'(x) \times f^{2-1}(x)$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

نفرض أن $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$ من أجل $n > 2$

هل $(f^{n+1}(x))' = (n+1) f'(x) \times f^n(x)$ ؟

لدينا :

$$\begin{aligned}
 (f^{n+1})' &= [f(x) \times f^n(x)]' \\
 &= f'(x) \times f^n(x) + [f^n(x)]' \times f(x) \\
 &= f'(x) \times f^n(x) + [n f'(x) \times f^{n-1}(x)] \times f(x) \\
 &= f'(x) \times f^n(x) + n f'(x) \times f^n(x) \\
 &= f'(x) \times f^n(x) [1+n] \\
 &= (n+1) f'(x) \times f^n(x)
 \end{aligned}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

خلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1 فإن $(f^n(x))' = n f'(x) \times f^{n-1}(x)$ هي المشتقة ذات الرتبة n للدالة f حذار ! $f^{(n)}(x) = [f(x)]^n$ لكن $f^{(n)}$ هي المشتقة ذات الرتبة n للدالة f ليكن $z \in \mathbb{Z} - \{-1; 0; 1\}$

إذا كان $z \in \mathbb{IN}$ فإن الخاصية محققة حسب السؤال الأولإذا كان $z \notin \mathbb{IN}$ نضع $z = -n$ حيث $n \in \mathbb{IN}$ من أجل $f(x) \neq 0$ فإن :

$$\begin{aligned}
 [f^z(x)]' &= [f^{-n}(x)]' \\
 &= \left[\frac{1}{f^n(x)} \right]' \\
 &= \frac{0 - n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{[f^n(x)]^2} \\
 &= \frac{-n f'(x) \times f^{n-1}(x)}{f^{2n}(x)} \\
 &= -n f'(x) \times f^{n-1-2n}(x) \\
 &= -n f'(x) \times f^{-n-1} \\
 &= -n f'(x) \times f^{z-1} \quad \text{لأن } z = -n
 \end{aligned}$$

إذن : الخاصية تبقى صحيحة من أجل $z \in \mathbb{Z} - \{-1; 0; 1\}$ **التمرين 23**

باستعمال حاسبة بيانية مثلثا المنحنيين اللذين معادلتيهما $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ و $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$ كما يلي :

1 - ماذا تلاحظ بالنسبة للمنحنيين عند النقطة ذات الفاصلة 1 ؟

2 - نعرف على $\mathbb{R}$ الدالتين f و g كما يلي :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{x^2 - x + 1} \\
 g(x) &= -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

برهن أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ 3 - أحسب $f(1)$ ؛ $f'(1)$ ؛ $g(1)$ ؛ $g'(1)$

4 - تحقق من الملاحظة المصروحة في السؤال (1) ثم أكتب معادلة المماس

الحل 23

1 - نلاحظ أن المنحنيين يتماسان في النقطة ذات الفاصلة 1 (لهما نفس المماس عند هذه النقطة)

2 - بما أن الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ 1 - $x^2 - x + 1 > 0$ فإن الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ 2 - بما أن g دالة كثير حدود فإنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

- 3

$$f(1) = \sqrt{1 - 1 + 1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$f'(1) = \frac{2-1}{2\sqrt{1-1+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$g(1) = -\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 1$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$g'(1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= g(1) = 1 \\ f'(1) &= g'(1) = 1/2 \end{aligned} \right\} \text{ بما أن 4}$$

فإن منحنىي الدالتين f و g لهما نفس المماس عند النقطة $A(1; 1)$ و معادلته :

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{أي} \quad y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$$

التمرين - 24

برر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل حالة من الحالات التالية :

$$1 - (1+x)^3 \approx 1+3x \quad -3 \quad \sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$$

$$2 - \frac{1}{1+x} \approx 1-x \quad -4 \quad \sin x \approx x$$

الحل - 24

$$1 - \text{لنكن } f \text{ دالة معرفة بـ } f(x) = (1+x)^3$$

إذن : f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 3(1+x)^2$$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة f هو :

$$x \mapsto f'(0)(x-0) + f(0)$$

أي :

$$x \mapsto 3x + 1$$

$$2 - \text{لنكن } g \text{ دالة معرفة بـ } g(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$g \text{ قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 0 و دالتها المشتقة : } g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$\text{منه : } g'(0) = -1$$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة g هو :

$$x \mapsto g'(0)(x-0) + g(0)$$

أي :

$$x \mapsto -x + 1$$

$$3 - \text{لنكن } h \text{ دالة معرفة بـ } h(x) = \sqrt{1+x}$$

$$h \text{ قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 0 و دالتها المشتقة : } h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\text{إذن : } h'(0) = \frac{1}{2}$$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة h هو :

$$x \mapsto h'(0)(x-0) + h(0)$$

أي :

$$x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$$

$$4 - \text{لنكن } \ell \text{ دالة معرفة بـ } \ell(x) = \sin x$$

$$\ell \text{ قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 0 و دالتها المشتقة : } \ell'(x) = \cos x$$

$$\text{إذن : } \ell'(0) = \cos(0) = 1$$

نتيجة : التقريب التآلفي المحلي عند 0 للدالة ℓ هو :

$$x \mapsto \ell'(0)(x-0) + \ell(0)$$

أي :

$$x \mapsto x$$

التمرين - 25

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = x^2$$

1 - عين التقريب التآلفي لعبارة $f(2+h)$ من أجل h قريب من 0

2 - أحسب بهذا التقريب قيمة مقربة لـ $(2,029)^2$

الحل - 25

$$1 - f \text{ قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل العدد 2 و دالتها المشتقة : } f'(x) = 2x$$

$$\text{إذن : } f'(2) = 2(2) = 4$$

منه : التقريب التآلفي المحلي عند 2 للدالة f هو :

$$x \mapsto 4(x-2) + f(2)$$

أي :

$$x \mapsto 4x - 8 + 4$$

أي :

$$x \mapsto 4x - 4$$

نتيجة : $f(x) \approx 4x - 4$

يقارب

إذن : $f(2+h) \approx 4(2+h) - 4$ من أجل h يقترب من 0أي : $f(2+h) \approx 4h + 4$ من أجل h يقترب من 02 - لاحظ أن : $(2,029)^2 = f(2+0,029)$ نضع $h = 0,029$ إذن h يقترب من 0منه $f(2+0,029) \approx 4h + 4$ أي $f(2+0,029) \approx 4(0,029) + 4$ أي $f(2,029) \approx 4,116$

التمرين 26

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس نعتبر (C) منحنى دالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فاصلة النقطة A وليكن (T) مماس للمنحنى (C) عند النقطة A. B و C نقطتان من (C) فاصلتهما على الترتيب $x_0 - h$ و $x_0 + h$ حيث $h > 0$ و h يقترب من 0 ،

D نقطة من المستوي حيث (AD) يعامد (CD) (انظر الشكل) .

1 - أعط قيمة مقربة لمساحة الشكل الهندسي BCD باعتباره مثلث قائم في D بدلالة $f'(x_0)$ و h .

2 - أحسب قيمة هذه المساحة من أجل $h = 0,03$ و معامل توجيه المستقيم (T) يساوي 9 .

الحل 26

1 - دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 إذن نقبل تقريب تالفي من أجل x يقترب من x_0 من الشكل :

$$x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

بما أن h يقترب من C فإن $(x_0 + h)$ و $(x_0 - h)$ يقتربان من x_0 و عليه فإن

حسب التقريب التالفي للدالة f في جوار x_0 لدينا :

$$(1) \dots\dots\dots f(x_0 + h) = f'(x_0)(x_0 + h - x_0) + f(x_0) = h f'(x_0) + f(x_0)$$

$$(2) \dots\dots\dots f(x_0 - h) = f'(x_0)(x_0 - h - x_0) + f(x_0) = -h f'(x_0) + f(x_0) \text{ و}$$

حسب الشكل فإن مساحة المثلث القائم BCD هي : $S = \frac{1}{2} BD \times DC$ حيث

[BD] هي القاعدة و [DC] هو الارتفاع

لدينا إحداثيات النقط B : $(x_0 - h ; f(x_0 - h))$; C : $(x_0 + h ; f(x_0 + h))$;D : كمايلي : $D(x_0 + h ; f(x_0 - h))$ لأن D على نفس الإستقامة مع B

$$DB = (x_0 + h) - (x_0 - h) = 2h \text{ منه :}$$

$$(2) \text{ و } DC = f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = [h f'(x_0) + f(x_0)] - [-h f'(x_0) + f(x_0)] = 2h f'(x_0)$$

$$\text{نتيجة : } S = \frac{1}{2} BD \times DC \text{ أي } S = \frac{1}{2} 2h \times 2h f'(x_0) \text{ أي } S = 2h^2 f'(x_0) \text{ و هو المطلوب}$$

أي : $S = 2h^2 f'(x_0)$ و هو المطلوب2 - معامل توجيه (T) هو 9 أي $f'(x_0) = 9$

$$S = 2(0,03)^2 \times 9 \text{ منه :}$$

$$S = 18(0,0009) \text{ أي :}$$

$$S = 0,0162 \text{ أي :}$$

مقدر بوحدة قياس المساحة .

التمرين 27

إليك المنحنى (C) الممثل لدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها

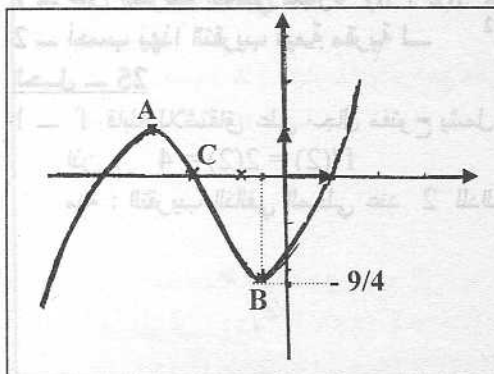
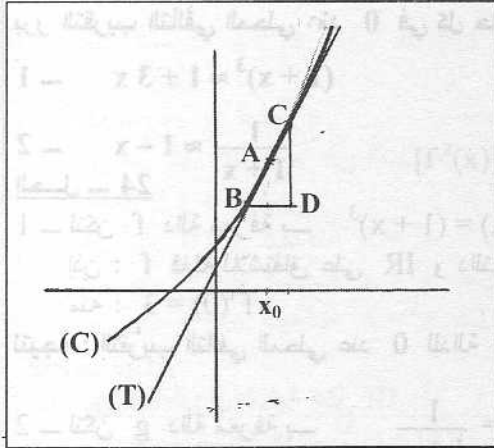
1 - عين العدد المشتق للدالة f عند كل من $-1/2$: -3 - علما أن

ترتيب النقطة B هو $-9/4$

2 - إستنتج معادلات المماسات للمنحنى (C) عند النقط A ; B

3 - هل توجد مماسات أخرى للمنحنى (C) موازية للمماس عند النقطة (A)

الحل 27



1 - حسب منحنى الدالة f فإن كل من النقط A و B هي ذروات محلية للمنحنى (C).

إذن : تراتيبها هي قيم حدية محلية للدالة f و عليه فالمشتقة تتعدم عند

$$f'(-1/2) = f'(-3) = 0$$

2 - معادلات المماسات عند A و B هما على الترتيب $y = 1$ و $y = -9/4$ لأنهما يوازيان حامل محور الفواصل .

3 - حسب المنحنى لا يوجد أي مماس آخر للمنحنى (C) يوازي المماس عند A أو B

التمرين - 28

هل الدوال التالية قابلة للاشتقاق عند 0 :

$$f(x) = x\sqrt{x} \quad -1$$

$$g(x) = x|x| \quad -2$$

$$h(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+x}}\right) \quad -3$$

الحل - 28

1 - f ليست معرفة على يسار 0 إذن لا تقبل الاشتقاق عند 0

فهل هي قابلة للاشتقاق على يمين 0 ؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

إذن : f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و عددها المشتق $f'(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad -2$$

إذن : g قابلة للاشتقاق عند 0 و $g'(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+x}}\right)}{x} \quad -3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+x}}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \pi$$

$$= 0$$

إذن : h قابلة للاشتقاق عند 0 و $h'(0) = 0$

التمرين - 29

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \begin{cases} 0 : x = 0 \\ x^2 \cos(1/x) : x \neq 0 \end{cases}$

1 - هل f قابلة للاشتقاق عند 0 (باستعمال التعريف)

2 - أحسب $f'(x)$ من أجل $x \neq 0$

الحل - 29

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x) - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \cos(1/x)$$

$$= 0 \quad \text{لأن } -1 \leq \cos(1/x) \leq 1$$

منه : f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = 0$

2 - من أجل $x \neq 0$: $f(x) = x^2 \cos(1/x)$

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left[-\frac{1}{x^2} \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \quad \text{إذن :}$$

$$= 2x \cos(1/x) + \sin(1/x)$$

التمرين - 30

(C) منحنى الدالة f المعرفة بـ $f(x) = |x^2 - 1|$ 1 - بين أن f قابلة للاشتقاق على يمين -1 - ثم عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة -1 على اليمين2 - بين أن f قابلة للاشتقاق على يسار -1 - ثم عين معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة -1 على اليسار3 - هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند -1 ؟4 - أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم المنحنى (C)

الحل - 30

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 - x^2}{x + 1}$$

لأن :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$
$ x^2 - 1 $	$x^2 - 1$	0	$1 - x^2$	0	$x^2 - 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 - x \\ &= 2 \end{aligned}$$

منه : f قابلة للاشتقاق على يمين -1 و عددها المشتق على اليمين هو 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} x - 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

منه : f قابلة للاشتقاق على يسار -1 و عددها المشتق على اليسار هو -2 3 - بما أن العدد المشتق على يمين -1 يختلف عن العدد المشتق على اليسار فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند -1 معادلات المماسات عند النقطة ذات الفاصلة -1 على اليمين : أي $y = 2(x + 1) + 0$ أي $y = 2x + 2$ على اليسار : أي $y = -2(x + 1) + 0$ أي $y = -2x - 2$ 4 - التغيرات : f معرفة على R

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 : x \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[\\ 1 - x^2 : x \in]-1 ; 1[\end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x : x \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[\\ -2x : x \in]-1 ; 1[\end{cases}$$

لاحظ أن f لا تقبل الاشتقاق عند كل من -1 و 1

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
2x	-				+
-2x			+	-	
f'(x)	-	+	0	-	+

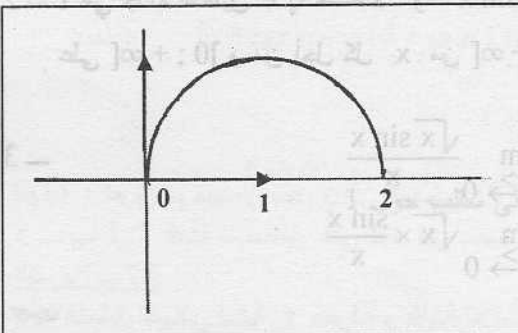
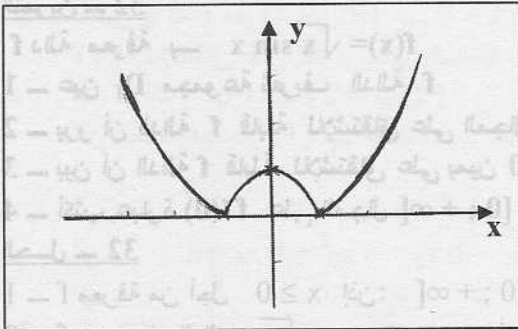
إشارة المشتقة :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'(x)	-	+	0	-	+
f(x)	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$

جدول التغيرات :

المنحنى :

حذار ! النقط ذات الإحداثيات $(-1; 0)$ و $(1; 0)$ ليست ذروات للمنحنى لأن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند -1 و 1



التمرين - 31

f دالة معرفة على المجال $[0; 2]$ و تمثيلها البياني (C) عبارة عن نصف دائرة كما هو مبين في الشكل التالي :

- 1 - برر أن f لا تقبل الاشتقاق عند 0 .
- 2 - برر أن تكون النقطة $M(x; y)$ تنتمي إلى (C) إذا وفقط إذا كان :
 $y \geq 0$ و $(x-1)^2 + y^2 = 1$
- 3 - أكتب عبارة f(x) من أجل $x \in [0; 2]$
- 4 - أوجد بالحساب النتيجة المحصل عليها في السؤال 1 .

الحل - 31

1 - من منحنى الدالة f نلاحظ أن المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 يوازي حامل محور الترتيب أي ميله غير منته منه
 الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0

2 - لاحظ أن المنحنى (C) جزء من الدائرة ذات المركز $(1; 0)$ و نصف القطر 1

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

بما أن الجزء واقع فوق محور الفواصل فإن $y \geq 0$ أي :

معادلة المنحنى (C) هي $(x-1)^2 + y^2 = 1$ و $y \geq 0$ و هو المطلوب .

3 - من السؤال (2) : $y \geq 0$ و $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$$y^2 = 1 - (x-1)^2$$

$$y^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1)$$

$$y^2 = 2x - x^2$$

$$y = \sqrt{2x - x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2}$$

منه : $x \in [0; 2]$ و $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ هي عبارة f(x)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2x - x^2} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{\frac{2}{x} - 1}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = +\infty \quad \text{لأن} \quad = +\infty$$

إذن f : غير قابلة للإشتقاق على يمين 0 و مماس المنحنى له ميل غير منته أي يوازي محور الترتيب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \quad \text{لأن}$$

التمرين 32

$f(x) = \sqrt{x} \sin x$ دالة معرفة بـ

1 - عين D_f مجموعة تعريف الدالة f

2 - برر أن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ على هذا المجال .

3 - بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين 0 ثم أحسب $f'_d(0)$ حيث $f'_d(0)$ هو العدد المشتق على يمين 0

4 - أكتب عبارة $f'(0)$ علم المجال $]0; +\infty[$

الحل 32

1 - f معرفة من أجل $x \geq 0$ إذن : $D_f = [0; +\infty[$

2 - f هي جداء الدالتين $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto \sin x$ القابلتين للإشتقاق على $]0; +\infty[$ إذن f قابلة للإشتقاق

$$\text{على }]0; +\infty[\text{ و من أجل كل } x \text{ من }]0; +\infty[\text{ فإن } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \times \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{لأن} \quad = 0$$

نتيجة : f قابلة للإشتقاق على يمين 0 و $f'_d(0) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 : x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cos x : x \in]0; +\infty[\end{cases} \quad \text{و هو المطلوب}$$

التمرين 33

a و b عدنان حقيقيان . f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

هل يوجد عدنان a و b حيث يكون لمماس منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0 معادلة من الشكل $y = 4x + 3$ ؟

الحل 33

f دالة ناطقة معرفة على $\mathbb{R}$ إذن قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و خاصة عند العدد 0 و عليه فإن منحناها يقبل مماس عند النقطة ذات

$$\text{الفاصلة 0 و معادلته } y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = f'(0)x + f(0) \quad \text{أي :}$$

بالمطابقة مع المعادلة $y = 4x + 3$ نحصل على الشروط التالية :

$$\begin{cases} f'(0) = 4 \dots\dots (1) \\ f(0) = 3 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{(6x + a)(x^2 + 1) - 2x(3x^2 + ax + b)}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{منه : } f'(0) = a/1 = a$$

إذن : الشرط (1) يصبح $a = 4$

من جهة أخرى : $f(0) = b/1 = b$

إذن : الشرط (2) يصبح $b = 3$

خلاصة : يوجد عددان حقيقيان و حيدان هما $a = 4$ و $b = 3$ يحققان أن معادلة مماس الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0

$$y = 4x + 3$$

التمرين - 34

a عدد حقيقي . نعتبر الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$

هل يوجد قيمة لـ a حيث تقبل الدالة f قيمة حدية عند $x = 1$ ؟

الحل - 34

f دالة كثير حدود إذن قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3 \quad \text{أي} \quad f'(x) = 3(ax^2 + 2x + 1)$$

تكون لـ f قيمة حدية محلية عند $x = 1$ إذا وقفنا إذا إنعدمت $f'(x)$ من أجل $x = 1$ مغيرة إشارتها

$$f'(1) = 0$$

$$a(1)^2 + 2(1) + 1 = 0$$

$$a = -3$$

$$f'(x) = 3(-3x^2 + 2x + 1)$$

لندرس الآن إشارة $f'(x)$ أي إشارة

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{-6} = \frac{2}{-6} = -1/3$$

$$x_2 = \frac{-2-4}{-6} = 1$$

x	$-\infty$	$-1/3$	1	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-

منه :

نتيجة : من أجل $a = -3$ فإن $f'(1) = 0$ و f' تغير إشارتها من موجب إلى سالب حول 1

إذن : f تقبل قيمة حدية محلية عند $x = 1$

التمرين - 35

ليكن (C) منحنى ذو المعادلة : $xy + 4x + 3y + 7 = 0$

برهن أن النقطة $A(-2; 1)$ تنتمي إلى (C) و أن (C) يقبل مماس عند A يطلب تعيين معادلته .

الحل - 35

لنعوض إحداثيات النقطة A في معادلة المنحنى (C) حيث : $x = -2$ و $y = 1$

$$xy + 4x + 3y + 7 = -2(1) + 4(-2) + 3(1) + 7$$

$$= -10 + 10$$

$$= 0 \quad \text{إذن : A تنتمي إلى (C)}$$

لنبحث عن عبارة y بدلالة x :

$$xy + 4x + 3y + 7 = 0 \Rightarrow xy + 3y = -7 - 4x$$

$$\Rightarrow y(x+3) = -7 - 4x$$

$$\Rightarrow y = \frac{-7-4x}{x+3} \quad \text{حيث} \quad x \neq -3$$

لنعتبر الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{-3\}$ بـ $f(x) = \frac{-7-4x}{x+3}$

إذن : المنحنى (C) ذو المعادلة $xy + 4x + 3y + 7 = 0$ هو منحنى الدالة f .

بما أن f دالة ناطقة فهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-3\}$ و خاصة عند -2 و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-4(x+3) - (-7-4x)}{(x+3)^2}$$

$$f'(-2) = \frac{-4(-2+3) - [-7-4(-2)]}{(-2+3)^2} = \frac{-4-1}{1} = -5$$

منه :

$$y = -5(x+2) + f(-2)$$

إذن : معادلة المماس عند النقطة A من الشكل :

$$y = -5(x+2) + 1$$

أي :

$$y = -5x - 9$$

أي :

التمرين - 36

a ; b ; c أعداد حقيقية حيث $a > 0$

(P) قطع مكافئ معادلته $y = ax^2 + bx + c$

ليكن x_0 عدد حقيقي و M_0 نقطة من (P) فاصلتها x_0
1 - عين معادلة المماس (T) للمنحنى (P) عند النقطة M_0 .

2 - برهن أن (P) يقع فوق كل مماساته .

3 - عين مجموعة النقط M ذات الإحداثيات (x ; y) حيث يوجد مماس للمنحنى (P) عند النقطة M.

الحل - 36

1 - لنعتبر الدالة f معرفة على IR بـ $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a > 0$

f قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة $f'(x) = 2ax + b$

$$f'(x_0) = 2ax_0 + b$$

منه :

إذن معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + (ax_0^2 + bx_0 + c)$$

أي :

$$y = (2ax_0 + b)x - 2ax_0^2 - bx_0 + ax_0^2 + bx_0 + c$$

أي :

$$y = (2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c$$

2 - ليكن (T) مماس لـ (P) عند نقطة كيفية ذات الفاصلة x_0 .

$$f(x) - [(2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c] = ax^2 + bx + c - [(2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c]$$

$$= ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2$$

$$= a(x^2 - 2x_0x + x_0^2)$$

$$= a(x - x_0)^2$$

موجب لأن $a > 0$

نتيجة : الفرق موجب أو معدوم إذن المنحنى (P) يقع دائما فوق المماس (T) من أجل أي قيمة لـ x_0 (أي فوق كل المماسات)

3 - بما أن f قابلة للإشتقاق على IR فإن مجموعة النقط M المطلوبة هي $M(x ; ax^2 + bx + c)$ أي كل نقط القطع (P)

التمرين - 37

إليك التمثيل البياني لدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال

$]0 ; 5]$. المستقيم المرسوم على الشكل هو مماس للمنحنى عند

النقطة ذات الفاصلة 1 .

1 - بقراءة بيانية عين كل من $f(1)$ و $f'(1)$

2 - حل بيانيا في المجال $]0 ; 5]$ المتراجحات التالية :

$$f(x) \geq 0 \quad (أ) \quad f'(x) \geq 0 \quad (ب) \quad f(x) \leq 1 \quad (ج)$$

الحل - 37

1 - من البيان نلاحظ ما يلي : $f(1) = 2$ (بالإسقاط على محور

الترتيب) . ميل المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو :

$$\tan \theta = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{3}{2}$$

$$f'(1) = 3/2$$

إذن :

2 - حسب المنحنى فإن :

$$f(x) \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0$$

$$f(x) \leq 1$$

التمرين - 38

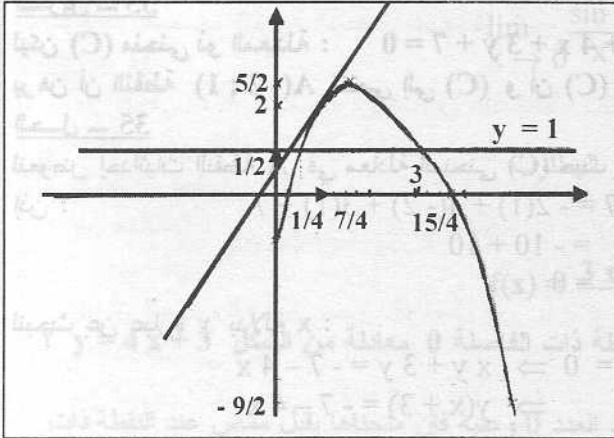
n عدد طبيعي غير معدوم ، x عدد حقيقي يختلف عن 1

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

1 - بسط المجموع

2 - إستنتج تبسيط للعبارة



الحل - 38

1 - لاحظ أن $f_n(x)$ عبارة عن مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها x

إذن : $f_n(x) = 1 \times \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ حيث $x \neq 1$

أي : $f_n(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

2 - العبارة $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ هي مشتقة $f_n(x)$ (لأن مشتقة مجموع هي مجموع المشتقات حسب الخواص) منه : $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = f_n'(x)$

أي : $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}$

$= \frac{(nx^n + x^n)(x-1) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$

$= \frac{nx^{n+1} - nx^n + x^{n+1} - x^n - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$

$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$ و هو المطلوب .

مثال : $n=3$ ؛ $x=2$

لدينا : $1 + 2x + 3x^2 = 1 + 2(2) + 3(2)^2 = 1 + 4 + 12 = 17$

و بتطبيق العبارة المبسطة : $1 + 2x + 3x^2 = \frac{3(2)^4 - 4(2)^3 + 1}{(2-1)^2} = \frac{48 - 32 + 1}{1} = 17$

التمرين - 39

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ نضع $f(x) = 1/x$ و $f^{(n)}$ المشتقة ذات الرتبة n حيث $n \in \mathbb{N}^*$ للدالة f برهن باستعمال الإستدلال بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$

الحل - 39

من أجل $n=1$: $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

و $\frac{(-1)^1 \times 1!}{x^{1+1}} = \frac{-1}{x^2}$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=1$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n > 1$

هل $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \times (n+1)!}{x^{n+1+1}}$

لدينا : $f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]'$

و حسب فرضية التراجع $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$

أي : $f^{(n+1)}(x) = \left[\frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}} \right]'$

$= (-1)^n \times n! \times \left(\frac{1}{x^{n+1}} \right)'$ لأن العدد $(-1)^n \times n!$ ثابت لا يتعلق بالمجهول x

$= (-1)^n \times n! \times \left(-\frac{(n+1)x^n}{x^{2n+2}} \right)$

$= (-1)^n \times n! \times \frac{(-1) \times (n+1) \times x^n}{x^n \times x^{n+2}}$

$$y = -5(x+2) + n-2 = \frac{(-1)^{n+1} \times n! (n+1)}{x^{n+1+1}}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$
 نتيجة : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1}}$
التمرين 40

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق مرتين وتحقق الشروط التالية :
 $f'(0) = 1$; $f(0) = 0$ ❖
 ❖ f' متزايدة على $[0; +\infty[$ و متناقصة على $]-\infty; 0]$

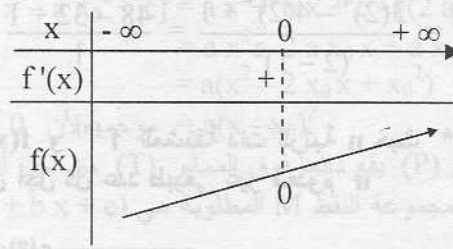
أرسم جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$
الحل 40

لدينا $f'(0) = 1$ و f' متزايدة على $[0; +\infty[$ إذن :
 من أجل $x > 0$ فإن $f'(x) > f'(0)$
 $f'(x) > 1$ أي :

و خاصة $f'(x) > 0$ أي الدالة f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$
 ولدينا $f'(0) = 1$ و f' متناقصة على $]-\infty; 0]$ إذن :

من أجل $x < 0$ فإن $f'(x) > f'(0)$
 $f'(x) > 1$ أي :
 و خاصة $f'(x) > 0$ أي الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :



التمرين 40
 f دالة معرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$
 1 - أدرس تغيرات الدالة f

2 - برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]1; 2[$
الحل 40
 1 - التغيرات :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} - \sqrt{1} = +\infty$$

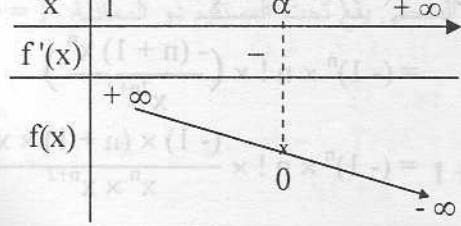
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \sqrt{x} = -\infty$$

f مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]1; +\infty[$
 إذن : f قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -1 \times \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

إذن : من أجل كل x من $]1; +\infty[$: $f'(x) < 0$
 منه : f متناقصة على المجال $]1; +\infty[$
 جدول التغيرات :



$$f(2) = \frac{1}{2-1} - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}$$

f مستمرة على $[1; 2]$

f متناقصة تماما على $[1; 2]$

f تأخذ قيم موجبة ثم سالبة على المجال $[1; 2]$

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1; 2]$ يحقق $f(\alpha) = 0$

ملاحظة : يمكن البحث عن قيمة تقريبية لـ α بالتصنيف .

التمرين - 41

إليك الشكل الموالي يمثل منحنى (C) لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $[-3; 3]$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المنحنى يحقق الشروط التالية :

✓ يمر بمبدأ المعلم

✓ يشمل النقطة $(-3; 9)$

✓ يقبل في النقطة B ذات الفاصلة 1 مماسا أفقيا .

✓ يقبل المستقيم (OA) كمماس عند النقطة O

1 - ماهو معامل توجيه المستقيم (OA)

نفرض أن f معرفة على $[-3; 3]$ بـ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

حيث a, b, c, d أعداد حقيقية .

2 - بين باستعمال الشروط السابقة أن $a = 1/3 ; b = 1 ; c = -3 ; d = 0$

3 - حل $f'(x)$ ثم أستنتج اتجاه تغير الدالة f .

الحل - 41

1 - معامل توجيه المستقيم (OA) هو ميل هذا المستقيم أي ظل الزاوية التي يصنعها

مع الأفق أي : $\tan \theta = -9/3 = -3$

2 - لتكن $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

إذن : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

المنحنى يمر بالمبدأ إذن : $f(0) = 0$ (1)

المنحنى يشمل النقطة $A(-3; 9)$ إذن : $f(-3) = 9$ (2)

ميل المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 هو -3 إذن : $f'(0) = -3$ (3)

الشرط (1) أي $f(0) = 0$ منه $a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 0$ $d = 0$

الشرط (2) أي $f(-3) = 9$ منه $a(-3)^3 + b(-3)^2 + c(-3) + 0 = 9$ $-27a + 9b - 3c = 9$

الشرط (3) أي $f'(0) = -3$ منه $3a(0)^2 + 2b(0) + c = -3$ $c = -3$

نتيجة : $d = 0 ; c = -3$

إذن : الشرط (2) يصبح $-27a + 9b + 9 = 9$ أي $9b = 27a$ أي $b = 3a$

من جهة أخرى المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 أفقي أي $f'(1) = 0$

أي : $3a(1)^2 + 2b(1) + c = 0$

أي : $3a + 6a - 3 = 0$ (لأن $b = 3a$ و $c = -3$)

أي : $9a = 3$

أي : $a = 1/3$ منه $b = 3(1/3) = 1$

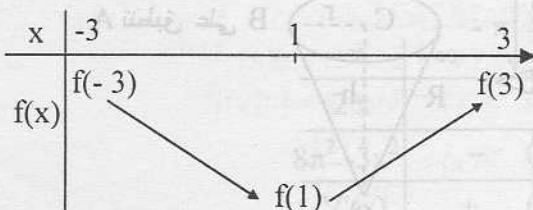
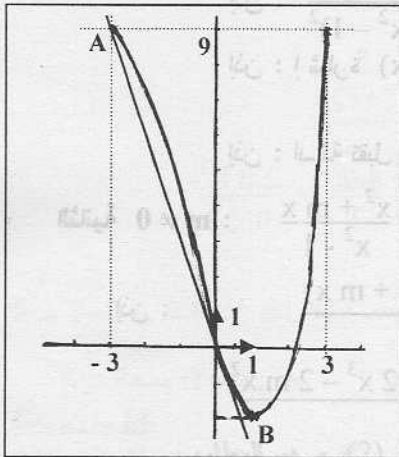
خلاصة : $a = 1/3 ; b = 1 ; c = -3 ; d = 0$ وهو المطلوب

3 - $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ أي $f'(x) = x^2 + 2x - 3$

$$= (x-1)(x+3)$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	$f'(x)$ إشارة
$f'(x)$	+	0	-	0	+

اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-3; 3]$:



التمرين - 42

f_m دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ $f_m(x) = \frac{x^2 + m x}{x^2 - 1}$ مع m وسيط حقيقي .

- 1 - من أجل أي قيم m تكون الدالة f_m لا تقبل قيم حدية محلية ؟
- 2 - من أجل أي قيم m تكون الدالة f_m تقبل قيمتين حديتين محليتين أحدهما صفري و الأخرى عظمى ؟

الحل - 42

1 - نميز حالتين :

الأولى $m = 0$: $f_0(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

إذن : $f'_0(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-2x$

x	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-

إذن : الدالة تقبل قيمة حدية محلية عند $x = 0$

الثانية $m \neq 0$: $f_m(x) = \frac{x^2 + m x}{x^2 - 1}$ مع $m \neq 0$

إذن : $f'_m(x) = \frac{(2x + m)(x^2 - 1) - 2x(x^2 + m x)}{(x^2 - 1)^2}$

$= \frac{2x^3 - 2x + m x^2 - m - 2x^3 - 2m x^2}{(x^2 - 1)^2}$

$= \frac{-m x^2 - 2x - m}{(x^2 - 1)^2}$

إذن : إشارة $f'_m(x)$ هي إشارة كثير الحدود $-m x^2 - 2x - m$ كمالى :

$\Delta = 4 - 4m^2 = 4(1 - m^2)$

نتيجة : تكون الدالة f لا تقبل قيمة حدية محلية إذا فقط إذا كانت مشتقتها لا تغير إشارتها أي $f'(x) \geq 0$ أو $f'(x) \leq 0$ على طول مجال تعريفها وفي هذه الحالة (إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية) يكون هذا محقق إذا فقط إذا كان $\Delta \leq 0$ كما يلي :

m	-1	0	1
$\Delta = 4(1 - m^2)$	-	+	-

إذن $m \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

خلاصة : f_m لا تقبل قيم حدية محلية من أجل $m \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

2 - نميز حالتين :

✓ $m = 0$ غير محقق حسب السؤال (1) .

✓ $m \neq 0$ حتى تكون الدالة تقبل قيمتين محليتين يجب أن يتحقق أن دالتها المشتقة تتعدم مرتين مغيرة إشارتها

بالتناوب أي موجب سالب موجب أو سالب موجب سالب . وفي هذه الحالة لدينا إشارة $f'(x)$ هي إشارة كثير حدود

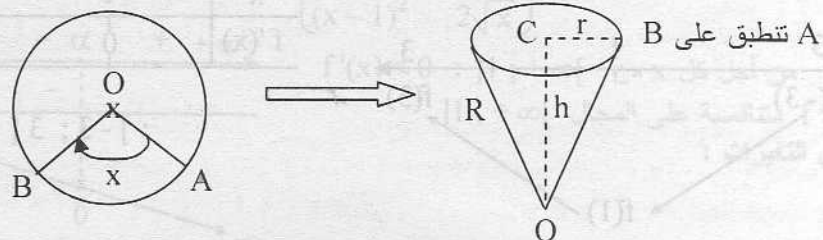
$-m x^2 - 2x - m$ حيث $m \neq 0$ إذن يكفي أن يكون $\Delta > 0$

أي $4(1 - m^2) > 0$

منه : $m \in]-1; 1[\cup]0; 1[$

التمرين - 43

نعتبر قرص مركزه O و نصف قطره R نقطع منه قطاعا زاويا $(\vec{OA}; \vec{OB})$ قياسه x راديان كما هو موضح على الشكل ثم نلصق القطعتين $[OA]$ و $[OB]$ فنحصل على مخروط دوراني نصف قطر قاعدته r و ارتفاعه h



- 1 - عبر عن r و h بدلالة x و R .
 2 - برهن أن حجم المخروط الدوراني الناتج معرف بالعلاقة $V(x) = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$
 3 - أدرس تغيرات الدالة V على المجال $]0; 2\pi[$
 4 - من أجل أي قيمة للعدد x يكون حجم المخروط الناتج أكبر ما يمكن ؟ أحسب هذا الحجم بدلالة R .

الحل - 43

1 - لدينا طول القوس $\overline{AB}$ هو xR

إذن : محيط قاعدة المخروط الدوراني الناتج هو $p = xR$

من جهة أخرى : $p = 2\pi r$ إذن : $2\pi r = xR$

منه : $r = \frac{xR}{2\pi}$ (1) و هو المطلوب .

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث OAC القائم في C حيث C هو مركز قاعدة المخروط الناتج نحصل على :

$$r^2 + h^2 = R^2$$

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{أي :}$$

$$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{xR}{2\pi}\right)^2} \quad \text{أي :}$$

$$h = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^2 - x^2 R^2}{4\pi^2}} \quad \text{أي :}$$

$$h = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2} \quad \text{أي :} \quad \text{..... (2) و هو المطلوب}$$

2 - حجم المخروط الدوراني الناتج هو : $V(x) = \frac{1}{3} S \cdot h$ حيث S هي مساحة قاعدة المخروط و h هو ارتفاعه .

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{xR}{2\pi}\right)^2 = \frac{R^2 x^2}{4\pi} \quad \text{لدينا :}$$

$$V(x) = \frac{1}{3} \times \frac{R^2 x^2}{4\pi} \times \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2} \quad \text{منه}$$

$$V(x) = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2} \quad \text{منه :}$$

3 - تغيرات الدالة V على $]0; 2\pi[$: $V(0) = 0$; $v(2\pi) = 0$

الدالة V قابلة للإشتقاق على $]0; 2\pi[$ و دالتها المشتقة :

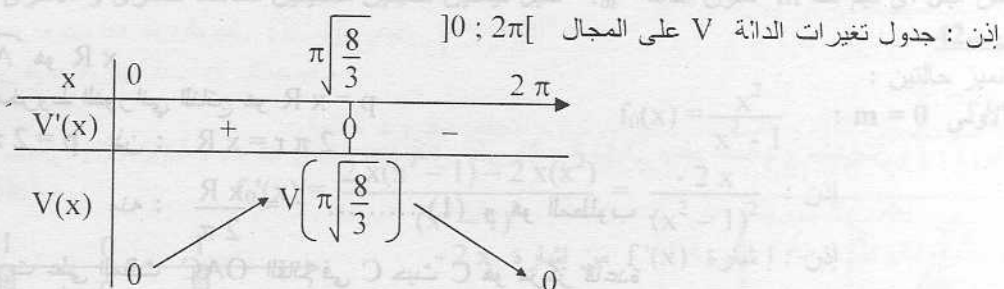
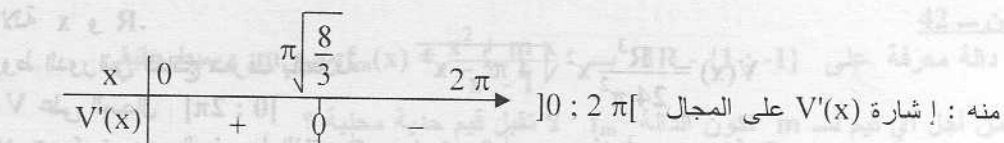
$$V'(x) = \frac{R^3}{24\pi^2} \left(2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} + x^2 \times \frac{-2x}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \right)$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2} \left(\frac{4x(4\pi^2 - x^2) - 2x^3}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \right)$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2} \left(\frac{16x\pi^2 - 6x^3}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \right)$$

إذن : إشارة $v'(x)$ هي إشارة $16x\pi^2 - 6x^3$ لأن $\frac{1}{24\pi^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$ موجب .
 $16x\pi^2 - 6x^3 = 2x(8\pi^2 - 3x^2)$

x	$-\infty$	$-\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$	0	$\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$	$2\pi + \infty$
$2x$		-	0	+	
$8\pi^2 - 3x^2$	-	0	+	0	-
$v'(x)$	+	0	-	0	+



$$V\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \frac{R^3}{24\pi^2} \times \left(\frac{8}{3}\pi^2\right) \sqrt{4\pi^2 - \frac{8}{3}\pi^2} = \frac{R^3}{9} \sqrt{\frac{4\pi^2}{3}} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$$

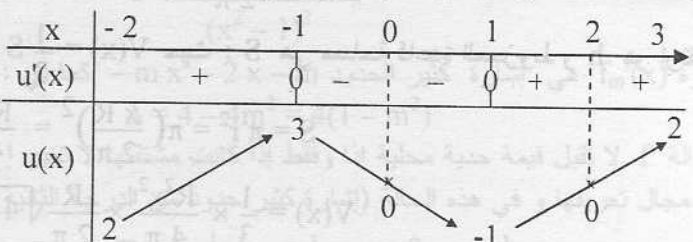
4 - لاحظ أن الدالة V تقبل قيمة حدية محلية عظمى على المجال $]0; 2\pi[$ من أجل $x = \pi\sqrt{\frac{8}{3}}$

$$V\left(\pi\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$$

إذن: الحجم الأعظمي هو

التمرين - 44

إليك جدول تغيرات الدالة u معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $D_u = [-2; 3]$



1 - عين إشارة $u(x)$ على $[-2; 3]$

نعتبر الدوال $k; h; g; f$ معرفة على $[-2; 3]$ كمايلي : $k = \sqrt{u}$; $h = 1/u$; $g = u^3$; $f = u^2$

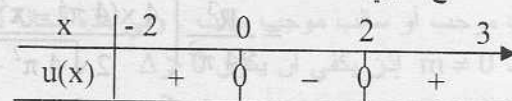
2 - عين مجموعة تعريف كل دالة من الدوال $k; h; g; f$

3 - عبر عن كل من $f'(x)$; $g'(x)$; $h'(x)$ و $k'(x)$ بدلالة $u(x)$ و $u'(x)$

4 - استنتج جدول تغيرات كل دالة من الدوال $k; h; g; f$ على مجموعة تعريفها

الحل - 44

1 - من جدول تغيرات الدالة u نستنتج مايلي :



2 - $f(x) = [u(x)]^2$ إذن f معرفة على $[-2; 3]$

$g(x) = [u(x)]^3$ إذن g معرفة على $[-2; 3]$

$h(x) = \frac{1}{u(x)}$ إذن h معرفة من أجل $u(x) \neq 0$ أي على المجال $[-2; 0[\cup]0; 2[\cup]2; 3]$

$k(x) = \sqrt{u(x)}$ إذن k معرفة من أجل $u(x) \geq 0$ أي على المجال $[-2; 0] \cup [2; 3]$

$$f'(x) = 2 u'(x) \times u(x)$$

$$g'(x) = 3 u'(x) \times [u(x)]^2$$

$$h'(x) = \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$$

- 3

$$k'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \text{ على المجال } [-2; 0[\cup]2; 3]$$

4 - لندرس في كل مرة إشارة الدالة المشتقة ثم نرسم جدول التغيرات :

$$f'(x) = 2 u'(x) u(x) \quad \text{الدالة } f$$

x	-2	-1	0	1	2	3
u'(x)	+	0	-	0	+	
u(x)		+	0	-	0	+
الجداء	+	0	-	0	-	+

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	-2	-1	0	1	2	3
f'(x)	+	0	-	0	-	+
f(x)	4	9	0	1	0	4

$$f(-2) = [u(-2)]^2 = (2)^2 = 4$$

$$f(-1) = [u(-1)]^2 = (3)^2 = 9$$

$$f(0) = [u(0)]^2 = (0)^2 = 0$$

$$f(1) = [u(1)]^2 = (-1)^2 = 1$$

$$f(2) = [u(2)]^2 = (0)^2 = 0$$

$$f(3) = [u(3)]^2 = (2)^2 = 4$$

$$g'(x) = 3 u'(x) \times [u(x)]^2 \quad \text{الدالة } g$$

x	-2	-1	0	1	2	3
u'(x)	+	0	-	0	+	
[u(x)] ²		+	0	+	0	+
الجداء	+	0	-	0	+	+

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	-2	-1	0	1	2	3
g'(x)	+	0	-	0	+	+
g(x)	8	27	0	-1	0	8

$$g(-2) = [u(-2)]^3 = (2)^3 = 8$$

$$g(-1) = [u(-1)]^3 = (3)^3 = 27$$

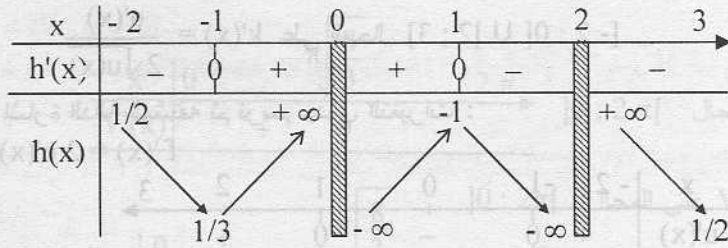
$$g(1) = [u(1)]^3 = (-1)^3 = -1$$

$$g(3) = [u(3)]^3 = (2)^3 = 8$$

$$h'(x) = \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2} \quad \text{من إشارة } -u'(x) \text{ على المجال } [-2; 0[\cup]0; 2[\cup]2; 3] \quad \text{الدالة } h$$

x	-2	-1	0	1	2	3
u'(x)	+	0	-	-	0	+
-u'(x)	-	0	+	+	0	-

منه جدول تغيرات الدالة h :



$$h(-2) = \frac{1}{u(-2)} = 1/2$$

$$h(-1) = \frac{1}{u(-1)} = 1/3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty \quad (\text{لأن } u(x) \text{ موجبة على يسار } 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} = -\infty$$

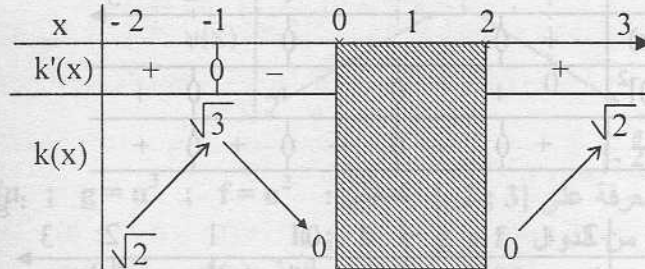
$$h(1) = \frac{1}{u(1)} = -1/1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} = -\infty \quad (\text{لأن } u(x) \text{ سالبة على يسار } 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{u(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$h(3) = \frac{1}{u(3)} = 1/2$$

$$k'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \quad \text{من إشارة } u'(x) \text{ على المجال } [-2; 0[\cup]2; 3]$$



$$k(-2) = \sqrt{u(-2)} = \sqrt{2}$$

$$k(-1) = \sqrt{u(-1)} = \sqrt{3}$$

$$k(0) = \sqrt{u(0)} = 0$$

$$k(2) = \sqrt{u(2)} = 0$$

$$k(3) = \sqrt{u(3)} = \sqrt{2}$$

التمرين - 45

- 1 - أحسب الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$
 2 - استنتج الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية :

$$k : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x - 1}}$$

$$\ell : x \mapsto \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}$$

$$g : x \mapsto \frac{x + 1}{\sqrt{x - 1}}$$

$$h : x \mapsto \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1}$$

الحل - 45

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1(x^2+1)}{(x-1)^2}$$

مثال 1 -

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \quad \text{لـ } x \in \mathbb{R} \text{ فإن } (x-1) \in \mathbb{R} \text{ فإن } (x-1)^2 \in \mathbb{R} \text{ فإن } (x-1)^2 \neq 0 \text{ فإن } f(x) \text{ معرفة على } \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = \frac{[u(x)]^2 + 1}{u(x) - 1} \quad \text{فإن } u : x \mapsto x \text{ لاحظ أن إذا اعتبرنا الدالة } u : x \mapsto x \text{ فإن } u(x) - 1 \neq 0 \text{ مع } f(x) = \frac{[u(x)]^2 + 1}{u(x) - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2 u'(x) u(x) (u(x) - 1) - u'(x) ([u(x)]^2 + 1)}{(u(x) - 1)^2} \quad \text{منه :}$$

مثال 2 -

$$g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} \quad \text{لـ } x > 1 \text{ فإن } g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} \quad \text{فإن } g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} \quad \text{فإن } g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} \quad \text{فإن } g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}} (\sqrt{x-1})^2 - 2 \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \sqrt{x-1} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{(\sqrt{x-1}-1)^2} \quad \text{منه :}$$

$$h(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} \quad \text{فإن } h(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} \quad \text{فإن } h(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} \quad \text{فإن } h(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1}$$

$$h'(x) = \frac{2x(x^2)^2 - 2 \times 2x \times x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{منه :}$$

$$h'(x) = \frac{2x^5 - 4x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$k(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x-1}} \quad \text{فإن } k(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x-1}} \quad \text{فإن } k(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x-1}} \quad \text{فإن } k(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x-1}}$$

$$k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \quad \text{منه :}$$

$$k'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x-1}}} \quad \text{أي :}$$

$$l(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1} \quad \text{فإن } l(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1} \quad \text{فإن } l(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1} \quad \text{فإن } l(x) = \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}$$

$$l'(x) = \frac{\cos x \cdot \sin^2 x - 2 \cos x \sin x - \cos x}{(\sin x - 1)^2} \quad \text{منه :}$$

$$l'(x) = \frac{\cos x (\sin^2 x - 2 \sin x - 1)}{(\sin x - 1)^2}$$

التمرين - 46

من أجل كل عدد طبيعي أكبر تماماً من 1 نعرف الدالة f_n على $\mathbb{R}$ بـ $f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$

1 - أحسب نهايتي f_n عند $-\infty$ و $+\infty$.

2 - أدرس تغيرات الدالة f_n (ميز بين n زوجي و n فردي).

ليكن (C_n) منحنى الدالة f_n في معلم متعامد و متجانس.

3 - تحقق أن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ هو محور تناظر للمنحنى (C_n) .

4 - برر أن (C_n) يمر بأربع نقط ثابتة يطلب تعيينها.

5 - أرسم (C_1) (أي $n = 1$)

الحل - 46

1 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)^n = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2)^n = +\infty$

2 - التغيرات : f_n قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$f_n'(x) = n(2x - 2)(x^2 - 2x)^{n-1} \\ = 2n x^{n-1} (x-1)(x-2)^{n-1}$$

إذن : إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $x^{n-1}(x-1)(x-2)^{n-1}$ لأن $2n$ موجب تماماً لذلك نميز حالتين :

الحالة الأولى : n زوجي إذن $(n-1)$ فردي

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
x^{n-1}	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	0	+	+
$(x-2)^{n-1}$	-	-	-	0	+
الجداء	-	0	+	0	+

منه جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f_n'(x)$	-	0	+	-	+
$f_n(x)$	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$

الحالة الثانية : n فردي إذن $(n-1)$ زوجي

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
x^{n-1}	+	0	+	+	+
$x-1$	-	-	0	+	+
$(x-2)^{n-1}$	-	-	-	0	+
الجداء	-	0	-	0	+

منه جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-	+	+
$f(x)$	$+\infty$	0	-1	0	$+\infty$

3- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $(2-x) \in \mathbb{R}$ و $f_n(2-x) = [(2-x)^2 - 2(2-x)]^n$ و $f_n(x) = [4 - 4x + x^2 - 4 + 2x]^n = (x^2 - 2x)^n = f_n(x)$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_n)

4- من أجل $x^2 - 2x = 0$ فإن $f_n(x) = 0$ مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$

من أجل $x^2 - 2x = 1$ فإن $f_n(x) = 1$ مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$

لنحل إذن المعادلتين : $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{أو} \\ x=2 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

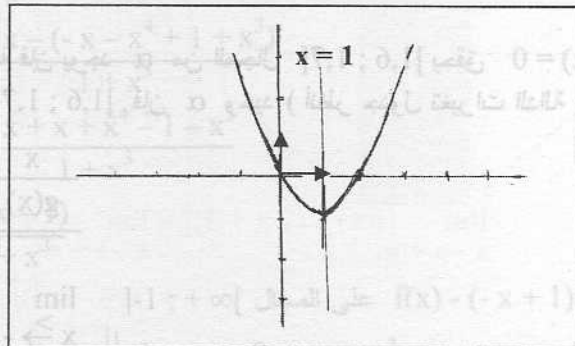
$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

نتيجة : من أجل أي قيمة للعدد الطبيعي غير المعلوم n فإن النقط $A(0;0)$ ، $B(2;0)$ ، $C(1-\sqrt{2};1)$ ، $D(1+\sqrt{2};1)$ ثابتة من المنحنى (C_n) .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

5- إنشاء (C_1) :
 $f_1(x) = x^2 - 2x$
 $f_1'(x) = 2x - 2$



المنحنى :

التمرين - 47

الجزء I :

g دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1- أدرس تغيرات الدالة g .

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 1,6 و 1,7

3- استنتج إشارة g(x) على $]-1; +\infty[$

الجزء II :

f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$. نسمي (C) منحنىها في معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; 0)$

1- بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. أعط تفسيراً بيانياً للنتيجتين .

2- أدرس تغيرات الدالة f على $]-1; +\infty[$.

3- عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4- تحقق أن من أجل كل x من $]-1; 1[$: $f(x) - (-x+1) = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$

5 - استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (Δ)

6 - أرسم كل من (C) و (Δ)

الحل - 47

الجزء I :

1 - تغيرات الدالة g :

g معرفة وقابلة للإشتقاق على IR وخاصة على $]-1; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+

منه جدول تغيرات الدالة g على $]-1; +\infty[$

x	-1	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	-6	-1	-2	$+\infty$	

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = g(-1) = -2 - 3 - 1 = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$g(1,6) = 2(4,096) - 3(2,56) - 1 = -0,488$$

$$g(1,7) = 9,826 - 8,67 - 1 = 0,156$$

لدينا الشروط التالية :
 $\left. \begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [1,6; 1,7] \\ g(1,6) \times g(1,7) < 0 \end{array} \right\}$

إن : حسب ميرهنه القيم المتوسطة فإن يوجد α من المجال $[1,6; 1,7]$ يحقق $g(\alpha) = 0$
 و بما أن g متزايدة تماماً على $[1,6; 1,7]$ فإن α وحيد (أنظر جدول تغيرات الدالة g)

3 - إشارة g(x) :

x	-1	1,6	α	1,7	$+\infty$
$g(x)$	-	-	0	+	+

الجزء II :

1 -

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{1+x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-(-1)}{1+(-1)^3}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{y}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^3} = 0$$

التفسير الهندسي :

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب عمودي على يمين -1 معادلته $x = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب أفقي عند $+\infty$ معادلته $y = 0$ (محور الفواصل)

2 - التغيرات :

f دالة ناطقة إذن قابلة للإشتقاق على مجال تعريفها وخاصة على $]-1; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{-1 - x^3 - 3x^2 + 3x^3}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{(1+x^3)^2} \text{ حيث } g \text{ هي الدالة المدروسة في الجزء I.}$$

منه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ لأن $(1+x^3)^2$ موجب كما يلي :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة f على $]-1; +\infty[$

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	0

3 - معادلة (Δ) : مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = -1/1 = -1 \\ f(0) = 1/1 = 1 \end{array} \right\} : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

منه معادلة (Δ) : $y = -x + 1$

4 - من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ فإن

$$\begin{aligned} f(x) - (-x+1) &= \frac{1-x}{1+x^3} - (-x+1) \\ &= \frac{1-x - (-x-x^4+1+x^3)}{1+x^3} \\ &= \frac{1-x+x+x^4-1-x^3}{1+x^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^3(x-1)}{1+x^3} \text{ وهو المطلوب}$$

5 - إشارة $f(x) - (-x+1)$ على المجال $]-1; +\infty[$

x	-1	0	1	$+\infty$
x^3	-	0	+	
$x-1$	-	-	0	+
$1+x^3$		+		
$\frac{x^3(x-1)}{1+x^3}$	+	0	-	+

خلاصة : لما $x \in]-1; 0[\cup]1; +\infty[$ (C) يقع فوق (Δ)

لما $x \in]0; 1[$ (C) يقع تحت (Δ)

لما $x \in \{0; 1\}$ (C) يقطع (Δ)

التمرين 48 -

f دالة معرفة على المجموعة D_f بـ $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$ مع $D_f =]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0; \vec{T}; \vec{J})$

1 - أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

2 - بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

3 - هل f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟ عند 4 - ؟4 - أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in D_f - \{0; -4\}$ 5 - أنشئ جدول تغيرات f (الالة f ثم المنحنى (C))

الحل - 48

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} = -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}) \times \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 4x}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$\sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x}\right)} \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 1}{x + 1 - |x| \sqrt{1 + \frac{4}{x}}}$$

$$x \rightarrow -\infty \quad |x| = -x \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x \left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{x + 1 + x \sqrt{1 + \frac{4}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x \left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \frac{-2}{1+1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - 2x - 3 = -2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2) \right] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - (x^2 + 4x + 4)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$y = 2x + 3 \quad \text{إذن المستقيم ذو المعادلة} \quad = 0$$

مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ 3 - لا يمكن لـ f أن تكون نابذة للاشتقاق عند 0 لأنها ليست معرفة على يسار 0لا يمكن لـ f أن تكون قابلة للاشتقاق عند -4 لأنها ليست معرفة على يمين -44 - من أجل $x \in D_f - \{0; -4\}$ فإن

$$f'(x) = 1 + \frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$= 1 + \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$$

5 - إشارة $f'(x)$:

أ . على المجال $]0; +\infty[$ لدينا $\left. \begin{array}{l} x+2 > 0 \\ \sqrt{x^2+4x} > 0 \end{array} \right\}$

إذن : $1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} > 0$ أي $f'(x) > 0$

ب . على المجال $]-\infty; -4[$ لدينا : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 \geq -\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)$$

$\Leftrightarrow 1 \geq \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)^2$ لأن الطرفين موجبين لما $x \in]-\infty; -4[$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{x^2+4x+4}{x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x \geq x^2+4x+4$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq 4 \text{ مستحيل.}$$

إذن على المجال $]-\infty; -4[$ لا يمكن أن يكون $f'(x) \geq 0$ أي $f'(x) < 0$

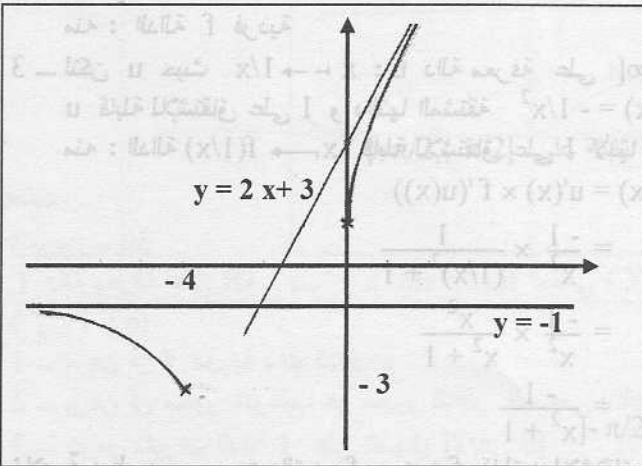
خلاصة : إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$f'(x)$	-			+

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
f(x)	-1	-3	1	$+\infty$

الإشياء :



التمرين - 49

f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على IR حيث $f(0) = 0$ و من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ نقبل أن الدالة f موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $f(x)$ ونسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس

g دالة معرفة على IR بـ $g(x) = f(x) + f(-x)$

1 - برر أن g قابلة للإشتقاق على IR ثم عين $g'(x)$

2 - أحسب $g(0)$. ثم استنتج أن الدالة f فردية

لتكن h دالة معرفة على المجال I حيث $I =]0; +\infty[$ بـ $h(x) = f(x) + f(1/x)$

3 - برر أن h قابلة للإشتقاق على I ثم أحسب $h'(x)$

4 - برهن أن من أجل كل x من I فإن $h(x) = 2f(1)$

5 - استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2f(1)$. فسر النتيجة هندسيا .

k دالة معرفة على $]-\pi/2; \pi/2[$ بـ $k(x) = f(\tan x) - x$

6 - أحسب $k'(x)$ ماذا ينتج عن الدالة k ؟

7 - أحسب $f(1)$

8 - أنجز جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

9 - أرسم المنحنى (C) و اكتب معادلات مماساته عند النقاط التي فواصلها 0 ; -1 ; 1

الحل - 49

1 - لتكن u دالة حيث $x \mapsto -x$ $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ منه u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $u'(x) = -1$

إذن : $f(-x) = f(u(x)) = f \circ u(x)$

منه : الدالة $x \mapsto f(-x)$ هي مركب الدالتين u و f إذن هي دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و دالتها المشتقة هي :

$$x \mapsto u'(x) \times f'(u(x))$$

$$x \mapsto -1 f'(-x)$$

$$x \mapsto \frac{-1}{(-x)^2 + 1} = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

أي :

خلاصة : g هي مجموع الدالتين f و $f \circ u$ قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن : g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = f'(x) + (-1) f'(-x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$$

$= 0$ إذن الدالة g ثابتة على $\mathbb{R}$

$$g(0) = f(0) + f(-0) = 2 f(0) = 0 \quad 2 -$$

إذن : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $g(x) = g(0) = 0$ لأن g ثابتة .

أي : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x) + f(-x) = 0$

أي : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $f(-x) = -f(x)$

منه : الدالة f فردية

3 - لتكن u حيث $x \mapsto 1/x$ $u : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على $I =]0 ; +\infty[$

u قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة $u'(x) = -1/x^2$

منه : الدالة $x \mapsto f(1/x)$ $f \circ u$ قابلة للاشتقاق على I لأنها مركب الدالتين f و u و دالتها المشتقة كمايلي :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

$$= \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{(1/x)^2 + 1}$$

$$= \frac{-1}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-1}{x^2 + 1}$$

خلاصة : h هي مجموع الدالتين f و $f \circ u$ قابلتين للاشتقاق على I

إذن : h قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة هي :

$$h'(x) = f'(x) + \left(\frac{-1}{x^2 + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$$

$= 0$ إذن الدالة h ثابتة

$$h(1) = f(1) + f(1/1) = f(1) + f(1) = 2 f(1) \quad 4 -$$

لكن h دالة ثابتة إذن : من أجل كل x من I فإن $h(x) = h(1)$

أي : من أجل كل x من I فإن $h(x) = 2 f(1)$

5 - لدينا من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $h(x) = f(x) + f(1/x)$

$$2 f(1) = f(x) + f(1/x) \quad \text{أي :}$$

$$f(x) = 2 f(1) - f(1/x) \quad \text{أي :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 f(1) - f(1/x)]$$

$$= 2 f(1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(1/x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0 \quad \text{لأن} \quad = 2 f(1) - \lim_{y \rightarrow 0} f(y)$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 f(1) - 0$ لأن $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = f(0) = 0$ (f قابلة للاشتقاق عند 0 إذن فهي مستمرة عند 0)

أي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 f(1)$

تفسير هندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 2 f(1)$ مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

— 6 $k(x) = f(\tan x) - x$

نعرف الدالة $u : x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ على $]-\pi/2 ; \pi/2[$

إذن : $u'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

منه : $k'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \times f'(\tan x) - 1$ لأن $k'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) - 1$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\tan^2 x + 1} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} - 1$$

$$= 1 - 1$$

إذن الدالة k ثابتة على $]-\pi/2 ; \pi/2[$

بما أن : $k(0) = f[\tan(0)] - 0$
 $= f(0) - 0$
 $= 0 - 0$
 $= 0$

فإن الدالة k معدومة على $]-\pi/2 ; \pi/2[$ أي :

من أجل كل x من $]-\pi/2 ; \pi/2[$ فإن $k(x) = 0$

أي : $1(\tan x) - x = 0$ وهذا من أجل كل x من $]-\pi/2 ; \pi/2[$

من أجل $x = \pi/4$ نحصل على : $f(\tan \frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4} = 0$

أي : $f(\tan \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

أي : $f(1) = \frac{\pi}{4}$ لأن $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

نتيجة : $f(1) = \pi/4$

8 — جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

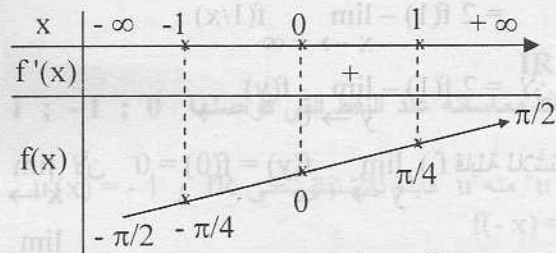
حسب الأسئلة السابقة تحصلنا على :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ فردية} \\ f(1) = \pi/4 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 f(1) = \pi/2 \end{array} \right\}$$

بما أن f فردية فإن يمكن إستنتاج مايلي :

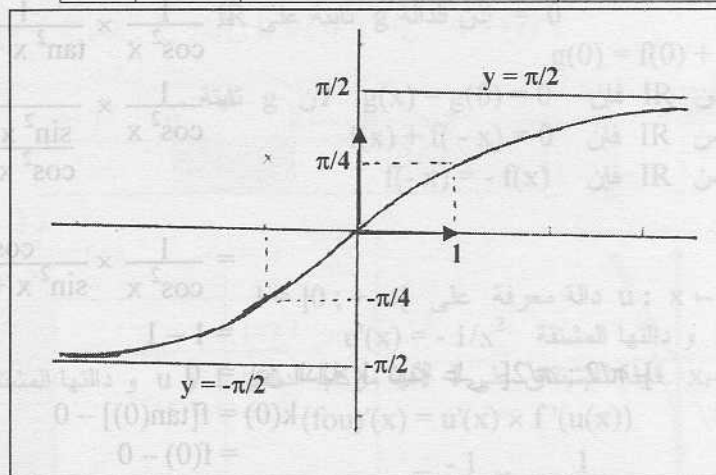
$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -\pi/4 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\pi/2 \end{array} \right\}$$

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :



9 — معادلات المماسات عند النقط ذات الفواصل : 1 ; 0 ; - 1

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	معادلة المماس
0	0	$\frac{1}{0+1} = 1$	$y = x$
- 1	$-\pi/4$	$\frac{1}{(-\pi/4)^2 + 1} = \frac{16}{16 + \pi^2}$	$y = \frac{16}{16 + \pi^2} (x + 1) - \frac{\pi}{4}$
1	$\pi/4$	$\frac{1}{(+\pi/4)^2 + 1} = \frac{16}{16 + \pi^2}$	$y = \frac{16}{16 + \pi^2} (x - 1) + \frac{\pi}{4}$



المنحنى :

التمرين — 50

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin^2 x$ نسمي (C) منحنىها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; 0)$

1 — برهن أن f دورية ذات الدور π

2 — برهن أن محور الترتيب هو محور تناظر للمنحنى (C).

3 — أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; \pi/2]$

4 — أرسم المنحنى (C) على المجال $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

الحل — 50

1 — من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $(x + \pi) \in \mathbb{R}$ و لدينا :

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \sin^2(x + \pi) \\ &= [\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi]^2 \\ &= (-\sin x + 0)^2 \\ &= \sin^2 x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن : f دورية و دورها π

نتيجة : يكفي دراسة الدالة f على مجال طوله π

2 — من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $(-x) \in \mathbb{R}$ و لدينا :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin^2(-x) \\ &= (-\sin x)^2 \\ &= \sin^2 x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن f دالة زوجية منه المنحني (C) يقبل محور الترتيب كمحور تناظر

3 - تغيرات الدالة f على $[0; \pi/2]$

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و خاصة على $[0; \pi/2]$ و دالتها المشتقة :

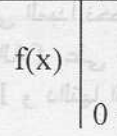
$$f'(x) = 2 \cos x \sin x$$

x	0	$\pi/2$
$\cos x$	+	0
$\sin x$	0	+
$f'(x)$	0	+

إشارة $f'(x)$:

x	0	$\pi/2$
$f'(x)$	0	+

منه جدول تغيرات الدالة f على $[0; \pi/2]$



4 - لرسم المنحني على $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ نتبع الخطوات التالية :

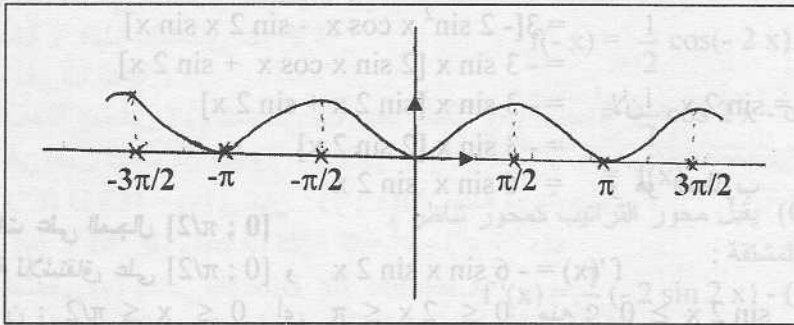
✓ نرسم جزء المنحني على المجال $[0; \pi/2]$ حسب جدول التغيرات .

✓ بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب نرسم الجزء من المنحني على المجال $[-\pi/2; 0]$

✓ بإجراء إنسحاب للمنحني على المجال $[-\pi/2; \pi/2]$ نرسم الأجزاء من المنحني على المجالين $[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi]$ أي

$[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ و $[-\frac{\pi}{2} - \pi; -\frac{\pi}{2}]$ أي $[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}]$ هكذا نتحصل على المنحني (C) على المجال

$[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ كما يلي :



التمرين - 51

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sin 3x - 3 \sin x$

1 - قارن بين $f(x)$ و كل من $f(\pi - x)$; $f(-x)$; $f(x + 2\pi)$

2 - برهن أنه يكفي دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0; \pi/2]$

3 - برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -6 \sin x \sin 2x$

4 - أدرس تغيرات الدالة f على $[0; \pi/2]$

5 - أرسم منحني الدالة f على $[-\pi; \pi]$

الحل - 51

1 - من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$ و $(-x) \in \mathbb{R}$ و $(\pi - x) \in \mathbb{R}$ حيث :

$$f(x + 2\pi) = \sin 3(x + 2\pi) - 3 \sin(x + 2\pi)$$

$$= \sin(3x + 6\pi) - 3 \sin(x + 2\pi)$$

$$= \sin 3x - 3 \sin x$$

و هو المطلوب (1)

$$f(-x) = \sin(-3x) - 3 \sin(-x)$$

$$= -\sin 3x + 3 \sin x$$

$$= -(\sin 3x - 3 \sin x)$$

و هو المطلوب (2)

$$f(\pi - x) = \sin 3(\pi - x) - 3 \sin(\pi - x)$$

$$= \sin(3\pi - 3x) - 3 \sin x$$

$$= \sin 3x - 3 \sin x$$

و هو المطلوب (3)

$$= f(x)$$

2 - خلاصة : حسب السؤال (1) لدينا

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \checkmark \quad \text{إذن : } 2\pi \text{ هو دور الدالة } f$$

منه : يكفي دراستها على مجال طولها 2π و ليكن $[-\pi; \pi]$

$$f(-x) = -f(x) \quad \checkmark \quad \text{إذن : } f \text{ فردية أي المبدأ } (0; 0) \text{ هو مركز تناظر للمنحنى .}$$

منه : يكفي دراسة الدالة f على المجال $[0; \pi]$

$$\checkmark \text{ ندرس الدالة } f \text{ على } [0; \pi/2] \text{ ثم باستعمال العلاقة } f(\pi - x) = f(x) \text{ نحصل على المنحنى على المجال } [\pi/2; \pi]$$

$$\text{لأن : } 0 \leq x \leq \pi/2$$

$$\text{أي : } -\pi/2 \leq -x \leq 0$$

$$\text{أي : } \pi - \pi/2 \leq \pi - x \leq \pi$$

$$\text{أي : } \pi/2 \leq \pi - x \leq \pi$$

✓ بالتناظر بالنسبة إلى المبدأ نحصل على المنحنى على الجزء $[-\pi; -\pi/2]$

نتيجة يكفي دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0; \pi/2]$

3 - f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 3\cos 3x - 3\cos x$$

$$= 3[\cos 3x - \cos x]$$

$$= 3[\cos(2x + x) - \cos x]$$

$$= 3[\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x - \cos x]$$

$$= 3[\cos x(\cos 2x - 1) - \sin 2x \sin x]$$

$$= 3[\cos x(-2\sin^2 x) - \sin 2x \sin x]$$

$$= 3[-2\sin^2 x \cos x - \sin 2x \sin x]$$

$$= -3\sin x [2\sin x \cos x + \sin 2x]$$

$$= -3\sin x [\sin 2x + \sin 2x]$$

$$= -6\sin x \sin 2x$$

و هو المطلوب

4 - التغيرات على المجال $[0; \pi/2]$

$$f'(x) = -6\sin x \sin 2x \quad \text{و} \quad [0; \pi/2] \text{ قابلة للاشتقاق على } f$$

$$\text{لاحظ أن : } 0 \leq x \leq \pi/2 \quad \text{أي} \quad 0 \leq 2x \leq \pi \quad \text{منه : } \sin 2x \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -6 < 0 \\ \sin x \geq 0 \\ \sin 2x \geq 0 \end{array} \right\} \text{ لأن } f'(x) \leq 0 \text{ فإن } [0; \pi/2] \text{ من } x \text{ من أجل كل } x$$

منه جدول تغيرات الدالة f على $[0; \pi/2]$

x	0	$\pi/2$
$f'(x)$	0	0
$f(x)$	0	-4

$$f(0) = \sin 0 - 3 \sin 0 = 0$$

$$f(\pi/2) = \sin \frac{3\pi}{2} - 3 \sin \frac{\pi}{2} = -1 - 3 = -4$$

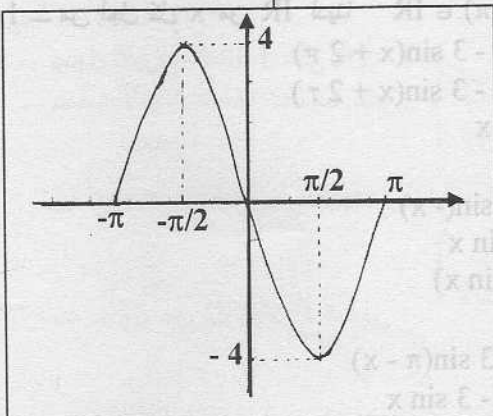
5 - رسم المنحنى على $[-2\pi; 2\pi]$

باستعمال الخواص المطلوبة في السؤال (1) نحصل على جدول التغيرات

التالي :

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	0	4	0	-4	0

منه المنحنى التالي :



التمرين 52

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x$

نسمي (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$

1 - برهن أن الدالة f دورية و دورها 2π

2 - برهن أن محور الترتيب هو محور تناظر للمنحنى (C).

3 - أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \sin x [1 - 2 \cos x]$

4 - أدرس إشارة $f'(x)$ على المجال $[0; \pi]$

5 - أرسم جزء المنحنى (C) على المجال $[-\pi; \pi]$

6 - كيف يمكن إستنتاج المنحنى (C) على $\mathbb{R}$ ؟

الحل 52

1 - من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$ و

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \frac{1}{2} \cos 2(x + 2\pi) - \cos(x + 2\pi) \\ &= \frac{1}{2} \cos(2x + 4\pi) - \cos x \\ &= \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن f دورية و دورها 2π

2 - من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $(-x) \in \mathbb{R}$ و :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{2} \cos(-2x) - \cos(-x) \\ &= \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن f دالة زوجية أي منحناها (C) يقبل محور الترتيب كمحور تناظر.

3 - f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} (-2 \sin 2x) - (-\sin x) \\ &= -\sin 2x + \sin x \end{aligned}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{لأن} \quad = -(2 \sin x \cos x) + \sin x$$

$$= \sin x(1 - 2 \cos x) \quad \text{و هو المطلوب}$$

$$f'(x) = \sin x(1 - 2 \cos x) \quad - 4$$

على المجال $[0; \pi]$ لدينا : $1 - 2 \cos x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2 \cos x$

$$\Leftrightarrow \cos x \leq 1/2$$

$$\Leftrightarrow x \in [\pi/3; \pi]$$

منه جدول إشارة $f'(x)$ كمايلي :

x	0	$\pi/3$	π
$\sin x$	0	+	0
$1 - 2 \cos x$	-	0	+
$f'(x)$	0	-	+

5 - جدول تغيرات الدالة f على $[0; \pi]$

x	0	$\pi/3$	π
$f'(x)$	0	0	0
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$

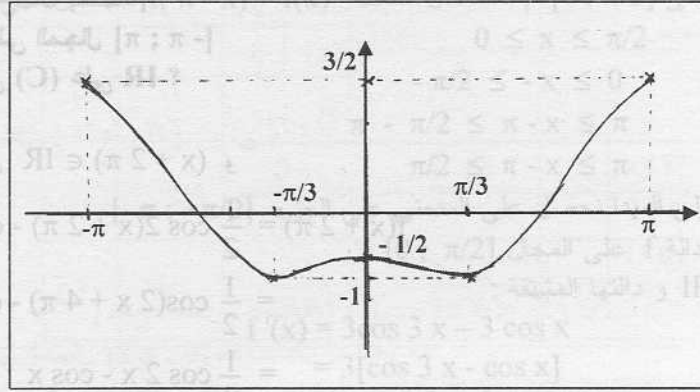
$$f(0) = \frac{1}{2} \cos 0 - \cos 0 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos 2\frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$f(\pi) = \frac{1}{2} \cos 2\pi - \cos \pi = \frac{1}{2}(1) - (-1) = \frac{3}{2}$$

إنشاء المنحنى على $[-\pi; \pi]$ (بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب نرسم الجزء على $[-\pi; 0]$ كما في الشكل :

6 - الإنشاء على $\mathbb{R}$: بإجراء انسحاب للمنحنى (C) على مجالات طولها 2π نحصل على المنحنى على $\mathbb{R}$



التمرين - 53

f دالة معرفة على $[0; 1]$ بـ $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$

نسمي (C) منحنىها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; 0)$

1 - هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

2 - أدرس تغيرات الدالة f

3 - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة $1/2$

4 - أرسم في نفس المعلم كل من (T) و (C) و (C') حيث (C') هو نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى محور الفواصل .

5 - نضع $(\gamma) = (C) \cup (C')$ و لتكن $M(x; y)$ نقطة من المستوي .

برهن أن : $M \in (\gamma)$ إذا وفقط إذا كان $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$

ملاحظة : المنحنى (γ) يسمى Cissoïde de Dioclès

6 - I نقطة ذات الإحداثيات (1; 0) و (E) الدائرة ذات القطر (OI)

(Δ) مماس الدائرة (E) عند النقطة I

(d) المستقيم الذي يشمل O و معلم توجيهه العدد الحقيقي t حيث $t \neq 0$.

عين إحداثيات النقطة M نقطة تقاطع الدائرة (E) و المستقيم (d) حيث M تختلف عن O .

7 - عين إحداثيات M' نقطة تقاطع (γ) و المستقيم (d) حيث M' تختلف عن O .

الحل - 53

1 - الدالة f ليست معرفة على يسار 0 إذن f ليست قابلة للاشتقاق عند 0

و لدينا

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}{x}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{\frac{x}{1-x}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

لأن $x > 0$ $\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = x \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

إذن : f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و عددها المشتق هو 0

2 - التغيرات : f معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0; 1[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2(1-x) + x^3}{(1-x)^2} \right) \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

$$\sqrt{x^3} = x\sqrt{x} \quad \text{لأن } x > 0 \quad = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2x} \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$= \frac{x^2(3-2x)}{2x(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$= \frac{x(3-2x)}{2(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$\left. \begin{aligned} x &> 0 \\ (1-x)^2 &> 0 \\ \sqrt{\frac{1-x}{x}} &> 0 \end{aligned} \right\} \text{ إذن إشارة } f'(x) \text{ على }]0; 1[\text{ هي إشارة } 3-2x \text{ فقط لأن}$$

منه جدول إشارة $f'(x)$

x	0	1	3/2	$+\infty$
$3-2x$	3	0	+	-

منه جدول تغيرات الدالة f على $[0; 1]$:

x	0	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{1/y} = +\infty$$

3 - معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1/2 تكتب من الشكل

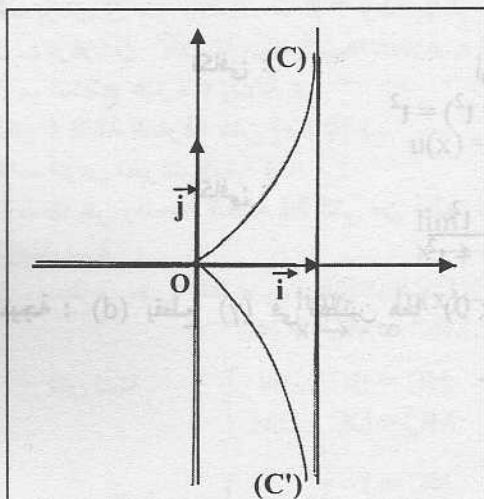
$$y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}(3-1)}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1/2}} = \frac{1}{2(1/4)} \sqrt{1} = 2 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1/8}{1/2}} = \sqrt{1/4} = 1/2 \end{cases}$$

$$y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \quad \text{منه معادلة (T)}$$

$$y = 2x - \frac{1}{2} \quad \text{أي}$$

4 - الإنشاء :



$$y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} \quad \text{لدينا معادلة المنحنى (C') هي}$$

حيث $x \in [0; 1]$

إذن تكون $M(x; y)$ تنتمي إلى $(C) \cup (C')$ إذا وفقط إذا كان

$M \in (C)$ أو $M \in (C')$

أي تكون $M(x; y)$ تنتمي إلى (γ) إذا وفقط إذا كان

$$y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} \quad \text{أو} \quad y = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

أي : $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$

$$y^2(1-x) = x^3$$

أي : $y^2 - x y^2 = x^3$

أي : $y^2 = x^3 + x y^2$

أي : $y^2 = x(x^2 + y^2)$

أي : $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$ وهو المطلوب .

6 - $I(1; 0)$ إذن $OI = 1$ منه نصف قطر الدائرة (E) هو $1/2$ و مركزها $w(1/2; 0)$ إذن معادلتها

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

أي : $x^2 + y^2 - x = 0$ معادلة (E)

لاحظ أن مماس الدائرة (E) عند النقطة I هو المستقيم Δ ذو المعادلة $x = 1$ (مقارب للمنحني (C))

(d) يشمل المبدأ و معامل توجيهه t إذن معادلته تكتب من الشكل $y = tx$

لتكن $M(x; y)$ نقطة من (d) أي $M(x; tx)$

تكون M نقطة من (E) إذا وفقط إذا كان :

$$x^2 + (tx)^2 - x = 0$$

أي : $x^2 + t^2 x^2 - x = 0$

أي : $x^2(1 + t^2) - x = 0$

أي : $x[(1 + t^2)x - 1] = 0$

أي : $\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = \frac{1}{1+t^2} \end{cases}$

منه (d) يقطع (E) في نقطتين هما $O(0; 0)$ و $M\left(\frac{1}{1+t^2}; \frac{t}{1+t^2}\right)$

7 - لتكن $M'(x; y)$ نقطة من (d) إذن $M'(x; tx)$

تكون M' نقطة من γ إذا وفقط إذا كان $x \in [0; 1]$ $\left\{ \begin{aligned} &x(x^2 + t^2 x^2) - t^2 x^2 = 0 \\ &\dots\dots\dots (1) \end{aligned} \right.$

المعادلة (1) تكافئ : $x^3 + t^2 x^3 - t^2 x^2 = 0$

تكافئ : $x^2(x + t^2 x - t^2) = 0$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ \text{أو} \\ x + t^2 x - t^2 = 0 \end{cases}$$

تكافئ :

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x(1 + t^2) = t^2 \end{cases}$$

تكافئ :

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

تكافئ :

الحلين مقبولين لأنهما ينتميان إلى المجال $[0; 1]$

نتيجة : (d) يقطع γ في نقطتين هما $O(0; 0)$ و $M'\left(\frac{t^2}{1+t^2}; \frac{t^3}{1+t^2}\right)$

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين 1 -

(O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) معلم متعامد ومتجانس للمستوي .نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ و (C) منحناها البياني في المعلم (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$)1 - عين نهاية الدالة u عند $-\infty$.2 - بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ عند $+\infty$.3 - استنتج نهاية الدالة u عند $+\infty$.4 - بين أن $[u(x) + 2x]$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $-\infty$. ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة .5 - بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $u(x) > 0$.6 - استنتج إشارة $[u(x) + 2x]$ ثم فسر النتائج هندسيا .7 - نقبل أن الدالة u متناصفة تماما على $\mathbb{R}$. أرسم المنحنى (C) ومستقيمه المقارب المائل .

الحل 1 -

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

لأن

2 - من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} u(x) &= \sqrt{x^2 + 1} - x \\ &= (\sqrt{x^2 + 1} - x) \times \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \end{aligned}$$

و هو المطلوب .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = +\infty \text{ لأن } = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [u(x) + 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x + 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{u(x)} \end{aligned}$$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{u(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty \text{ لأن } = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [u(x) - (-2x)] = 0 \text{ أي } \lim_{x \rightarrow -\infty} [u(x) + 2x] = 0$$

التفسير الهندسي : إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.5 - لندرس إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$u(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > x \text{(1)}$$

نميز حالتين :

الأولى : $x < 0$ في هذه الحالة المتراجحة (1) دائما محققة .

الثانية : $x \geq 0$ في هذه الحالة المتراجحة (1) تكافئ $x^2 + 1 > x^2$

تكافئ $1 > 0$ وهذا محقق دائما .

نتيجة : من أجل كل عدد حقيقي x فإن $u(x) > 0$

6 - لدينا : $u(x) + 2x = \sqrt{x^2 + 1} - x + 2x$

$= \sqrt{x^2 + 1} + x$

$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ لأن $\frac{1}{u(x)}$

إذن : إشارة $u(x) + 2x$ هي إشارة $\frac{1}{u(x)}$ أي موجب تماما لأن $u(x) > 0$

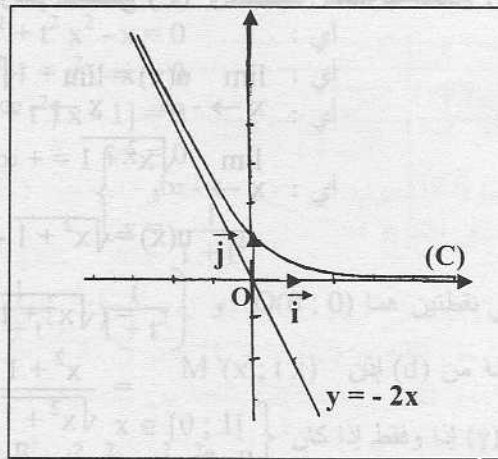
التفسير الهندسي : $[u(x) + 2x] > 0$ تكافئ $u(x) - (-2x) > 0$

أي المنحنى (C) يقع فوق المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y = -2x$

7 - الإنشاء : علما أن الدالة u متناقصة على $\mathbb{R}$ نحصل على جدول

التغيرات التالي :

منه المنحنى التالي :



التمرين 2 -

ABCD مربع ضلعه 1 .

(C) هو ربع الدائرة ذات المركز A و نصف القطر [AB] المرسوم داخل المربع .

T نقطة من (C) تختلف عن B و D مماس الدائرة (C) عند النقطة T يقطع [DC]

في النقطة M و يقطع [BC] في النقطة N .

نضع $DM = x$ و $BN = y$

1- برهن أن $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

2- برهن أن $MN = x + y$

3- استنتج عبارة y بدلالة x

4- أدرس تغيرات الدالة f .
لتكن f الدالة المعرفة على $]0; 1[$ بـ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

5- ما هي وضعية النقطة M التي من أجلها تكون المسافة MN أصغر ما يمكن ؟

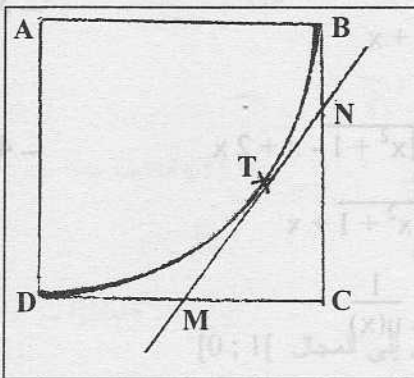
الحل 2 -

1 - بتطبيق نظرية فيثاغورس، على المثلث MNC القائم في C نحصل على :

$MN^2 = MC^2 + NC^2$

لكن لدينا : $\left. \begin{array}{l} NC = BC - BN \\ MC = DC - DM \end{array} \right\}$

أي : $\left. \begin{array}{l} NC = 1 - y \\ MC = 1 - x \end{array} \right\}$ لأن $\left. \begin{array}{l} BC = DC = 1 \\ DM = x \text{ و } BN = y \end{array} \right\}$



إذن المساواة (1) تصبح : $MN^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2$

أي : $MN^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2$

أي : $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ و هو المطلوب .

2 - حسب الشكل لدينا : $MN = MT + TN$ (2) و المماس (MN) عمودي على (AT)

لنبحث عن كل من MT و TN :

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ATN القائم في T نحصل على :

$AN^2 = AT^2 + TN^2$ أي : $AN^2 = 1 + TN^2$ (α)

لأن : AT هو نصف قطر الدائرة (C) أي $AT = 1$

من جهة أخرى بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ABN القائم في B فإن :

$AN^2 = AB^2 + BN^2$ أي : $AN^2 = 1 + y^2$ (β)

بمقارنة العلاقتين (α) و (β) نحصل على :

$1 + TN^2 = 1 + y^2$

أي : $TN^2 = y^2$

منه : $TN = y$ (3)

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ATM القائم في T نحصل على :

$AM^2 = AT^2 + MT^2$ أي $AM^2 = 1 + MT^2$ (γ)

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث AMD القائم في D نحصل على :

$AM^2 = AD^2 + DM^2$ أي : $AM^2 = 1 + x^2$ (λ)

بمقارنة العلاقتين (γ) و (λ) نحصل على :

$1 + MT^2 = 1 + x^2$

أي : $MT^2 = x^2$

أي : $MT = x$ (4)

بتعويض كل من MT و TN في العلاقة (2) نحصل على :

$MN = x + y$ و هو المطلوب .

3 - لدينا : $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$
 $MN = x + y$

أي : $(x+y)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

أي : $x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

أي : $2xy = -2x - 2y + 2$

أي : $2xy + 2y = 2 - 2x$

أي : $2y(x+1) = 2(1-x)$

أي : $y = \frac{1-x}{1+x}$ حيث $1+x \neq 0$ لأن $0 < x < 1$.

وهي عبارة y بدلالة x.

4 - تغيرات الدالة f على اله جال [1 ; 0]

f دالة ناطقة إذن معرفة و قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها $\{-1\} - IR$ و خاصة على المجال $]0 ; 1[$

و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{2x(1+x) - (1+x^2)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{2x + 2x^2 - 1 - x^2}{(1+x)^2}$$

إشارة $x^2 + 2x - 1$: $= \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2}$ من إشارة $x^2 + 2x - 1$ لأن المقام موجب

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

منه :

x	$-1-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}-1$	1
x^2+2x-1	$+$	0	$-$	$+$

إذن : إشارة $f'(x)$ على المجال $]0; 1[$ كما يلي :

x	0	$\sqrt{2}-1$	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$

منه جدول تغيرات الدالة f على $]0; 1[$:

x	0	$\sqrt{2}-1$	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$2\sqrt{2}-2$	1

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

$$f(\sqrt{2}-1) = \frac{2-2\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-2$$

$$y = \frac{1-x}{1+x} \quad \text{و} \quad MN = x+y \quad \text{لدينا : 5 -}$$

$$MN = x + \frac{1-x}{1+x} \quad \text{أي :}$$

$$MN = \frac{x+x^2+1-x}{1+x} \quad \text{أي :}$$

$$MN = \frac{x^2+1}{x+1} \quad \text{أي :}$$

$$MN = f(x) \quad \text{أي :}$$

نتيجة : تكون المسافة MN أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كانت $f(x)$ قيمة حدية صغرى على المجال $]0; 1[$ و حسب جدول التغيرات فإن هذا محقق من أجل $x = \sqrt{2}-1$ وعليه تكون المسافة MN أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كانت المسافة بين النقطة D و النقطة M هي $\sqrt{2}-1$ أي $x = \sqrt{2}-1$

التمرين 3 -

لتكن $f_m(x) = \frac{x^2 - mx - 15}{x^2 - mx - 3}$ دالة معرفة بـ m وسيط حقيقي غير معدوم .

- 1 - ادرس تغيرات الدالة f_m .
- 2 - استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_m) الممثل للدالة f_m .
- 3 - بين أنه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات (C_m) .
- 4 - ما هو المنحنى الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيات $(4; 1)$.

الحل - 3

1 - دراسة تغيرات الدالة f_m :

$$f_m \text{ معرفة من أجل : } x^2 - mx - 3 \neq 0$$

$$\Delta = m^2 + 12 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2} \\ x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2} \end{cases}$$

لاحظ أن من أجل كل n من $\mathbb{R}$ فإن $x_1 < x_2$ لأن $x_1 - x_2 = \frac{-2\sqrt{m^2 + 12}}{2} < 0$

إذن : f_m معرفة على $]-\infty; x_1[\cup]x_1; x_2[\cup]x_2; +\infty[$

لاحظ أن : $f_m(x) = \frac{x^2 - m x - 3 - 12}{x^2 - m x - 3} = 1 - \frac{12}{x^2 - m x - 3}$

إذن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = 1$

$\lim_{x \leq x_1} f_m(x) = \lim_{y \geq 0} 1 - \frac{12}{y} = -\infty$

$\lim_{x \geq x_1} f_m(x) = \lim_{y \leq 0} 1 - \frac{12}{y} = +\infty$

$\lim_{x \leq x_2} f_m(x) = \lim_{y \leq 0} 1 - \frac{12}{y} = +\infty$

$\lim_{x \geq x_2} f_m(x) = \lim_{y \geq 0} 1 - \frac{12}{y} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = 1$

f_m دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$f'_m(x) = \frac{(2x - m)(x^2 - m x - 3) - (2x - m)(x^2 - m x - 15)}{(x^2 - m x - 3)^2}$$

$$= \frac{2x - m}{(x^2 - m x - 3)^2} \times (x^2 - m x - 3 - x^2 + m x + 15)$$

$$= \frac{12(2x - m)}{(x^2 - m x - 3)^2}$$

إذن : إشارة $f'_m(x)$ هي إشارة $2x - m$ لأن المقام موجب .

x	$-\infty$	x_1	$m/2$	x_2	$+\infty$
$2x - m$		-	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f_m :

x	$-\infty$	$\frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2}$	$\frac{m}{2}$	$\frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	$+\infty$	$f_m(m/2)$	$+\infty$	1

$$f_m\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{\frac{m^2}{4} - m\left(\frac{m}{2}\right) - 15}{\frac{m^2}{4} - m\left(\frac{m}{2}\right) - 3} = \frac{\frac{m^2 - 2m^2 - 60}{4}}{\frac{m^2 - 2m^2 - 12}{4}} = \frac{m^2 - 2m^2 - 60}{m^2 - 2m^2 - 12}$$

2 - من جدول تغيرات الدالة f_m نستنتج معادلات المستقيمات المقاربة كما يلي :

المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{m - \sqrt{m^2 + 12}}{2}$ مقارب عمودي .

المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{m + \sqrt{m^2 + 12}}{2}$ مقارب عمودي .

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

3 - لتكن $M(\alpha; \beta)$ نقطة من المستوي .

تكون M تنتمي إلى كل للمنحنيات (C_m) إذا و فقط إذا تحقق أن :

من أجل كل m من $\mathbb{R}$ فإن : $f_m(\alpha) = \beta$

أي من أجل كل m من $\mathbb{R}$: $\frac{\alpha^2 - m\alpha - 15}{\alpha^2 - m\alpha - 3} = \beta$

$$\alpha^2 - m\alpha - 15 = \beta(\alpha^2 - m\alpha - 3) \quad : \text{أي من أجل كل } m \text{ من IR}$$

$$\alpha^2 - \beta\alpha^2 - 15 + 3\beta + m(\alpha\beta - \alpha) = 0 \quad : \text{أي من أجل كل } m \text{ من IR}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta\alpha^2 - 15 + 3\beta = 0 & \dots\dots\dots(1) \\ \alpha\beta - \alpha = 0 & \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$\text{المعادلة (2) تكافئ } \alpha(\beta - 1) = 0 \text{ أي } (\alpha = 0 \text{ أو } \beta = 1)$$

$$\checkmark \text{ من أجل } \alpha = 0 \text{ المعادلة (1) تصبح : } -15 + 3\beta = 0 \text{ أي } \beta = 5$$

$$\checkmark \text{ من أجل } \beta = 1 \text{ المعادلة (1) تصبح : } -15 + 3 = 0 \text{ مستحيل .}$$

$$\text{نتيجة : } \alpha = 0 \text{ و } \beta = 5$$

خلاصة : توجد نقطة وحيدة M احداثياتها M(0 ; 5) تنتمي إلى كل المنحنيات (C_m) . (من أجل أي قيمة لـ m) .
4 - تكون النقطة ذات الإحداثيات (4 ; 1) تنتمي إلى المنحنى (C_m) إذا و فقط إذا كان f_m(4) = 1

$$\begin{aligned} \frac{16 - 4m - 15}{16 - 4m - 3} = 1 & \Leftrightarrow 16 - 4m - 15 = 16 - 4m - 3 \\ & \Leftrightarrow -15 = -3 \text{ مستحيل} \end{aligned}$$

إذن : لا يوجد أي منحنى يشمل النقطة ذات الإحداثيات (4 ; 1)

ملاحظة : يمكن الإجابة على هذا السؤال بملاحظة جدول تغيرات الدالة f_m

حيث f_m(x) لا يأخذ أبدا القيمة 1 مهما كان العدد الحقيقي m .

التمرين 3

نضع كرة ذات نصف القطر R داخل مخروط دوراني قياسي نصف زاوية رأسه هي θ حيث 0 < θ < π/2 نفرض أن الكرة و المخروط الدوراني متماسان و نقبل أن حجمه v يحقق العلاقة :

$$v = \frac{\pi R^3 (1 + \sin \theta)^2}{3 \sin \theta (1 - \sin \theta)}$$

1 - برهن أن الارتفاع h و الحجم v للمخروط الدوراني يحققان العلاقة :

$$v = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \theta$$

$$2 - \text{أدرس تغيرات الدالة } f \text{ المعرفة على }]0 ; 1[\text{ بـ } f(x) = \frac{(1+x)^2}{x(1-x)}$$

3 - استنتج أنه يوجد مخروط دوراني له أصغر حجم ممكن نرمز له بـ v₀ من أجل قيس نصف زاوية رأسه θ₀ يطلب تعيين كل من θ₀ و v₀ .

4 - أحسب الارتفاع h₀ للمخروط الدوراني الذي له أصغر حجم .

الحل 3

$$1 - \text{لدينا } v = \frac{1}{3} Sh \text{ حيث } \left. \begin{array}{l} S : \text{مساحة قاعدة المخروط الدوراني .} \\ h : \text{ارتفاع المخروط الدوراني .} \end{array} \right\}$$

و حسب الشكل فإن : S = π AB² حيث [AB] هو نصف قطر قاعدة المخروط .

$$\text{من جهة أخرى لدينا : } \tan \theta = \frac{AB}{h} \text{ لأن المثلث OAB قائم في A}$$

$$\text{أي : } AB = h \tan \theta$$

$$\text{منه : } S = \pi (h \tan \theta)^2 \text{ أي } S = \pi h^2 \tan^2 \theta$$

$$\text{إذن : } v = \frac{1}{3} (\pi h^2 \tan^2 \theta) \times h$$

$$\text{أي : } v = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \theta \text{ و هو المطلوب .}$$

2 - تغيرات الدالة f على المجال]0 ; 1[

f دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها و خاصة على]0 ; 1[و دالتها المشتقة

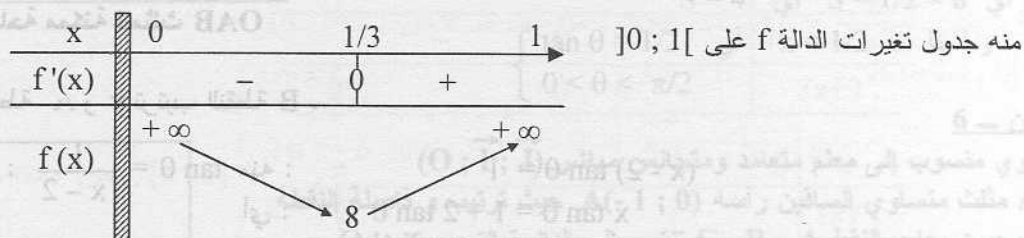
$$f'(x) = \frac{2(1+x)x(1-x) - (1-2x)(1+x)^2}{[x(1-x)]^2}$$

$$= (1+x) \times \frac{2x - 2x^2 - (1+x - 2x - 2x^2)}{[x(1-x)]^2}$$

$$= (1+x) \times \frac{3x-1}{[x(1-x)]^2}$$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1+x)(3x-1)$ لأن المقام موجب

x	$-\infty$	-1	$1/3$	$+\infty$
$1+x$	-	0	+	
$3x-1$		-	0	+
$(1+x)(3x-1)$	+	0	-	+



3 - لاحظ أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى محلية على المجال $]0; 1[$ و هي 8 من أجل $x = 1/3$

إذا وضعنا $x = \sin \theta$ نحصل على $v = \frac{\pi R^3}{3} \times \frac{(1+x)^2}{x(1-x)}$ حيث $0 < x < 1$ لأن $0 < \theta < \pi/2$

$$v = \frac{\pi R^3}{3} f(x) \quad \text{أي}$$

منه : يكون v أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كان $f(x)$ أصغر ما يمكن

و حسب تغيرات الدالة f فإن هذا محقق من أجل $x = 1/3$

أي : $\sin \theta = 1/3$ إذن θ_0 هي الزاوية التي تحقق $\left. \begin{array}{l} 0 < \theta_0 < \pi/2 \\ \sin \theta_0 = 1/3 \end{array} \right\}$

و في هذه الحالة لدينا $v_0 = \frac{\pi R^3}{3} f(1/3)$ أي $v_0 = \frac{8}{3} \pi R^3$

$$4 - \text{ حسب العلاقة } v = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \theta \quad \text{فإن} \quad v_0 = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \theta_0$$

$$\frac{8 \pi R^3}{3} = \frac{\pi h_0^3}{3} \tan^2 \theta_0 \quad \text{أي :}$$

$$8 R^3 = h_0^3 \tan^2 \theta_0 \quad \text{أي :}$$

$$(1) \dots \dots \dots h_0^3 = \frac{8 R^3}{\tan^2 \theta_0} \quad \text{أي :}$$

لكن $\sin \theta_0 = 1/3$ إذن : $\sin^2 \theta_0 = 1/9$

$$\text{و لدينا : } \cos^2 \theta_0 = 1 - \sin^2 \theta_0 \quad \text{أي} \quad \cos^2 \theta_0 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\text{إذن : } \tan^2 \theta_0 = \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_0} = \frac{1/9}{8/9} = \frac{1}{8} \quad \text{أي}$$

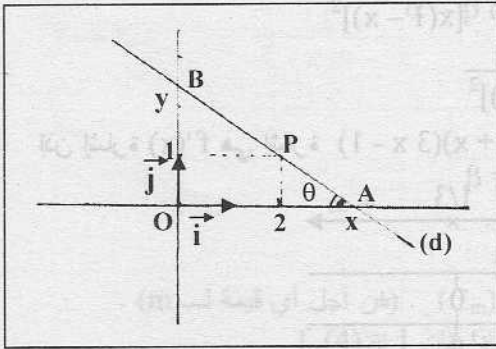
منه العلاقة (1) تصبح :

$$h_0^3 = 64 R^3 \quad \text{أي :} \quad h_0^3 = \frac{8 R^3}{1/8}$$

$$h_0^3 = (4 R)^3 \quad \text{أي :}$$

منه : $h_0 = 4 R$ و هو المطلوب .

التمرين 5 -



المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

نعتبر النقطة p ذات الإحداثيات $(2; 1)$

(d) مستقيم يشمل p ويقطع كل من (ox) و (oy) في النقطتين A و B على الترتيب حيث ترتيب النقطة B يكون أكبر من 1

نضع θ القيس بالراديان للزاوية $\widehat{OAB}$ حيث $0 < \theta < \pi/2$

1 - أحسب بدلالة $\tan \theta$ كل من فاصلة النقطة A و ترتيب النقطة B

2 - استنتج عبارة مساحة المثلث OAB بدلالة $\tan \theta$

لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = (2 + \frac{1}{x})(1 + 2x)$

3 - أدرس تغيرات الدالة f

4 - استنتج أصغر مساحة ممكنة للمثلث OAB

الحل - 5

1 - لتكن x فاصلة النقطة A و y ترتيب النقطة B .

$$\begin{aligned} (x-2) \tan \theta &= 1 & \text{حسب الشكل لدينا : } \tan \theta &= \frac{1}{x-2} \text{ منه :} \\ x \tan \theta &= 1 + 2 \tan \theta & \text{أي :} \end{aligned}$$

$$\text{أي : } x = \frac{1}{\tan \theta} + 2 \text{ و هو المطلوب .}$$

$$\begin{aligned} 2 \tan \theta &= y - 1 & \text{حسب الشكل دائما : } \tan \theta &= \frac{y-1}{2} \text{ منه :} \\ y &= 1 + 2 \tan \theta & \text{أي :} \end{aligned}$$

$$2 - \text{مساحة المثلث OAB : } S = \frac{1}{2} x y \text{ أي } S = \frac{1}{2} (2 + \frac{1}{\tan \theta})(1 + 2 \tan \theta)$$

3 - تغيرات الدالة f :

f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و خاصة على $]0; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} (1 + 2x) + 2(2 + \frac{1}{x}) \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 4 + \frac{2}{x} \\ &= 4 - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{من إشارة } 4x^2 - 1 \text{ لأن المقام موجب .}$$

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/2$	$+\infty$	
$4x^2 - 1$	+	0	-	0	+

جدول تغيرات الدالة f على $]0; +\infty[$:

x	0	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f(x)	$+\infty$	8	$+\infty$

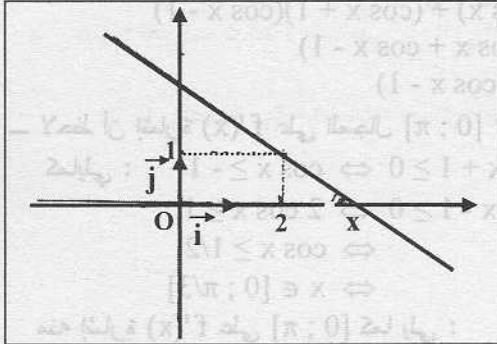
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + \frac{1}{x})(1 + 2x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{x})(1 + 2x) = +\infty$$

$$f(1/2) = (2 + 2)(1 + 1) = 8$$

4 - حسب السؤال (2) لدينا مساحة المثلث OAB هي $S = \frac{1}{2} (2 + \frac{1}{\tan \theta}) (1 + 2 \tan \theta)$

نضع $\tan \theta = x$ حيث $0 < \theta < \pi/2$ إذن $\tan \theta > 0$ أي : $x \in]0; +\infty[$



منه : عبارة المساحة S تصبح : $S = \frac{1}{2} (2 + \frac{1}{x}) (1 + 2x)$ حيث $x = \tan \theta$

أي : $S = \frac{1}{2} f(x)$

نتيجة : بما أن الدالة f تقبل قيمة حدية محلية صغرى على

المجال $]0; +\infty[$ و هي 8 من أجل $x = 1/2$ فإن المساحة

تكون أصغر ما يمكن من أجل $x = 1/2$ و $f(x) = 8$

أي $S = 1/2 \times 8$ أي $S = 4$

ولدينا $x = 1/2$ أي $\tan \theta = 1/2$ و $0 < \theta < \pi/2$

التمرين 6 -

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A(-1; 0) حيث ترتيب و فاصلة النقطة

B موجبين معا و النقطة A, B, C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O

و نصف قطرها 1 .

نسمي H المسقط العمودي للنقطة B على محور الفواصل .

ليكن α قياسا رئيسيا موجبا بالراديان للزاوية $(\vec{i}; \vec{OB})$

1 - عين إحداثيات النقطة B .

2 - عبر عن المسافتين BH و AH بدلالة α

3 - استنتج عبارة مساحة المثلث ABC بدلالة α

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; \pi]$ بـ $f(x) = \sin x - \cos x$

4 - برهن أن من أجل كل x من $[0; \pi]$: $f'(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$

5 - استنتج أن من أجل كل x من $[0; \pi]$: $f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$

6 - أدرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f على $[0; \pi]$

7 - برهن أنه توجد قيمة للعدد α التي من أجلها تكون مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن المطلوب تحديدها .

الحل - 6

1 - بما أن نصف قطر الدائرة هو 1 فإن يمكن اعتبارها دائرة مثلثية .

و عليه فاصلة النقطة B هو $\cos \alpha$ و ترتيبها هو $\sin \alpha$ لأن النقطة B تنتمي إلى الدائرة المثلثية أي $B(\cos \alpha; \sin \alpha)$

2 - حسب الشكل لدينا $AH = 1 + OH$ منه $AH = 1 + \cos \alpha$

و BH هو ترتيب النقطة B أي $BH = \sin \alpha$

3 - لاحظ أن مساحة المثلث ABC هي ضعف مساحة المثلث AHB

مساحة المثلث AHB هي : $\frac{1}{2} AH \times HB$ (قائم الزاوية في H)

أي : مساحة المثلث ABC هي : $S = 2 \times (\frac{1}{2} AH \times HB)$

أي : $S = AH \times HB$

منه : $S = \sin \alpha (1 + \cos \alpha)$ و هو المطلوب

4 - الدالة f قابلة للاشتقاق على IR و خاصة على $[0; \pi]$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \cos x (1 + \cos x) - \sin x \times \sin x$$

$$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$= \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x + \cos x - 1$$

وهو المطلوب

5 - لدينا من أجل كل x من $[0; \pi]$: $f'(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$ (1)

$$\begin{aligned} &= (\cos^2 x + \cos x) + (\cos^2 x - 1) \\ &= \cos x (1 + \cos x) + (\cos x + 1)(\cos x - 1) \\ &= (\cos x + 1)(\cos x + \cos x - 1) \\ &= (\cos x + 1)(2 \cos x - 1) \end{aligned}$$

وهو المطلوب

6 - لاحظ أن إشارة $f'(x)$ على المجال $[0; \pi]$ هي إشارة $(\cos x + 1)(2 \cos x - 1)$

كما يلي : $\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -1$ وهذا محقق دائما .

$$2 \cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \cos x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x \geq 1/2$$

$$\Leftrightarrow x \in [0; \pi/3]$$

منه إشارة $f'(x)$ على $[0; \pi]$ كما يلي :

x	0	$\pi/3$	π
$\cos x + 1$	2	+	0
$2 \cos x - 1$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

x	0	$\pi/3$	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

منه جدول تغيرات الدالة f على $[0; \pi]$:

$$f(0) = \sin 0(1 + \cos 0) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$f(\pi) = \sin \pi (1 + \cos \pi) = 0$$

7 - حسب السؤال (3) لدينا مساحة المثلث ABC هي : $S = \sin \alpha (1 + \cos \alpha)$

بوضع $x = \alpha$ نحصل على $S = \sin x (1 + \cos x)$ مع $0 < x < \pi$

$$S = f(x)$$

أي :

و حسب السؤال (6) فإن الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى محلية على المجال $[0; \pi]$ قيمتها $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

و ذلك من أجل $x = \pi/3$

إذن : مساحة المثلث ABC تكون أكبر ما يمكن من أجل $\alpha = \pi/3$ و نقدر في هذه الحالة بـ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

التمرين 7

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$: $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)}$

نسعى (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 - برهن أن يوجد عدداً حقيقين a و b حيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-2\}$:

$$f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2}$$

2 - أدرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

3 - أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

نسعى (γ) القطع المكافئ ذوالمعادلة $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ حيث $x \neq -2$

P و M نقطتان من (γ) و (C) على الترتيب لهما نفس الفاصلة x

4 - عين مركبتي الشعاع $\vec{PM}$

5 - استنتج أن لما x يؤول إلى $(-\infty)$ أو $(+\infty)$ فإن المسافة PM تؤول إلى 0 ثم فسر هندسيا هذه النتيجة .

6 - أرسم كل من (γ) و (C)

الحل - 7

$$1 - \text{ليكن } x \in \mathbb{R} - \{-2\} : a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2} = \frac{(ax^2 - 2ax + a)(x+2) + b}{x+2}$$

$$= \frac{ax^3 + 2ax^2 - 2ax^2 - 4ax + ax + 2a + b}{x+2}$$

$$= \frac{ax^3 - 3ax + 2a + b}{x+2}$$

$$= \frac{2(ax^3 - 3ax + 2a + b)}{2(x+2)}$$

$$= \frac{2ax^3 - 6ax + 4a + 2b}{2(x+2)}$$

نتيجة : يكون $f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 6a = 3 \\ 4a + 2b = -6 \end{cases} \quad \text{أي : } \begin{cases} a = 1/2 \\ 2b = -6 - 4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/2 \\ 2b = -6 - 2 \end{cases} \quad \text{أي : } \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/2 \\ b = -4 \end{cases} \quad \text{أي : } \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -4 \end{cases}$$

أخيرا : من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ فإن : $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2}$

$$2 - \text{النهايات : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{2}(-2-1)^2 - \frac{4}{x+2} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{9}{2} - \frac{4}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{2}(-2-1)^2 - \frac{4}{x+2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{9}{2} - \frac{4}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2} = +\infty$$

3 - التغيرات : الدالة f ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 3)(2x + 4) - 2(x^3 - 3x - 6)}{[2(x+2)]^2}$$

$$= \frac{6x^3 + 12x^2 - 6x - 12 - 2x^3 + 6x + 12}{4(x+2)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 12x^2}{4(x+2)^2}$$

$$= \frac{4x^2(x+3)}{4(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2(x+3)$ لأن المقام موجب كمايلي :

x	$-\infty$	-3	-2	0	$+\infty$
x^2		+	+	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+
$x^2(x+3)$	-	0	+	0	+

		منه إشارة $f'(x)$ على D_f :					
x	$-\infty$	-3	-2	0	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$	

		إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :					
x	$-\infty$	-3	-2	0	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	12	$+\infty$	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$	

$$f(-3) = \frac{-27 + 9 - 6}{-2} = 12$$

$$f(0) = -6/4 = -3/2$$

4 - $P \in (C)$ إذن : احداثيات P هي $(x; f(x))$ أي : $P(x; \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2})$ حيث $x \neq -2$

$M \in (\gamma)$ إذن : احداثيات M هي $M(x; \frac{1}{2}(x-1))$ حيث $x \neq -2$

$$\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} x-x \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 - [\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2}] \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{x+2} \end{pmatrix} \text{ مع } x \neq -2 \text{ أي :}$$

5 - لما x يؤول إلى $-\infty$ أو $+\infty$ لدينا $\frac{4}{x+2}$ يؤول إلى 0 منه مركبات الشعاع $\overrightarrow{PM}$ هي $\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ حيث α يؤول إلى 0

و عليه $PM = \sqrt{0 + \alpha^2}$ أي $PM = \alpha$ مع α يؤول إلى 0

إذن : لما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ فإن المسافة PM تؤول إلى 0

أي : كلما اقترب العدد : من $+\infty$ أو $-\infty$ فإن النقطة P تقترب أكثر فأكثر من النقطة M لأن المسافة بينهما تقترب من 0 و هندسياً فإن المنحنى (C) يقترب من المنحنى (γ) لما x يقترب من $+\infty$ أو $-\infty$.

6 - **الإنشاء :** لإنشاء المنحنيين (C) و (γ) ندرس الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة إلى (γ) كما يلي :

$$f(x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{x+2} - \frac{1}{2}(x-1)^2 = \frac{-4}{x+2}$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$\frac{-4}{x+2}$	$+$		$-$

لما $x \in]-\infty; -2[$ (C) فوق (γ)

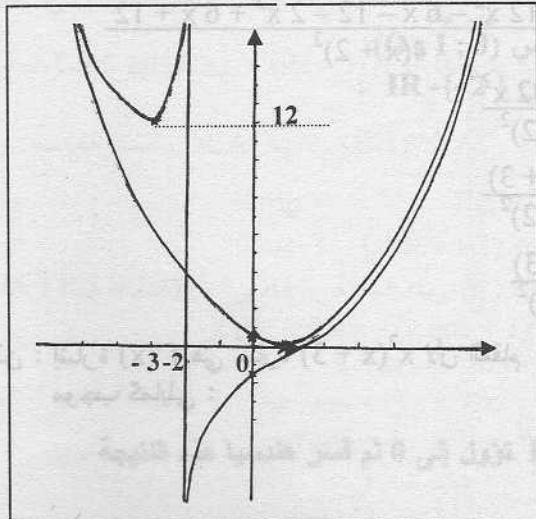
لما $x \in]-2; +\infty[$ (C) تحت (γ)

لندرس تغيرات الدالة $g : x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)^2$

$$g'(x) = x - 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

منه الإنشاء كما يلي :



التمرين - 8

λ عدد حقيقي موجب تماما . f_λ دالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $I =]0; +\infty[$ $f_\lambda(x) = x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3}$ و (C_λ) منحناها في معلم .

- 1 - أدرس نهايتي الدالة f_λ على حدود المجال I .
- 2 - برهن أن يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_λ) يطلب معادلته ووضعيته النسبية بالنسبة إلى المنحنى (C_λ) .
- 3 - أدرس تغيرات الدالة f_λ على المجال I .
- 4 - برهن أن الدالة f_λ تقبل قيمة حدية تبلغها عند عدد حقيقي x_λ .
- 5 - برهن أن مجموعة النقطة P_λ محتواة في المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{16}{9}x$

الحل - 8

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\lambda}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^2}{x^3} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} = +\infty - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2}{x^3} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} = +\infty$$

$$2 - \text{ لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f_\lambda(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3}$$

$$= 0 \quad \text{إذن المستقيم ذو المعادلة } y = x \text{ مقارب مائل للمنحنى } (C_\lambda) \text{ في جوار } +\infty$$

الوضعية النسبية لـ (C_λ) و المستقيم المقارب المائل :

$$f_\lambda(x) - x = \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3}$$

بما أن $\lambda > 0$ و $x \in]0; +\infty[$

$$\text{فإن : } \frac{2\lambda}{x} + \frac{\lambda^2}{x^3} > 0$$

أي : المنحنى (C_λ) يقع دائما فوق المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y = x$ التغيرات :

f_λ دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها خاصة على المجال $]0; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'_\lambda(x) = 1 + \frac{-2\lambda}{x^2} + \frac{-3\lambda^2 x^2}{x^6}$$

$$= 1 + \frac{-2\lambda}{x^2} + \frac{-3\lambda^2}{x^4}$$

$$= \frac{x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2}{x^4}$$

إذن إشارة $f'_\lambda(x)$ هي إشارة $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2$ لأن المقام موجب لندرس إذن إشارة $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2$ كمايلي :
نضع $\alpha = x^2$ حيث $\alpha \geq 0$

إذن : ندرس إشارة كثير الحدود $\alpha^2 - 2\lambda\alpha - 3\lambda^2$ ذات المجهول α الموجب .

$$\Delta = 4\lambda^2 + 12\lambda^2 = 16\lambda^2 = (4\lambda)^2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{2\lambda - 4\lambda}{2} = \frac{-2\lambda}{2} = -\lambda \\ \alpha_2 = \frac{2\lambda + 4\lambda}{2} = \frac{6\lambda}{2} = 3\lambda \end{cases}$$

نتيجة :

$$\alpha^2 - 2\lambda\alpha - 3\lambda^2 = (\alpha + \lambda)(\alpha - 3\lambda)$$

منه :

$$x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2 = (x^2 + \lambda)(x^2 - 3\lambda)$$

إذن إشارة $x^4 - 2\lambda x^2 - 3\lambda^2$ هي إشارة الجداء $(x^2 + \lambda)(x^2 - 3\lambda)$ كما يلي :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3\lambda}$	0	$\sqrt{3\lambda}$	$+\infty$
$\lambda > 0$ مع $x^2 + \lambda$			+		
$x^2 - 3\lambda$	+	0	-	0	+
الجداء	+	0	-	0	+

منه جدول إشارة $f'_\lambda(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي :

x	0	$\sqrt{3\lambda}$	$+\infty$
$f'_\lambda(x)$	-	0	+

إذن : جدول تغيرات الدالة f_λ كما يلي :

x	0	$\sqrt{3\lambda}$	$+\infty$
$f'_\lambda(x)$	-	0	+
$f_\lambda(x)$	$+\infty$	$f_\lambda(\sqrt{3\lambda})$	$+\infty$

$$f_\lambda(\sqrt{3\lambda}) = \sqrt{3\lambda} + \frac{2\lambda}{\sqrt{3\lambda}} + \frac{\lambda^2}{3\lambda\sqrt{3\lambda}} = \sqrt{3\lambda} + \sqrt{\frac{4}{3}\lambda} + \sqrt{\frac{1}{27}\lambda}$$

4 - حسب جدول التغيرات فإن الدالة f_λ تقبل قيمة حدية صغرى محلية هي $f_\lambda(\sqrt{3\lambda})$ عند $x_\lambda = \sqrt{3\lambda}$ 5 - لتكن (γ) مجموعة النقط P_λ ذات الفاصلة $x_\lambda \neq 0$

$$P_\lambda(\sqrt{3\lambda}; \sqrt{3\lambda} + \sqrt{\frac{4}{3}\lambda} + \sqrt{\frac{1}{27}\lambda}) \quad \text{أي}$$

لاحظ أن من أجل كل λ موجب تماما فإن $\sqrt{3\lambda} \neq 0$ إذن $x_\lambda \neq 0$

منه :

$$\frac{y_\lambda}{x_\lambda} = \frac{\sqrt{3\lambda} + \sqrt{\frac{4}{3}\lambda} + \sqrt{\frac{1}{27}\lambda}}{\sqrt{3\lambda}}$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{3\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3\lambda}}$$

$$= 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{9+6+1}{9}$$

$$= \frac{16}{9}$$

$$\text{نتيجة : } \frac{y_\lambda}{x_\lambda} = \frac{16}{9} \quad \text{منه} \quad y_\lambda = \frac{16}{9} x_\lambda$$

إذن : مجموعة النقط $P_\lambda(x; y)$ حيث $x = x_\lambda$ تحقق المعادلة $y = \frac{16}{9}x$ من أجل $x > 0$ لأن $\sqrt{3\lambda} > 0$ إذن : المجموعة (γ) جزء محتواة في المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{16}{9}x$

التمرين - 9

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ نسمي (C) منحناها في معلم .

- 1 - أدرس تغيرات الدالة f .
- 2 - عين الدالة المشتقة الثانية للدالة f ثم أدرس إشارتها.
- 3 - أكتب معادلة مماس المذئني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
- لتكن g الدالة المعرفة بـ $g(x) = f(x) - x$
- 4 - بين أن يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[-2; 1]$ يحقق $g(\alpha) = 0$ ثم استنتج عدد نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$
- 5 - لتكن (γ) مجموعة النقط $M(y; x)$ من المستوي حيث $x \in \mathbb{R}$ و $y = f(x)$ أوجد طريقة هندسية لإنشاء مجموعة النقط (γ) باستعمال المنحنى (C)
- 6 - أنشئ كل من (C) و (γ) في نفس المعلم.

الحل - 9

1 - f معرفة على $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $x^2 + 1 > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= 2 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

إذن : $\left. \begin{array}{l} \text{المستقيم ذو المعادلة } y = 0 \text{ مقارب للمنحنى (C) في جوار } -\infty \\ \text{المستقيم ذو المعادلة } y = 2 \text{ مقارب للمنحنى (C) في جوار } +\infty \end{array} \right\}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \times x}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

إذن : $f'(x) > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$
منه : جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		2

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

لدينا :

$$\sqrt{\alpha} = \alpha^{1/2} \quad \text{فإن} \quad \alpha > 0 \quad \text{لأن من أجل} \quad = \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 1)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

$$= (x^2 + 1)^{-3/2}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2}(2x)(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}-1}$$

منه :

$$= -3x(x^2 + 1)^{-5/2}$$

$$= \frac{-3x}{(x^2 + 1)^{5/2}}$$

$$= \frac{-3x}{(x^2 + 1)^2 \times \sqrt{x^2 + 1}}$$

منه : إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-3x$ لأن $(x^2 + 1)^2 \sqrt{x^2 + 1} > 0$ كمايلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-3x$	+	0	-

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

نتيجة : إشارة $f''(x)$ على $\mathbb{R}$:

3 - معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 نكتب من الشكل : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{1\sqrt{1}} = 1$$

حيث

منه المعادلة هي : $y = x + 1$

4 - لتكن g الدالة المعرفة بـ $g(x) = f(x) - x$

الدالة g هي مجموع الدالتين $x \mapsto -x$ و $x \mapsto f(x)$ المستمرتين على $\mathbb{R}$

إذن : g مستمرة على $\mathbb{R}$ وخاصة على $]1; 2[$

$$g(1) = f(1) - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+1}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$$

$$g(2) = f(2) - 2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{4+1}} - 2 = -1 + \frac{2}{\sqrt{5}} < 0$$

نتيجة : g مستمرة على $]1; 2[$

$$g(1) \times g(2) < 0$$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α من المجال $]1; 2[$ حيث $g(\alpha) = 0$

هل α وحيد ؟

لندرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]1; 2[$

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\left. \begin{aligned} x^2+1 &> 1 \\ \sqrt{x^2+1} &> 1 \end{aligned} \right\} \text{ لاحظ أن :}$$

$$(x^2+1)\sqrt{x^2+1} > 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 1 \quad \text{أي :}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0 \quad \text{منه :}$$

$$g'(x) < 0 \quad \text{أي :}$$

منه : g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ وخاصة على $]1; 2[$

إذن : العدد α وحيد .

خلاصة : يوجد α وحيد من المجال $]1; 2[$ حيث $g(\alpha) = 0$ و عليه فإن المعادلة $f(x) - x = 0$ أي $f(x) = x$ تقبل حلا

وحيدا α حيث $1 < \alpha < 2$

إذن : منحنى الدالة f يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في نقطة وحيدة إحداثياتها $(\alpha; \alpha)$ حيث $1 < \alpha < 2$

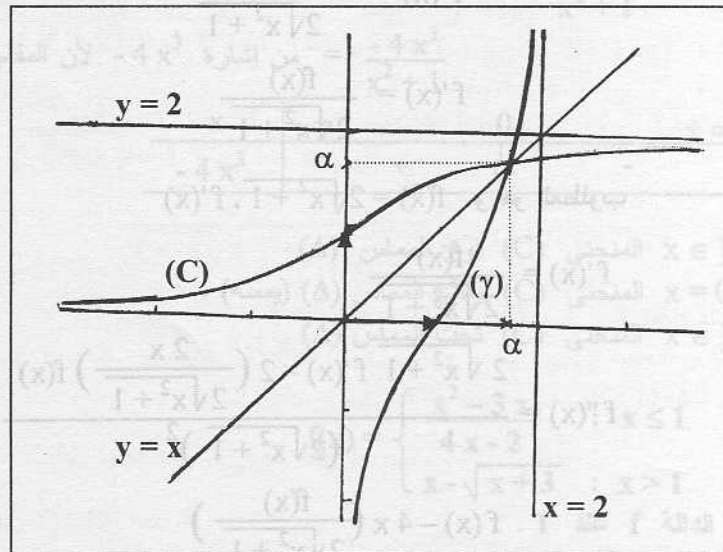
5 - لتكن $M(y; x)$ تنتمي إلى (γ)

إذن $M'(x; y)$ تنتمي إلى (C) لأن $y = f(x)$

نلاحظ أن النقطة M هي نظيرة النقطة M' بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

إذن : لإنشاء المجموعة (γ) يكفي إنشاء نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (لاحظ الشكل)

الإنشاء :



التمرين - 10

f دالة معرفة بـ $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

1 - عين D مجموعة تعريف الدالة f .

2 - تحقق أن : $f(x) = 2 \cdot f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

3 - استنتج أن : $4(x^2 + 1)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0$

الحل - 10

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \geq 0 \dots\dots\dots (1) \\ x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0 \dots\dots (2) \end{cases}$$

المتراجحة (1) دائما محققة

المترابحة (2) تكافئ $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ إذن : نميز حالتين :

الحالة الأولى : $x > 0$

إذن : $-x < 0$ منه المترابحة (2) دائما محققة لأن $\sqrt{x^2+1} > 0$

الحالة الثانية : $x \leq 0$

إذن : $-x \geq 0$ منه المترابحة (2) تكافئ $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ حيث $-x \geq 0$

تكافئ $x^2+1 \geq x^2$

تكافئ $1 \geq 0$ و هذا محقق دائما

خلاصة : المترابحتين (1) و (2) محقتين من أجل $x \in \mathbb{R}$

إذن : $D = \mathbb{R}$

2 - f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}}$$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}}$$

منه :

$$f'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}}$$

منه :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}$$

منه :

$$f'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x^2+1}}$$

أي :

$$f'(x) = 2\sqrt{x^2+1} \cdot f'(x) \text{ و هو المطلوب}$$

أي :

$$f'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x^2+1}} \quad 3 - \text{ حسب السؤال (2) لدينا :}$$

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} f'(x) - 2 \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \right) f(x)}{(2\sqrt{x^2+1})^2}$$

منه :

$$f''(x) = \frac{f(x) - 4x \left(\frac{f(x)}{2\sqrt{x^2+1}} \right)}{4(x^2+1)}$$

أي :

$$f''(x) = \frac{f(x) - 4x f'(x)}{4(x^2+1)}$$

أي :

$$4(x^2+1) f''(x) = f(x) - 4x f'(x)$$

أي :

$$4(x^2+1) f''(x) + 4x f'(x) - f(x) = 0 \text{ و هو المطلوب}$$

أي :

التمرين 11

f دالة معرفة بـ $f(x) = \frac{3x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 + 1}$ حيث α و β عددين حقيقيين .

نسمة (C) منحنى الدالة ؟ في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{I}; \vec{J})$

1 - عين قيم α و β حتى يكون المستقيم ذو المعادلة $y = 4x + 3$ مماساً لـ (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
ولیکن (Δ) هذا المماس .

2 - أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ)

الحل - 11

1 - معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 تكتب من الشكل :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad \text{أي} \quad y = f'(0)x + f(0)$$

$$\begin{cases} f'(0) = 4 \dots\dots\dots (1) \\ f(0) = 3 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{نحصل على : } y = 4x + 3 \text{ مع المعادلة}$$

$$f(0) = 3 \quad \text{أي} \quad \frac{3(0) + \alpha(0) + \beta}{0 + 1} = 3 \quad \text{أي} \quad \beta = 3 \quad \text{منه} \quad f(x) = \frac{3x^2 + \alpha x + 3}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(6x + \alpha)(x^2 + 1) - 2x(3x^2 + \alpha x + 3)}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$f'(0) = \frac{(6(0) + \alpha)(0 + 1) - 0}{(0 + 1)^2} = \alpha \quad \text{منه :}$$

$$\alpha = 4 \quad \text{إذن : } f'(0) = 4 \quad \text{يكافئ}$$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} \quad \text{إذن : } \beta = 3 \quad \text{و} \quad \alpha = 4$$

2 - الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ) :

$$\begin{aligned} f(x) - (4x + 3) &= \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1} - (4x + 3) \\ &= \frac{3x^2 + 4x + 3 - 4x^3 - 4x - 3x^2 - 3}{x^2 + 1} \\ &= \frac{-4x^3}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{-4x^3}{x^2 + 1} \quad \text{من إشارة } -4x^3 \quad \text{لأن المقام موجب}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-4x^3$	+	0	-

خلاصة : لما $x \in]-\infty; 0[$ المنحنى (C) فوق المماس (Δ)

لما $x = 0$ المنحنى (C) يقطع المماس (Δ) (يمسه) .

لما $x \in]0; +\infty[$ المنحنى (C) تحت المماس (Δ)

التمرين - 12

$$f \text{ دالة معرفة كمايلي : } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x}{4x - 2} & : x \leq 1 \\ x - \sqrt{x + 3} & : x > 1 \end{cases}$$

1 - أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 .

2 - فسر هندسيا نتائج السؤال (1) .

الحل - 12

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{4x - 2} \quad \text{من أجل } x \leq 1 \quad \text{فإن}$$

$$f(1) = \frac{1 - 3}{4 - 2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 - 3x}{4x - 2} - (-1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 4x - 2}{4x - 2} \times \frac{1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{4x - 2} \times \frac{1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{4x - 2} \times \frac{1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{4x - 2}$$

$$= \frac{1 + 2}{4 - 2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

من جهة أخرى :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x + 3} - (-1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1 - \sqrt{x + 3}}{x - 1} \times \frac{x + 1 + \sqrt{x + 3}}{x + 1 + \sqrt{x + 3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)^2 - (\sqrt{x + 3})^2}{(x - 1)(x + 1 + \sqrt{x + 3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 1 - x - 3}{(x - 1)(x + 1 + \sqrt{x + 3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)(x + 1 + \sqrt{x + 3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1 + \sqrt{x + 3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x + 1 + \sqrt{x + 3}}$$

$$= \frac{1 + 2}{1 + 1 + \sqrt{1 + 3}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

خلاصة : النسبة $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ لا تقبل نهاية لما x يؤول إلى 1

إذن : الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 1 .

2 - التفسير الهندسي :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}(x - 1) + f(1)$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - 1$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

و لدينا أيضا : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{4}$ إذن : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يمين النقطة ذات

الفاصلة 1 و معادلته

$$y = \frac{3}{4}(x - 1) + f(1)$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} - 1$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4} \quad \text{أي}$$

التمرين 13

f_m دالة عددية معرفة بـ $f_m(x) = x + 1 + \frac{4}{(x+m)^2}$ حيث m وسيط حقيقي .

نسمي (C_m) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{I}; \vec{J})$

1 - لتكن Q نقطة من المستوي إحداثياتها $(1; 3)$. ما هو عدد المنحنيات (C_m) التي تمر بالنقطة Q ؟
يطلب تعيين قيم m الموافقة .

2 - أثبت أن مماس المنحنى (C_m) عند النقطة ذات الفاصلة $(2-m)$ موازي لحامل محور الفواصل .

3 - أكتب معادلات مماسات المنحنى (C_m) عند النقطة Q .

الحل 13

أولا لنحدد مجموعة تعريف الدالة f_m كمايلي :

f_m معرفة من أجل $x+m \neq 0$ أي $x \neq -m$

منه : $D_{f_m} =]-\infty; -m[\cup]-m; +\infty[$

1 - يكون المنحنى (C_m) يشمل النقطة $Q(1; 3)$ إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} 1 \neq -m \\ 1 + 1 + \frac{4}{(1+m)^2} = 3 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x \neq -m \\ f_m(1) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq -1 \\ 2 + \frac{4}{(1+m)^2} = 3 \end{cases} \quad \text{أي} \quad (\alpha)$$

لنحل المعادلة (α) ذات المجهول m كمايلي :

$$(\alpha) \Leftrightarrow \frac{2(1+m)^2 + 4}{(1+m)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow 3(1+m)^2 = 2(1+m)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow (1+m)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+m = 2 \\ \text{أو} \\ 1+m = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & (\text{مقبول يختلف عن } -1) \\ \text{أو} \\ m = -3 & (\text{مقبول يختلف عن } -1) \end{cases}$$

نتيجة : يوجد منحنيين يشملان النقطة $Q(1; 3)$ وهما C_1 و C_{-3} أي من أجل $m = 1$ و $m = -3$

2 - الدالة f_m ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$f'_m(x) = 1 + \frac{-2 \times 4(x+m)}{(x+m)^4}$$

$$= 1 - \frac{8}{(x+m)^3}$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{x+m}\right)^3$$

$$f'_m(2-m) = 1 - \left(\frac{2}{2-m+m}\right)^3 = 1 - (1)^3 = 0 \quad \text{منه :}$$

إذن : معامل توجيه مماس المنحنى (C_m) عند النقطة ذات الفاصلة $(2-m)$ معدوم أي هذا المماس يوازي حامل محور

الفواصل و معادلته $y = f(2-m)$

3 - يوجد منحنيان فقط يشملان النقطة $Q(1; 3)$ كمايلي :

المنحنى الأول : (C_1) إذن $m = 1$

$$f'_1(x) = 1 - \left(\frac{2}{x+1}\right)^3 \quad \text{منه}$$

$$f_1'(1) = 1 - \left(\frac{2}{2}\right)^3 = 0 \quad \text{أي :}$$

منه : معادلة المماس للمنحنى (C_1) عند النقطة Q هي : $y = 3$ لأن $f_1'(1) = 0$ و $f_1(1) = 3$

المنحنى الثاني : (C_3) إذن $m = -3$

$$f_3'(x) = 1 - \left(\frac{2}{x-3}\right)^3 \quad \text{منه}$$

$$f_3'(1) = 1 - \left(\frac{2}{-2}\right)^3 = 1 + 1 = 2 \quad \text{أي :}$$

منه : معادلة المماس للمنحنى (C_3) عند النقطة Q هي : $y = 2(x-1) + 3$

أي من الشكل $y = 2x + 1$

التمرين 14

لتكن العلاقتين

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x} \dots\dots\dots (1) \\ x > 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

1 - عين قيم x حتى تكون العلاقتان (1) و (2) تعرفان دالة عددية f .

2 - أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3 - أثبت أن المنحنى (C) لممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة 2 يطلب معادلته .

4 - أحسب الدالة المشتقة للدالة f .

5 - أدرس تغيرات الدالة f .

6 - عين نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$

7 - أنشئ (C)

الحل - 14

$$1 - \text{ تكون العلاقتان (1) و (2) تعرفان دالة إذا و فقط إذا كان } \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-2; 2] \\ x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{أي :}$$

أي : $x \in]0; 2]$ و هو المطلوب .

2 -

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sqrt{4}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x}$$

$$= +\infty$$

$$3 - \text{ الدالة } f \text{ معرفة على يسار 2 و } f(2) = \frac{2 + \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x} - 1}{x - 2}$$

منه :

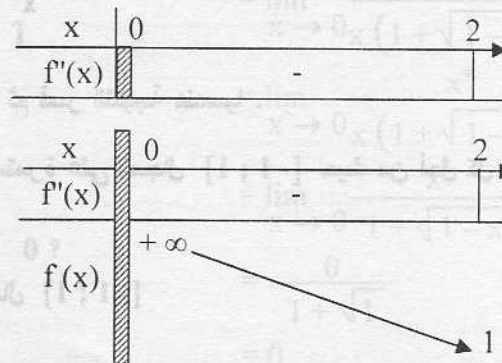
$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 + \sqrt{4 - x^2} - x}{x} \times \frac{1}{x - 2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x(x-2)} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x(x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x} + \frac{\sqrt{2-x} \times \sqrt{2+x}}{-x(2-x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x} - \frac{1}{x} \times \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x} \left(1 + \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \right) \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

إذن : المنحنى (C) يقبل نصف مماس شاقولي على يسار النقطة ذات الفاصلة 2 و معادلته $x = 2$
4 - f قابلة للاشتقاق على $]0; 2[$ و دالتها المشتقة :

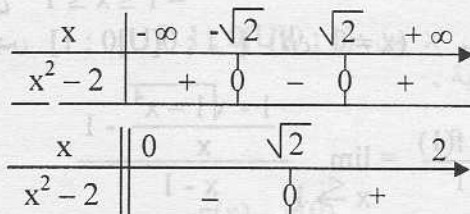
$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \times x - (2 + \sqrt{4-x^2})}{x^2} \\
 &= - \left(\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2 + \sqrt{4-x^2} \right) \\
 &= \frac{-x^2 - 2\sqrt{4-x^2} - \sqrt{4-x^2}^2}{x^2}
 \end{aligned}$$

إذن : من أجل كل x من $]0; 2[$ فإن $f'(x) < 0$ لأن $\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2 + \sqrt{4-x^2} > 0$
5 - التغيرات :



6 - تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$

$$\begin{aligned}
 f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{4-x^2}}{x} = x \\
 &\Leftrightarrow x^2 = 2 + \sqrt{4-x^2} \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2 = \sqrt{4-x^2}
 \end{aligned}$$



إذن : على المجال $]0; 2[$ لدينا :

نميز حالتين كمايلي :

الحالة (1) $0 < x < \sqrt{2}$: إذن $x^2 - 2 < 0$

منه : المعادلة $x^2 - 2 = \sqrt{4-x^2}$ لا تقبل حلول في R .

الحالة (2) $\sqrt{2} \leq x \leq 2$: إذن $x^2 - 2 \geq 0$

منه : المعادلة $x^2 - 2 = \sqrt{4-x^2}$ تكافئ $(x^2 - 2)^2 = 4 - x^2$

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 4 - x^2$$

$$x^4 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 3) = 0 \quad \text{أي :}$$

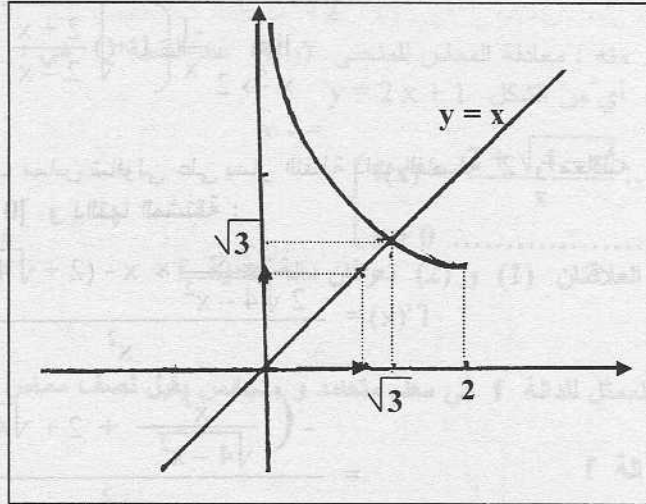
$$\text{أي : } x = 0 \text{ أو } x = \sqrt{3} \text{ أو } x = -\sqrt{3}$$

منه : المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $\sqrt{3}$ لأن الحلول الأخرى لا تنتمي إلى المجال $[\sqrt{2}; 2]$

خلاصة : المنحنى (C) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في نقطة وحيدة إحداثياتها $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

$$\text{تحقيق : } f(\sqrt{3}) = \frac{2 + \sqrt{4-3}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

الإثشاء :



التمرين - 15

لتكن f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^4}}{x}$ عيـن D مجموعة تعريف الدالة f

2 - أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

3 - أثبت أن يوجد دالة عددية g مستمرة على المجال $[-1; 1]$ حيث من أجل كل x من المجال $[-1; 0[\cup]0; 1]$ فإن $f(x) = g(x)$

4 - هل الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

5 - أرسم منحنى الدالة g على المجال $[-1; 1]$

الحل - 15

$$-1 \quad x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^4 \geq 0 \dots\dots\dots (1) \\ x \neq 0 \end{cases}$$

المتراجحة (1) تكافئ $(1+x^2)(1-x^2) \geq 0$

$$\text{تكافئ } 1 - x^2 \geq 0 \text{ لأن } 1 + x^2 > 0$$

$$\text{تكافئ } -1 \leq x \leq 1$$

نتيجة : f معرفة على المجال $[-1; 0[\cup]0; 1]$ (لأن $x \neq 0$)

- 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1 - \sqrt{1-x^4}}{x} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{1-x^4} - x}{x} \times \frac{1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x - \sqrt{1-x^4}}{x(x-1)} \times \frac{1 - x + \sqrt{1-x^4}}{1 - x + \sqrt{1-x^4}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + x^2 - 2x & x^2 - x \\
 \hline
 x^4 - x^3 & x^2 + x + 2 \\
 \hline
 x^3 + x^2 - 2x & \\
 \hline
 x^3 - x^2 & \\
 \hline
 2x^2 - 2x & \\
 \hline
 2x^2 - 2x & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2x + x^2 - 1 + x^4}{1x(x-1)(1-x+\sqrt{4-x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^2 - 2x}{x(x-1)(1-x+\sqrt{1-x^4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x^2+x+2)}{x(x-1)(1-x+\sqrt{1-x^4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+2}{1-x+\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1+1+2}{y} = +\infty$$

التفسير الهندسي : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس شاقولي على يسار النقطة ذات الفاصلة $x=1$ و معادلته $\begin{cases} x=1 \\ y \leq 1 \end{cases}$

3 - لنحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ كما يلي :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^4}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^4}}{x} \times \frac{1 + \sqrt{1-x^4}}{1 + \sqrt{1-x^4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + x^4}{x(1 + \sqrt{1-x^4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x(1 + \sqrt{1-x^4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 + \sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{0}{1 + \sqrt{1}}$$

$$= 0$$

إذن يمكن تعريف الدالة g كمايلي : $g(x) = \begin{cases} f(x) : x \in [-1; 0[\cup]0; 1] \\ 0 : x = 0 \end{cases}$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0$ منه : g مستمرة عند 0

إذن : g مستمرة على $[-1; 1]$ و من أجل كل x من $[-1; 0[\cup]0; 1]$ فإن $g(x) = f(x)$ هي الدالة المطلوبة .

4 - قابلية اشتقاق الدالة g عند 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^4}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^4}}{x^2} \times \frac{1 + \sqrt{1-x^4}}{1 + \sqrt{1-x^4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^4}}{x^2} \times \frac{1 + \sqrt{1-x^4}}{1 + \sqrt{1-x^4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + x^4}{x^2 (1 + \sqrt{1 - x^4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 - x^4}}$$

$$= 0$$

إذن : الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق $g'(0) = 0$

5- تغيرات الدالة g على المجال $[-1; 1]$

g قابلة للاشتقاق على المجال $] -1; 1[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ f'(x) & : x \in] -1; 0[\cup] 0; 1[\end{cases}$$

لنحسب إذن : $f'(x)$ كمايلي على المجال $] -1; 0[\cup] 0; 1[$

$$f'(x) = \frac{4x^3}{2\sqrt{1-x^4}} \times x - (1 - \sqrt{1-x^4})$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} - 1 + \sqrt{1-x^4}$$

$$= \frac{2x^4}{\sqrt{1-x^4}} - 1 + \sqrt{1-x^4}$$

$$= \frac{2x^4 - \sqrt{1-x^4} + 1 - x^4}{x^2 \sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{x^4 + 1 - \sqrt{1-x^4}}{x^2 \sqrt{1-x^4}}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^4 + 1 - \sqrt{1-x^4}$ كمايلي :

$$x^4 + 1 - \sqrt{1-x^4} \geq 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 \geq \sqrt{1-x^4}$$

$$x \in] -1; 0[\cup] 0; 1[\text{ مع } \Leftrightarrow x^8 + 2x^4 + 1 \geq 1 - x^4$$

$$\Leftrightarrow x^8 + 3x^4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^4(x^4 + 3) \geq 0$$

و هذا محقق دائما .

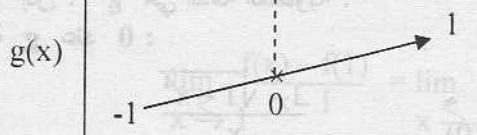
إذن : من أجل كل x من $] -1; 0[\cup] 0; 1[$ فإن $f'(x) > 0$ أي $g'(x) > 0$

منه : جدول إشارة $g'(x)$:

x	-1	0	1
$g'(x)$	+	0	+

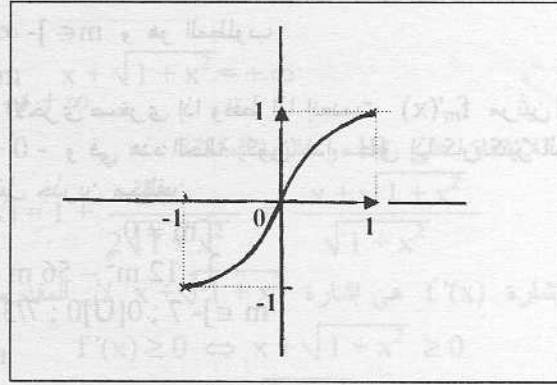
إذن : جدول تغيرات الدالة g كمايلي :

x	-1	0	1
$g'(x)$	+	0	+



$$g(-1) = \frac{1 - \sqrt{1-1}}{-1} = -1$$

$$g(1) = \frac{1 - \sqrt{1-1}}{1} = 1$$



التمرين - 16

f_m دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـ $f_m(x) = \frac{x^2 + (m-2)x - 10}{x^2 - 2x - 3}$ حيث m وسيط حقيقي غير معدوم

نسمي (C_m) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1 - عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تكون الدالة f_m متزايدة على كل مجال جزئي من مجموعة تعريفها .
- 2 - عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين محليتين أحدهما عظمى و الأخرى صغرى .
- 3 - أثبت أن كل المنحنيات (C_m) تمر من نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثياتها
- 4 - عين قيم m حتى يكون مماس المنحنى (C_m) عند النقطة A يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{-20}{9}x$

الحل - 16

1 - f_m دالة ناطقة إذن قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها . و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f_m'(x) &= \frac{(2x + m - 2)(x^2 - 2x - 3) - (2x - 2)(x^2 + (m - 2)x - 10)}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 4x^2 - 6x + (m - 2)x^2 - 2(m - 2)x - 3(m - 2) - [2x^3 + 2(m - 2)x^2 - 20x - 2x^2 - 2(m - 2)x + 20]}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\ &= \frac{x^2(-4 + m - 2 - 2m + 4 + 2) + x(-6 - 2m + 4 + 20 + 2m - 4) - 3m + 6 - 20}{(x^2 - 2x - 3)^2} \\ &= \frac{-mx^2 + 14x - (3m + 14)}{(x^2 - 2x - 3)^2} \end{aligned}$$

إذن : إشارة $f_m'(x)$ هي إشارة $-mx^2 + 14x - (3m + 14)$ و هو كثير حدود للمتغير x

منه : تكون f_m متزايدة على كل مجال جزئي من مجموعة تعريفها إذا و فقط إذا

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} -m > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad \text{كان}$$

لنحسب Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= (14)^2 - 4(-m)(-3m - 14) \\ &= 196 - 4(3m^2 + 14m) \\ &= 196 - 12m^2 - 56m \end{aligned}$$

لاحظ أن Δ هو كثير حدود للمتغير الحقيقي m إذن إشارته تتعلق بالعدد الحقيقي m كمايلي :

إشارة $-12m^2 - 56m + 196$ هي إشارة $-3m^2 - 14m + 49$

$$\begin{aligned} \Delta &= (14)^2 - 4(-3)(49) \\ &= 196 + 588 = 784 = (28)^2 \end{aligned}$$

$$m_1 = \frac{14 - 28}{-6} = \frac{-14}{-6} = \frac{7}{3}$$

$$m_2 = \frac{14 + 28}{-6} = \frac{42}{-6} = -7$$

m	$-\infty$	-7	0	$7/3$	$+\infty$
Δ	-	0	+	0	-

منه جدول إشارة Δ كمايلي :

خلاصة : يكون $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ إذا و فقط إذا كان $m \in]-\infty ; -7]$ و هو المطلوب

2 - يكون للدالة f قيمتين حديتين محليتين أحدهما عظمى و الأخرى صغرى إذا و فقط إذا إنعدمت $f'_m(x)$ مرتين على الأقل مغيرة إشارتها بالتناوب كمايلي $+0-0+$ أو $-0+0-$ و في هذه الحالة يكون هذا محقق إذا كان كثير الحدود $(3m+14) - mx^2 + 14x - m$ للمغير الحقيقي x يقبل جذرين مختلفين

أي $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} m \neq 0 \\ -12m^2 - 56m + 196 > 0 \end{cases}$ و حسب السؤال (1) فإن $\Delta > 0$ إذا و فقط إذا كان $m \in]-7 ; 0[\cup]0 ; 7/3[$ منه : قيم m المطلوبة هي $m \in]-7 ; 0[\cup]0 ; 7/3[$

3 - لتكن $A(\alpha ; \beta)$ نقطة من المستوي .

تكون A مشتركة لكل المنحنيات (C_m) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي m فإن $f_m(\alpha) = \beta$

$$\alpha^2 - 2\alpha - 3 \neq 0 \text{ و } \frac{\alpha^2 + (m-2)\alpha - 10}{\alpha^2 - 2\alpha - 3} = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 + (m-2)\alpha - 10 = \beta(\alpha^2 - 2\alpha - 3)$$

$$\Leftrightarrow \alpha m + \alpha^2 - 2\alpha - 10 - \beta(\alpha^2 - 2\alpha - 3) = 0$$

إذن : يكون $f_m(\alpha) = \beta$ من أجل كل m من $\mathbb{R}$ إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 10/3 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \alpha = 0 \\ -10 + 3\beta = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha - 10 - 3(\alpha^2 - 2\alpha - 3) = 0 \end{cases}$$

نتيجة : النقطة A ذات الإحداثيات $(0 ; 10/3)$ تنتمي إلى كل المنحنيات (C_m)

4 - يكون مماس المنحنى (C_{11}) عند النقطة A موازي للمستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{20}{9}x$ إذا و فقط إذا كان ميله يساوي $-20/9$ أي $f'_m(0) = -20/9$

$$f'_m(0) = -\frac{20}{9} \Leftrightarrow \frac{-(3m+14)}{9} = -\frac{20}{9} \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow 3m + 14 = 20$$

$$\Leftrightarrow 3m = 6$$

$$\Leftrightarrow m = 2$$

نتيجة : توجد قيمة وحيدة m حتى يكون مماس المنحنى (C_m) عند A يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{20}{9}x$ وهي $m = 2$

التمرين 17

1 - أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ ثم

أرسم منحناها (C) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

2 - أكتب العبارة $x - \sqrt{1+x^2}$ بدلالة $f(x)$ ثم إستنتج عبارة الدالة g المعرفة على $]0 ; +\infty[$ و التي تحقق أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $g(f(x)) = x$

3 - أدرس تغيرات الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $h(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$

4 - تحقق أن إذا كانت $M(x ; y)$ نقطة من المنحنى الممثل للدالة h حيث $x > 0$ فإن النقطة $M'(y ; x)$ تنتمي إلى المنحنى (C) ثم إستنتج طريقة هندسية لإنشاء منحنى الدالة h على المجال $]0 ; +\infty[$

الحل 17

1 - تغيرات الدالة $f : f$ معرفة على $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{1+x^2}) \times \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{1+x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x - \sqrt{1+x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x - \sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \sqrt{1+x^2} = -\infty \quad \text{لأن} \quad = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{1+x^2} = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

إذن : إشارة f'(x) هي إشارة $x + \sqrt{1+x^2}$ لأن المقام موجب .

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} \geq 0 \quad \text{منه}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \geq -x$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى : $x > 0$ إذن $-x < 0$

منه المتراجحة $\sqrt{1+x^2} > -x$ دائما محققة

أي : $f'(x) > 0$ على المجال $]0; +\infty[$

الحالة الثانية : $x \leq 0$ إذن $-x \geq 0$

منه المتراجحة $\sqrt{1+x^2} \geq -x$ تكافئ $1+x^2 \geq x^2$

تكافئ $1 \geq 0$ وهذا دائما محقق

منه : $f'(x) > 0$ على المجال $]-\infty; 0]$

خلاصة : من أجل كل x من IR فإن $f'(x) > 0$
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)		$+\infty$
	0	

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{1+x^2} - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) \times \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

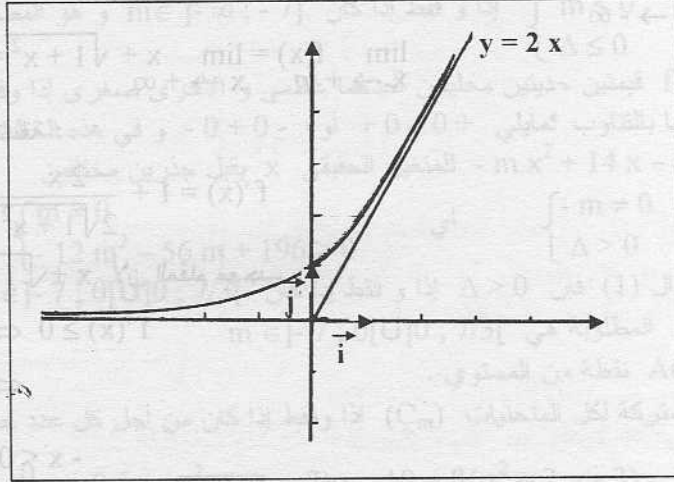
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

$$= 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

الإثشاء :



2 - لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $(x + \sqrt{1+x^2})(x - \sqrt{1+x^2}) = -1$

أي : $x - \sqrt{1+x^2} = \frac{-1}{f(x)}$ و هي العلاقة (1)

من جهة أخرى لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $(x + \sqrt{1+x^2}) + (x - \sqrt{1+x^2}) = 2x$

أي : $f(x) + (x - \sqrt{1+x^2}) = 2x$

أي : $x - \sqrt{1+x^2} = 2x - f(x)$ و هي العلاقة (2)

لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث $\text{gof}(x) = x$

نضع $f(x) = y$ إذن : $g(y) = x \Leftrightarrow \text{gof}(x) = x$ (3)

لدينا العلاقتين (1) و (2) كمايلي :

$$\begin{cases} x - \sqrt{1+x^2} = \frac{-1}{f(x)} \\ x - \sqrt{1+x^2} = 2x - f(x) \end{cases} \quad \text{إذن : } \frac{-1}{f(x)} = 2x - f(x)$$

منه : $-\frac{1}{y} = 2x - y$ لأن $y = f(x)$

أي : $y - \frac{1}{y} = 2x$

أي : $\frac{y^2 - 1}{y} = 2x$

أي : $x = \frac{y^2 - 1}{2y}$ (لأن $f(x) > 0$ أي $y > 0$)

منه العلاقة (3) تصبح : $\text{gof}(x) = x \Leftrightarrow g(y) = \frac{y^2 - 1}{2y}$

و بصفة خاصة : $g(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$ مع $x > 0$ (لأن $y > 0$)

تحقيق : ليكن x عدد حقيقي.

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= \frac{(x + \sqrt{1+x^2})^2 - 1}{2(x + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{x^2 + 2x\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2 - 1}{2(x + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{2x(x + \sqrt{1+x^2})}{2(x + \sqrt{1+x^2})} \end{aligned}$$

$$g \circ f(x) = x \quad \text{إذن فعلا} \quad = x$$

3 - تغيرات الدالة h : h معرفة على $\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و دالتها المشتقة :

$$h'(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]$$

إذن : من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $h'(x) > 0$

منه جدول التغيرات كمايلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+		+
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

4 - لتكن $M(x; y)$ نقطة من منحنى الدالة h حيث $x > 0$

$$h(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{2x} = y$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy - 1 = 0$$

هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x حيث $x > 0$

إذن نبحث عن حلولها كإيلي :

$$\Delta = 4y^2 + 4 = 4(1 + y^2)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2y - 2\sqrt{1+y^2}}{2} = y - \sqrt{1+y^2} \\ x_2 = \frac{2y + 2\sqrt{1+y^2}}{2} = y + \sqrt{1+y^2} \end{cases}$$

سالبة إذن مرفوض

موجب إذن مقبول

نتيجة : المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا هو $x = y + \sqrt{1+y^2}$

منه : إذا كانت النقطة $M(x; y)$ تنتمي إلى منحنى الدالة h حيث $x > 0$

فإن $M'(y; x)$ أي $M'(y; y + \sqrt{1+y^2})$ تنتمي إلى المنحنى (C) لأن : $y + \sqrt{1+y^2} = f(y)$

منه منحنى الدالة h على المجال $]0; +\infty[$ هو نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى المنصف الأول

التمرين 18

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1}$

نسمي (C) منحنىها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 - أدرس تغيرات الدالة f .

2 - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$. فسر النتائج هندسيا

3 - أنشئ بعناية المنحنى (C)

الحل - 18

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/2$	$+\infty$
$4x^2 - 1$	+	0	0	+

1 - التغيرات : f معرفة على IR
لاحظ إشارة $4x^2 - 1$ كمايلي :

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{4x^2 - 1} & : x \in]-\infty; -1/2[\cup]1/2; +\infty[\\ x + \sqrt{1 - 4x^2} & : x \in]-1/2; 1/2[\end{cases} \quad \text{منه}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 (4 - \frac{1}{x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - x \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \quad \text{لأن } \sqrt{x^2} = -x \text{ لما } x < 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 - \sqrt{4}) \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1} = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $IR - \{-1/2; 1/2\}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 - 1}} & : x \in]-\infty; -1/2[\cup]1/2; +\infty[\\ 1 - \frac{8x}{2\sqrt{1 - 4x^2}} & : x \in]-1/2; 1/2[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} & : x \in]-\infty; -1/2[\cup]1/2; +\infty[\\ 1 - \frac{4x}{\sqrt{1 - 4x^2}} & : x \in]-1/2; 1/2[\end{cases}$$

إشارة $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} \quad]-\infty; -1/2[\cup]1/2; +\infty[\quad \text{أولا على المجال}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{-4x}{\sqrt{4x^2 - 1}}$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى : $x \in]1/2; +\infty[$ أي $x \geq 0$ منه $-4x \leq 0$

$$\text{أي المتراجحة } 1 \geq \frac{-4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} \text{ دائما محققة}$$

أي : $f'(x) > 0$ لما $x \in]1/2; +\infty[$

الحالة الثانية : $x \in]-\infty; -1/2[$ أي $x \leq 0$ منه $-4x \geq 0$

$$\text{أي المتراجحة } 1 \geq \frac{-4x}{\sqrt{4x^2 - 1}} \text{ تكافئ } 1 \geq \frac{16x^2}{4x^2 - 1}$$

$$4x^2 - 1 \geq 16x^2 \quad \text{تكافئ}$$

$$-12x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$\text{تكافئ } (12x^2 + 1) \geq 0 \text{ و هذا مستحيل}$$

منه : $f'(x) < 0$ لما $x \in]-\infty ; -1/2[$

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	

خلاصة :

ثانيا : على المجال $]-1/2 ; 1/2[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى : $x \in]-1/2 ; 0]$ أي $x \leq 0$ منه $4x \leq 0$ إذن المتراجحة $1 > \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$ دائما محققةأي : $f'(x) > 0$ الحالة الثانية : $x \in]0 ; 1/2[$ أي $x > 0$ منه $4x > 0$

$$1 \geq \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} \quad \text{أي المتراجحة} \quad \text{تكافئ} \quad 1 \geq \frac{16x^2}{1-4x^2}$$

$$1 - 4x^2 \geq 16x^2 \quad \text{تكافئ}$$

$$1 - 20x^2 \geq 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{20}} ; \frac{1}{\sqrt{20}}\right] \quad \text{تكافئ}$$

أي $x \in \left]0 ; \frac{1}{\sqrt{20}}\right]$ لأن في هذه الحالة $x \in]0 ; 1/2[$ فقط

x	$-1/2$	$1/\sqrt{20}$	$1/2$
$f'(x)$		0	-

خلاصة :

نتيجة : إشارة المشتقة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ كمايلي :

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/\sqrt{20}$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-		0	-	+

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/\sqrt{20}$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-		0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$-1/2$	$\sqrt{5}/2$	$1/2$	$+\infty$

$$f(-1/2) = -1/2 + \sqrt{0} = -1/2$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right) = \frac{1}{\sqrt{20}} + \sqrt{1 - \frac{4}{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{16}{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{4x^2 - 1}$$

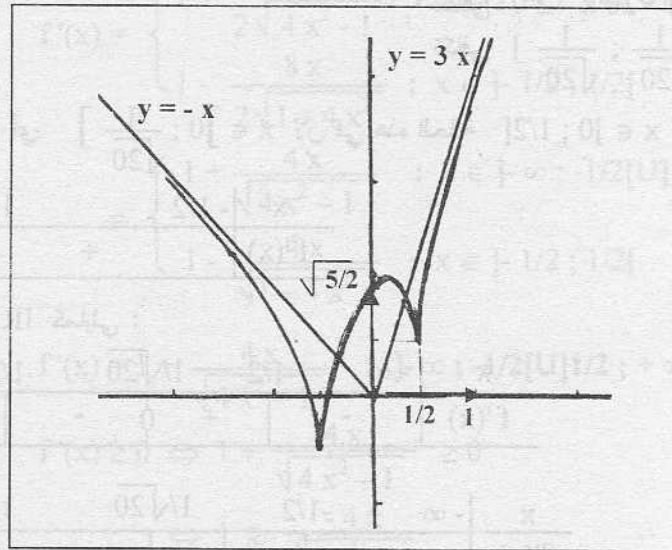
- 2

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 - 1}) \times \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 1}}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 + 1}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{4x^2 - 1} - 3x \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 1} - 2x \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 1} - 2x) \times \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 3x$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $+\infty$
الإشياء :



التمرين 19

$g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$ — $\mathbb{R}$ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$
1 — أدرس تغيرات الدالة g .

2 — برهن أن من أجل كل α من المجال $]0; 1[$ فإن المعادلة $g(x) = \alpha$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$

و ليكن (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

3 — أدرس تغيرات الدالة f

4 — أثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

5 — أدرس الوضعية النسبية لـ (d) و المنحنى (C)

6 — أنشئ بعناية المنحنى (C).

الحل - 19

1- تغيرات الدالة $g : g$ معرفة على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$|x| = -x \quad \text{لأن} \quad x < 0 \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} - \frac{x}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1}} = 0$$

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(x^2+1)} \right]$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

منه : $g'(x) > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$:إذن : جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	-1	0

2- من جدول تغيرات الدالة g لدينا النتائج التالية :

g مستمرة على $]-\infty; +\infty[$ و g تأخذ قيم في المجال $]-1; 0[$
 g متزايدة تماما على $]-\infty; +\infty[$

إذن : من أجل كل α من $]-1; 0[$ فإن المعادلة $g(x) = \alpha$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$ 3- تغيرات الدالة f : f معرفة على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} [\sqrt{x^2+1} - x] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} (\sqrt{x^2+1} - x) \times \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0 \quad \text{لأن } 1 = 1$$

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

و لكن حسب السؤال (1) فإن من أجل كل x من IR فإن $-1 < g(x) < 0$ أي $g(x) < 0$ منه $f'(x) < 0$ منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)		-
f(x)	$+\infty$	1

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x+1)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} - (-x+1) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+1}) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+1}) \left(\frac{x \cdot \sqrt{x^2+1}}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{x^2+1}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

إذن : المستقيم (d) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

5 - الوضعية النسبية لـ (C) و (d) :

$$\begin{aligned}
f(x) - (-x+1) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} \\
&= \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+1})
\end{aligned}$$

إذن : إشارة $f(x) - (-x+1)$ هي إشارة $x + \sqrt{x^2+1}$ كمايلي :

$$\begin{aligned}
x + \sqrt{x^2+1} &\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \geq -x \\
-x &\leq 0 \quad \text{أي } x \geq 0 \quad (1) \text{ الحالة}
\end{aligned}$$

منه : المتراجحة $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ دائما محققة .

أي : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$

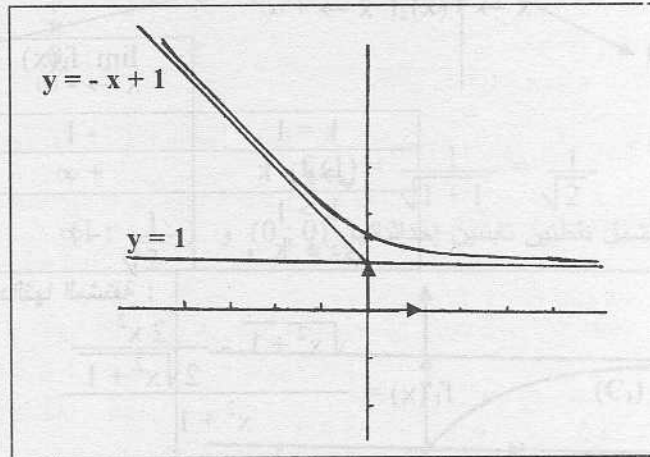
الحالة (2) $x < 0$ أي $-x > 0$

منه : المتراجحة $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ تكافئ $x^2+1 \geq x^2$

تكافئ $1 \geq 0$

منه : المتراجحة $\sqrt{x^2+1} \geq -x$ دائما محققة .

خلاصة : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ أي المنحنى (C) دائما فوق المستقيم (d) $y = -x + 1$



$$f(0) = 3/2$$

التمرين 20

f_k دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x) = \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم .

نسمي (C_k) المنحنى الممثل للدالة f_k في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 - أدرس حسب قيم k ($k \geq 1$) تغيرات الدالة f_k .

2 - أثبت أن كل المنحنيات (C_k) الممثلة للدالة f_k في مستوي منسوب إلى معلم تمر بنقطتين ثابتتين يطلب إحداثياتها من أجل $k > 1$

3 - أنشئ كل من (C_1) و (C_2) و (C_3)

الحل 20

1 - تغيرات الدالة f_k :

f_k معرفة على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^k}{|x| \sqrt{1+1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{k-1}}{\sqrt{1+1/x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ و } |x| = -x \text{ في جوار } -\infty$$

إذن نميز الحالات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1 \text{ إذن } k=1 \text{ أولا}$$

ثانيا : k زوجي إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} - (x)^{k-1} = +\infty$ لأن $(k-1)$ فردي

ثالثا : k فردي إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} - (x)^{k-1} = -\infty$ لأن $(k-1)$ زوجي

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{x \sqrt{1 + 1/x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{x}$$

إذن : نمز الحالات التالية :

أولا : $k = 1$: إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x/x = 1$

ثانيا : $k > 1$: إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x)^{k-1} = +\infty$

خلاصة :

	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$
$k = 1$	- 1	1
k زوجي	$+\infty$	$+\infty$
$k > 1$ و k فردي	$-\infty$	$+\infty$

f_k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

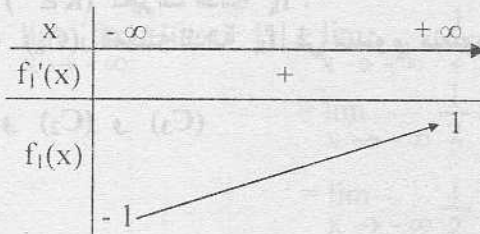
أولا : $k = 1$

$$f_1'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

إذن : $f_1'(x) > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.
منه جدول التغيرات من أجل $k = 1$



ثانيا : $k > 1$

$$f_k'(x) = \frac{k x^{k-1} \sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x^{k+1}}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{k x^{k-1} (x^2 + 1) - x^{k+1}}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{k x^{k+1} + k x^{k-1} - x^{k+1}}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{x^{k-1} [(k-1)x^2 + k]}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

إذن : إشارة $f_k'(x)$ هي إشارة x^{k-1} لأن $(k-1)x^2 + k > 0$ من أجل $k > 1$ و $(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} > 0$

إذن : نميز حالتين كمالي :

الحالة الأولى : k زوجي أي $(k-1)$ فردي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^{k-1}	-	0	+

الحالة الثانية : $\left. \begin{array}{l} k \text{ فردي أي } (k-1) \text{ زوجي} \\ k > 1 \end{array} \right\}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^{k-1}		0	$+$

منه جدول التغيرات التالي :

k فردي ($k > 1$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_k(x)$	$+$	0	$+$
$f_k(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

k زوجي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_k(x)$	$-$	0	$+$
$f_k(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

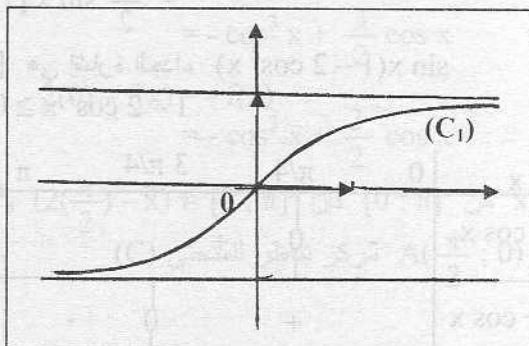
2- ليكن $k > 1$

لدينا : $f_k(0) = 0$ و $f_k(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

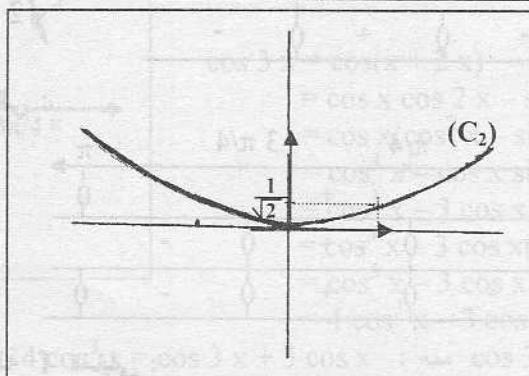
إذن : المنحنى (C_k) يشمل نقطتين ثابتتين إحداثياتها $(0; 0)$ و $(1; \frac{1}{\sqrt{2}})$

3- الإنشاء :

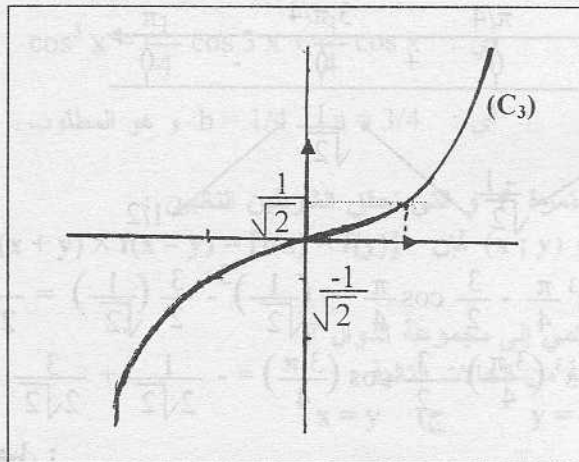
أولا : (C_1) :



ثانيا : (C_2) زوجي



ثالثا : (C_3) فردي :



التمرين - 21

f دالة معرفة على المجال $[0; \pi]$ بـ $f(x) = \cos^3 x - \frac{3}{2} \cos x$

1- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; \pi]$

2 - عين نقطة تقاطع المنحنى (C) الممثل للدالة f مع حامل محور الفواصل في مستوي منسوب إلى معلم متعامد . ولتكن A هذه النقطة .

3 - أثبت أن A هي مركز تناظر للمنحنى (C)

4 - أنشئ بعناية المنحنى (C)

5 - أكتب العبارة $\cos^3 x$ من الشكل $a \cos x + b \cos 3x$ حيث a و b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما .

الحل - 21

1 - التغيرات : f معرفة على $[0 ; \pi]$

$$f(0) = \cos^3 0 - \frac{3}{2} \cos 0 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(\pi) = \cos^3 \pi - \frac{3}{2} \cos \pi = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

f قابلة للاشتقاق على $[0 ; \pi]$ و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \sin x \cos^2 x + \frac{3}{2} \sin x \\ &= \frac{3}{2} \sin x [1 - 2 \cos^2 x] \end{aligned}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ على $[0 ; \pi]$ هي إشارة الجداء $\sin x(1 - 2 \cos^2 x)$

$$1 - 2 \cos^2 x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2 \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 1/2 \geq \cos^2 x$$

x	0	$\pi/4$	$3\pi/4$	π
$\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x$	-	0	+	
$\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x$		+	0	-
الجداء	-	0	+	0

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x\right) \geq 0$$

منه جدول إشارة التالي :

x	0	$\pi/4$	$3\pi/4$	π
$\sin x$	0		+	0
$1 - 2 \cos^2 x$		-	0	-
$f'(x)$	0	-	0	-

منه جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	0	$\pi/4$	$3\pi/4$	π
$f'(x)$	0	-	0	-
$f(x)$	$-1/2$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1/2$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^3 \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos^3 \left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} \cos \left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2 - التقاطع مع حامل محور الفواصل :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos^3 x - \frac{3}{2} \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (\cos^2 x - \frac{3}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{أو} \\ \cos^2 x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{مستحيل}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \text{لأن } 0 \leq x \leq \pi$$

نتيجة : المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A إحداثياتها $A(\pi/2; 0)$

$$- \pi \leq -x \leq 0 \quad \text{إذن } 0 \leq x \leq \pi$$

$$\text{منه : } 0 \leq \pi - x \leq \pi$$

$$\text{أي : } 0 \leq 2(\frac{\pi}{2}) - x \leq \pi$$

$$f(\pi - x) = \cos^3(\pi - x) - \frac{3}{2} \cos(\pi - x) \quad \text{و لدينا :}$$

$$= (-\cos x)^3 - \frac{3}{2} (-\cos x)$$

$$= -\cos^3 x + \frac{3}{2} \cos x$$

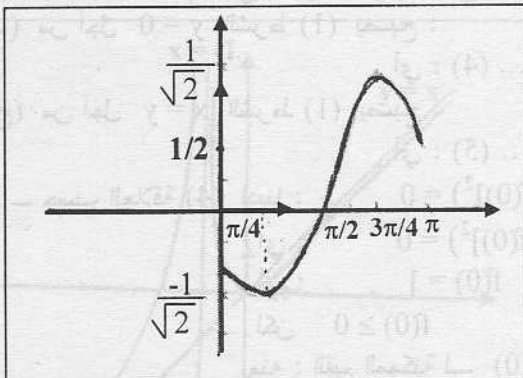
$$2(0) - f(x) = -f(x) \quad \text{من جهة أخرى :}$$

$$= -\cos^3 x + \frac{3}{2} \cos x$$

خلاصة : من أجل كل x من $[0; \pi]$ فإن $(2(\frac{\pi}{2}) - x) \in [0; \pi]$ و $f(2(\frac{\pi}{2}) - x) = 2(0) - f(x)$

إذن : النقطة $A(\frac{\pi}{2}; 0)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

4 - الإنشاء :



5 - ليكن $x \in [0; \pi]$

$$\cos 3x = \cos(x + 2x)$$

$$= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$

$$= \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x (2 \sin x \cos x)$$

$$= \cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x$$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\text{نتيجة : } \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad \text{منه : } 4 \cos^3 x = \cos 3x + 3 \cos x$$

$$\text{أي : } \cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$$

$$\text{أي : } a = 3/4 \quad \text{و} \quad b = 1/4 \quad \text{و هو المطلوب}$$

التمرين 22

لتكن F مجموعة الدوال العددية المستمرة f و التي تحقق الشرطين التاليين :

$$(1) \quad \text{من أجل كل } (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{فإن } f(x+y) \times f(x-y) = [f(x) \times f(y)]^2$$

$$(2) \quad f(0) \geq 0$$

1 - تحقق أن الدالة $x \mapsto 2^{-x^2}$ تنتمي إلى مجموعة الدوال F

2 - عبر عن الشرط (1) في كل حالة من الحالات التالية :

$$(i) \quad x = 0 \quad (ب) \quad y = 0 \quad (ج) \quad x = y$$

3 - استنتج القيم الممكنة لـ $f(0)$

4 - أثبت أن $f(0) = 0$ إذا و فقط إذا كانت f هي الدالة $x \mapsto 0$.

نفرض أن يوجد عدد حقيقي غير معدوم a حيث $f(a) = 0$

نعرف المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بـ $u_n = \frac{a}{2^n}$

5 - أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة .

6 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $f(u_n) = 0$

7 - استنتج أن $f(0) = 0$

الحل - 22

1 - نضع $f(x) = 2^{-x^2}$

لدينا $f(0) = 2^0 = 1$

إذن : $f(0) \geq 0$ منه الشرط (2) محقق .

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، من أجل كل y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned} f(x+y) \times f(x-y) &= 2^{-(x+y)^2} \times 2^{-(x-y)^2} \\ &= 2^{-x^2-2xy-y^2} \times 2^{-x^2+2xy-y^2} \\ &= 2^{-2x^2-2y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f(x) \times f(y)]^2 &= [2^{-x^2} \times 2^{-y^2}]^2 \\ &= [2^{-x^2-y^2}]^2 \\ &= 2^{-2x^2-2y^2} \end{aligned}$$

نتيجة : $f(x+y) \times f(x-y) = [f(x) \times f(y)]^2$ أي الشرط (1) محقق .

خلاصة : f تحقق الشرطين (1) و (2) معا و f مستمرة على $\mathbb{R}$ إذن f تنتمي إلى مجموعة الدوال F .

2 - لدينا : $f(x+y) \times f(x-y) = [f(x) \times f(y)]^2$ من أجل كل $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

(أ) من أجل $x=0$ الشرط (1) يصبح :

$$f(y) \times f(-y) = [f(0) \times f(y)]^2$$

$$f(y) \times f(-y) = [f(0)]^2 \times [f(y)]^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$f(x) \times f(x) = [f(0) \times f(x)]^2$$

$$[f(x)]^2 = [f(0)]^2 \times [f(x)]^2 \dots\dots\dots (4)$$

$$f(2x) \times f(0) = [f(x) \times f(x)]^2$$

$$f(2x) \times f(0) = [f(x)]^4 \dots\dots\dots (5)$$

$$[f(x)]^2(1 - [f(0)]^2) = 0$$

$$f(x) = 0 \text{ أو } (1 - [f(0)]^2) = 0$$

$$f(0) = 1 \text{ أو } f(0) = -1 \text{ أو } f(0) = 0 \text{ و } f \text{ معدومة أي } f(x) = 0$$

$$f(0) \geq 0$$

$$\text{لكن } f(0) = 1$$

$$\text{منه : القيم الممكنة لـ } f(0) \text{ هي } 0 \text{ أو } 1$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0 \quad \text{أي}$$

$$f\left(2 \times \frac{a}{2^{n+1}}\right) = 0 \quad \text{أي}$$

$$f\left(2 \times \frac{a}{2^{n+1}}\right) \times f(0) = 0 \times f(0) \quad \text{أي}$$

$$\left[f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\right]^4 = 0 \quad \text{أي} \quad (x = \frac{a}{2^{n+1}} \text{ نضع من السؤال 2})$$

$$f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = 0 \quad \text{أي}$$

$$f(u_{n+1}) = 0 \quad \text{أي}$$

منه : الخاصية محققة من أجل $n+1$

في حالة f هي الدالة $x \rightarrow 0$ فإن $f(u_n) = 0$ محقق من أجل كل n من $\mathbb{N}$

نتيجة : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $f(u_n) = 0$

7 - لدينا $f(u_n) = 0$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

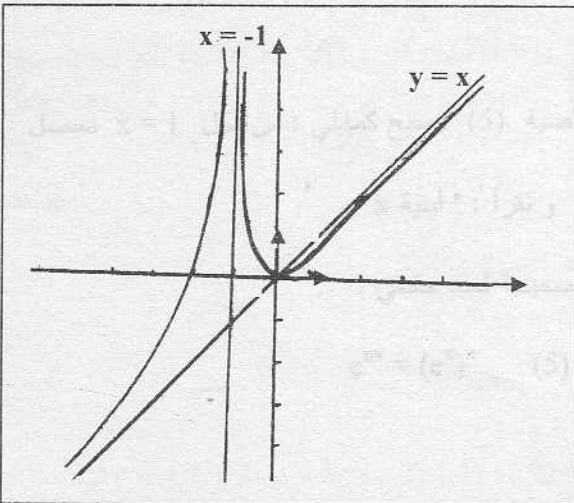
لكن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

إذن : $f[\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n] = 0$ لأن f مستمرة على $\mathbb{R}$

أي : $f(0) = 0$ و هو المطلوب .

التمرين 23

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2}$ و (C) منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .



g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = |x|$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ نعرف الدالة ϕ كمايلي : $\phi(x) = f(g(x))$

1 - برهن أن الدالة ϕ زوجية

2 - تحقق أن : من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$

فإن $\phi(x) = f(x)$

3 - استنتج طريقة بسيطة لرسم منحنى الدالة ϕ على $\mathbb{R}$ دون

دراسة تغيرات الدالة ϕ . ثم أرسم المنحنى (γ) الممثل للدالة ϕ .

الحل 23

1 - ليكن $x \in \mathbb{R}$ إذن : $f(g(x)) = f(|x|)$

منه : $\phi(x) = f(|x|)$

$$= \frac{|x|^3 + 2|x|^2}{(|x| + 1)^2}$$

إذن : ϕ معرفة على $\mathbb{R}$

و لدينا : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $(-x) \in \mathbb{R}$ و $\phi(-x) = \frac{|-x|^3 + 2|-x|^2}{(|-x| + 1)^2}$

$$= \frac{|x|^3 + 2|x|^2}{(|x| + 1)^2}$$

$$= \phi(x)$$

إذن : الدالة ϕ زوجية .

2 - ليكن $x \in [0; +\infty[$ إذن : $|x| = x$

$$\phi(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{منه}$$

أي : $\phi(x) = f(x)$ و هو المطلوب

3- ϕ دالة زوجية إذن يكفي رسم منحناها على المجال $[0; +\infty[$ ثم إستنتاج الجزء الآخر على المجال $]-\infty; 0]$ بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب.

ولكن لما $x \in [0; +\infty[$ لدينا $\phi(x) = f(x)$ أي منحنى الدالة ϕ على المجال $[0; +\infty[$ ينطبق على جزء المنحنى (C) على المجال $[0; +\infty[$ إذن : نرسم هذا الجزء ثم نظيره بالنسبة إلى محور الترتيب كمايلي :

