قوانين الإحتمال

I . قانون برنولي

تعريف :

نسمي تجربة برنولي كل تجربة عشوائية ذات مخرجين متعاكسين فقط S و $\overline{S}$ حيث احتمالهما على الترتيب p و $1-p$

مع $0 \le p \le 1$ و عليه فإن قانون برنولي هو المتغير العشوائي X المعرف كمايلي : $\begin{cases} X = 1 & \text{إذا تحقق المخرج } S \\ X = 0 & \text{إذا تحقق المخرج } \overline{S} \end{cases}$

قانون برنولي :

x	1	0
$p(X=x)$	p	$1-p$

p يسمى وسيط X

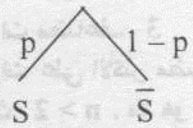
ملاحظة :

$$E(x) = 1(p) + 0(1-p) = p$$
$$\begin{aligned} Var(x) &= p(1-p)^2 + (1-p)(0-p)^2 \\ &= p(1-p)(1-p+p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

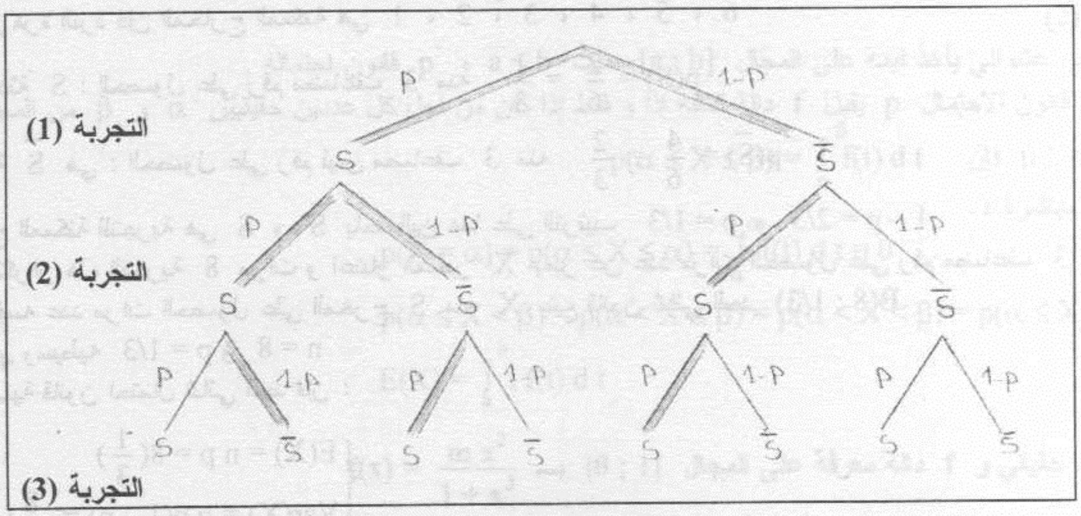
قانون ثنائي الحد

لتكن تجربة برنولي ذات الوسيط p و المخرجين S و $\overline{S}$

لدينا إذن المخطط على شجرة ذات ورقتين S و $\overline{S}$ التالي :



عند القيام بهذه التجربة n مرة مختلفة نحصل على الشجرة التالية ذات 2^n ورقة متناوبة على الترتيب S و $\overline{S}$:



لاحظ أن من أجل $n=3$ لدينا $2^3 = 8$ أوراق متناوبة على الترتيب S و $\overline{S}$

إذا اعتبرنا X متغير عشوائي يعبر عن عدد مرات تحقق المخرج S بعد تكرار تجربة برنولي n مرة فإن القيم الممكنة لـ X هي 0 ، 1 ، 2 ، ...... n و نبرهن أن من أجل كل عدد طبيعي k حيث $0 \le k \le n$

فإن $p(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$

مثلا : في التجربة السابقة أي $n = 3$ لدينا :

من أجل $k = 2$: $p(X=2) = p^2(1-p) + p^2(1-p) + p^2(1-p) = 3\,p^2(1-p)$

و من جهة أخرى : $C_3^2 \; p^2(1-p)^{3-2} = 3\,p^2(1-p)$

(أنظر الأغصان المضاعفة في الشجرة)

نتيجة : حسب قانون احتمال المتغير العشوائي فإن : $\sum_{k=0}^{n} p(X=k) = 1$

أي : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = (1)^n = 1$

نقول أن المتغير X يتبع قانون ثنائي الحد بالوسيطين n و p

تعريف :

نقول عن متغير عشوائي X أنه يتبع قانون ثنائي الحد بوسيطين n و p إذا كان X يأخذ قيم عدد مرات تحقيق المخرج S لتجربة برنولي المكررة n مرة و نرمز له بـــ $X ? B(n ; p)$

نتائج دون برهان :

n عدد طبيعي غير معدوم و p عدد حقيقي من المجال $[0 ; 1]$

X متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد $B(n ; p)$

من أجل كل عدد طبيعي k حيث $0 \leq k \leq n$ فإن $p(X = k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$$\begin{cases} E(X) = n p \\ Var(X) = n p(1-p) \end{cases}$$

نشاط :

نرمي 8 مرات زهرة نرد غير مزيفة ذات 6 أوجه مرقمة من 1 إلى 6

ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد مرات الحصول على رقم مضاعف للعدد 3

1 ـ هل X يتبع قانون ثنائي الحد ؟ في حالة الاجابة بنعم حدد وسيطيه n و p

2 ـ عين الأمل الرياضيائي $E(X)$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$

3 ـ ما هو احتمال الحصول على 4 مرات مضاعف 3

4 ـ ما هو احتمال الحصول على 7 مرات على الأكثر مضاعف 3

5 ـ نرمي الآن زهرة النرد n مرة حيث $n > 2$. ما هو احتمال الحصول على مرة واحدة على الأقل على مضاعف 3 ؟

ما هي أصغر قيمة للعدد الطبيعي n حتى يكون هذا الاحتمال أكبر من 0,999

الحـــل : .

1 ـ عند رمي زهرة النرد فإن المخارج الممكنة هي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6

لنعتبر الحادثة S : الحصول على رقم مضاعف 3 منه $p(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

إذن الحادثة $\overline{S}$ هي : الحصول على رقم ليس مضاعف 3 منه $p(\overline{S}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

نتيجة : المخارج الممكنة للتجربة هي S و $\overline{S}$ باحتمالين هما على الترتيب $p = 1/3$ و $1 - p = 2/3$

منه : بتكرار هذه التجربة 8 مرات و اعتبار المتغير X يعبر عن عدد مرات الحصول على رقم مضاعف 3 هو نفسه عدد مرات الحصول على المخرج S منه X يتبع قانون ثنائي الحد $B(8 ; 1/3)$

أي وسيطيه $p = 1/3$ و $n = 8$

2 ـ حسب خاصية قانون احتمال ثنائي الحد فإن :

$$\begin{cases} E(X) = n p = 8(\frac{1}{3}) \\ Var(X) = n p(1-p) = \frac{8}{3}(\frac{2}{3}) \end{cases}$$

نتيجة : $E(X) = \frac{8}{3}$ و $\sigma(X) = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

3 ـ احتمال الحادثة : الحصول على 4 مرات مضاعف 3 :

$$p(X=4) = C_8^4 p^4(1-p)^{8-4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2}(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^4 = 70 \times \frac{1}{81} \times \frac{16}{81} = \frac{1120}{6561}$$

4 ـ احتمال الحادثة : الحصول على 7 مرات على الأكثر على مضاعف 3

هي الحادثة العكسية للحادثة : الحصول على 8 مرات على مضاعف 3 منه

الاحتمال هو : $1 - p(X=8) = 1 - C_8^8 p^8(1-p)^0 = 1 - p^8 = 1 - (\frac{1}{3})^8 = \frac{6560}{6561}$

5 ــ **الحادثة** : الحصول على مرة واحدة على الأقل على رقم مضاعف 3 هي الحادثة العكسية للحادثة : الحصول على كل الأرقام ليست مضاعفات 3 أي $X = 0$

منه الاحتمال هو : $1 - p(X = 0) = 1 - C_n^0 p^0(1 - p)^n = 1 - (\frac{2}{3})^n$

نتيجة : $1 - (\frac{2}{3})^n > 0{,}999$ تكافئ $1 - 0{,}999 > (\frac{2}{3})^n$

تكافئ $0{,}001 > (\frac{2}{3})^n$

تكافئ $\ln(0{,}001) > n \ln(\frac{2}{3})$

تكافئ $n > \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(2/3)}$

تكافئ $n > 17{,}03$

نتيجة : أصغر قيمة لــ n حتى يكون احتمال الحصول على الأقل على مضاعف 3 أكبر من 0,999 هي $n = 18$

III . قوانين الاحتمال المستمرة

تعريف (1)

f دالة عددية معرفة على مجال $[a ; b]$ حيث $a < b$

نقول أن f هي دالة كثافة احتمال على المجال $[a ; b]$ إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

(1) f مستمرة على $[a ; b]$

(2) f موجبة على $[a ; b]$

(3) $\int_a^b f(t)\, dt = 1$

تعريف (2)

X متغير عشوائي يأخذ قيمه على المجال $[a ; b]$ حيث $a < b$ و p قانون احتماله .

نقول أن قانون الاحتمال p يقبل f دالة كثافة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عددين حقيقيين α و β من المجال $[a ; b]$ حيث $\beta \geq \alpha$ فإن $p(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f(t)\, dt$

خواص مباشرة :

$$p(X = \alpha) = p(\alpha \leq X \leq \alpha) = \int_\alpha^\alpha f(t)\, dt = 0$$

$$p(\alpha \leq X < \beta) = p(\alpha < X \leq \beta) = p(\alpha < X < \beta) = p(\alpha \leq X \leq \beta)$$

$$E(X) = \int_a^b t\, f(t)\, dt$$

<u>**مثال :**</u>

m عدد حقيقي و f دالة معرفة على المجال $[0 ; 1]$ بــ $f(x) = \frac{m x^2}{1 + x^3}$

1 ــ عين m حتى تكون f دالة كثافة احتمال على $[0 ; 1]$

2 ــ ليكن X متغير عشوائي معرف على $[0 ; 1]$ و الذي قانون احتماله p يقبل الدالة f كدالة كثافة احتمال

أحسب $p(X \leq 1/2)$ ، $p(X \geq 1/2)$ ، $p(1/3 \leq X \leq 1/2)$

<u>**الحـــل :**</u>

1 ــ تكون f دالة كثافة احتمال على المجال $[0 ; 1]$ إذا و فقط إذا تحققت الشروط التالية :

ش$_1$: f مستمرة على $[0 ; 1]$

ش$_2$: f موجبة على $[0 ; 1]$

ش$_3$: $\int_0^1 f(x)\, dx = 1$

f : مستمرة على $[0 ; 1]$ إذن : الشرط ش$_1$ محقق

تكون f موجبة على $[0 ; 1]$ إذا و فقط إذا كان $m \geq 0$ لأن $\frac{x^2}{1 + x^3} > 0$

إذن : الشرط ش$_2$ محقق إذا و فقط إذا كان $m \geq 0$

الشرط ش$_3$ يكافئ $\int_0^1 \frac{m x^2}{1 + x^3}\, dx = 1$

يكافئ $m\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = 1$

يكافئ $\frac{m}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^3}\,dx = 1$

يكافئ $\frac{m}{3}\left[\ln(1+x^3)\right]_0^1 = 1$

يكافئ $\frac{m}{3}\left[\ln(1+1) - \ln(1+0)\right] = 1$

يكافئ $\frac{m}{3}\ln 2 = 1$

يكافئ $m\ln 2 = 3$

يكافئ $m = \frac{3}{\ln 2}$

بما أن $\frac{3}{\ln 2} > 0$ فإن قيمة m تحقق الشرط ش2

نتيجة : قيمة m حتى تكون f دالة كثافة احتمال هي $m = \frac{3}{\ln 2}$

منه $f(x) = \frac{3x^2}{(1+x^3)\ln 2}$

2 ــ $p(X \le 1/2) = p(0 \le X \le 1/2)$

$$= \int_0^{1/2} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int_0^{1/2} \frac{3x^2}{1+x^3}\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[\ln(1+x^3)\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[\ln(1+\frac{1}{8}) - \ln(1+0)\right]$$

$$= \frac{\ln(9/8)}{\ln 2}$$

$$= \frac{\ln 9 - \ln 8}{\ln 2}$$

$$= \frac{2\ln 3}{\ln 2} - \frac{3\ln 2}{\ln 2}$$

$$= \frac{2\ln 3}{\ln 2} - 3$$

$$= 0{,}169$$

$$p(X \ge 1/2) = 1 - p(X \le 1/2)$$

$$= 1 - 0{,}169$$

$$= 0{,}831$$

$$p(1/3 \le X \le 1/2) = \int_{1/3}^{1/2} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int_{1/3}^{1/2} \frac{3x^2}{1+x^3}\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[\ln(1+x^3)\right]_{1/3}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[\ln(1+\frac{1}{8}) - \ln(1+\frac{1}{27})\right]$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[\ln\left(\frac{9}{8}\right) - \ln\left(\frac{28}{27}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\ln 2} \times \ln\left(\frac{9}{8} \times \frac{27}{28}\right)$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{243}{224}\right)$$
$$= 0{,}117$$

III . قانون التوزيعات المنتظمة

تعريف :

X متغير عشوائي يتبع قانون احتمال p يقبل دالة كثافة f على المجال $[a\,;b]$ حيث $a < b$

نقول أن X يتبع قانون توزيع منتظم على $[a\,;b]$ إذا و فقط إذا كانت f دالة ثابتة على المجال $[a\,;b]$

نتائج مباشرة :

f دالة ثابتة على $[a\,;b]$ إذن : من أجل كل x من $[a\,;b]$ فإن $f(x) = k$ حيث $k \in IR$

لكن : $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

إذن : $\int_a^b k\,dx = 1$

أي $[kx]_a^b = 1$

أي : $kb - ka = 1$

أي $k(b-a) = 1$

منه : $k = \frac{1}{b-a}$ لأن $a \neq b$

نتيجة : $f(x) = \frac{1}{b-a}$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي α من المجال $[a\,;b]$ فإن :

$$p(X \le \alpha) = p(a \le X \le \alpha) = \int_a^\alpha \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}[x]_a^\alpha = \frac{\alpha - a}{b-a}$$

الأمل الرياضي :

من تعريف الأمل الرياضي : $E(X) = \int_a^b t\,f(t)\,dt$

$$= \int_a^b \frac{t}{b-a}\,dt$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b t\,dt$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_a^b$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2\right]$$
$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$$
$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$
$$= \frac{b+a}{2}$$

مثال : نختار عشوائيا عددا حقيقيا من المجال $[4\,;6]$

ما هو احتمال أن يكون هذا العدد : A) محصور بين $\frac{9}{2}$ و $\frac{16}{3}$

B) أكبر من $\frac{36}{7}$

<u>الحــل</u> : ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار قيمة العدد المختار من المجال [4 ; 6]

إذن : X يتبع قانون توزيع منتظم على المجال [4 ; 6] حيث دالة كثافة احتماله هي $f(x) = \frac{1}{6-4} = \frac{1}{2}$

منه النتائج التالية :

A) $p(9/2 \le X \le 16/3) = \int_{9/2}^{16/3} f(x)\,dx$

$$= \int_{9/2}^{16/3} \frac{1}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\right]_{9/2}^{16/3}$$

$$= \frac{16}{6} - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{10}{24}$$

$$= \frac{5}{12}$$

B) $p(x > 36/7) = p(36/7 < X < 6)$

$$= \int_{36/7}^{6} f(x)\,dx$$

$$= \int_{36/7}^{6} \frac{1}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\right]_{36/7}^{6}$$

$$= 3 - \frac{36}{14}$$

$$= \frac{6}{14}$$

$$= \frac{3}{7}$$

IV. القانون الأسي :

تعريف :

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع القانون الأسي ذو الوسيط λ إذا و فقط إذا كانت دالة كثافة احتماله هي الدالة f المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0 ; +\infty[$ بالعبارة $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما .

نتائج :

1 ـ ليكن $\alpha \in]0 ; +\infty[$ إذن : $p(X \le \alpha) = p(0 \le X \le \alpha)$

$$= \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\alpha} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= [-e^{-\lambda x}]_0^{\alpha}$$

$$= -e^{-\lambda\alpha} + 1$$

$$= 1 - e^{-\lambda\alpha}$$

2 ـ $E(X) = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} x f(x)\,dx$

$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} x \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

لنحسب بالتجزئة : $I = \int_0^{\alpha} x \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{array}\right\}$ منه $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = - e^{-\lambda x} \end{array}\right\}$

منه : $I = [- x e^{-\lambda x}]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-\lambda x} d x$

$$= - \alpha e^{-\lambda \alpha} + \left[- \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\alpha}$$

$$= - \alpha e^{-\lambda \alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \alpha} + \frac{1}{\lambda}$$

نتيجة : $E(X) = \lim_{\alpha \to +\infty} - \alpha e^{-\lambda \alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \alpha} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

لأن $\left.\begin{array}{l} \lim_{\alpha \to +\infty} - \alpha e^{-\lambda \alpha} = 0 \\ \lim_{\alpha \to +\infty} e^{-\lambda \alpha} = 0 \end{array}\right\}$ $(\lambda > 0)$

خلاصة : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

مثال : X متغير عشوائي يتبع قانونا أسيا وسيطه λ

عين λ علما أن $p(X \geq 50) = 2/3$

الحـل : دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي X هي $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

منه : $p(X \leq 50) = 1 - e^{-50\lambda}$ حسب النتائج المباشرة من الدرس

لكن $p(X \geq 50) = 1 - p(x \leq 50)$

أي $p(X \geq 50) = 1 - (1 - e^{-50\lambda})$

أي $p(X \geq 50) = e^{-50\lambda}$

نتيجة : $p(X \geq 50) = 2/3$ يكافئ $e^{-50\lambda} = 2/3$

يكافئ $- 50 \lambda = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

يكافئ $\lambda = - \frac{1}{50} \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

يكافئ $\lambda = \frac{1}{50} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ لأن $- \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

تطبيق :

نعتبر زمن انتظار الزبائن أمام الشباك في احدى الادارات كمتغير عشوائي X بالدقائق و يتبع قانون أسي بوسيط λ حيث $\lambda = 0{,}08$

1 ـ ما هو احتمال أن ينتظر شخص ما مدة أقل من 10 دقائق

2 ـ ما هو احتمال أن ينتظر شخص ما مدة أكثر من 30 دقيقة

3 ـ ما هو معدل زمن الانتظار أمام هذا الشباك .

الحـل :

X يتبع قانون أسي ذو الوسيط $\lambda = 0{,}08$ إذن : دالة كثافة احتماله هي $f(x) = 0{,}08 e^{-0{,}08x}$

و من أجل كل α من المجال $]0 ; + \infty[$ فإن : $p(X \leq \alpha) = 1 - e^{-0{,}08\alpha}$

منه النتائج التالية :

1 ـ $p(X < 10) = 1 - e^{-0{,}08(10)}$

$$= 1 - e^{-0{,}8}$$

$$\approx 0{,}550$$

إذن احتمال أن ينتظر شخص ما مدة أقل من 10 دقائق هو 0,55

2 ـ $p(X > 30) = 1 - p(X \leq 30)$

$$= 1 - (1 - e^{-0{,}08(30)})$$

$$= e^{-0{,}08(30)}$$

$$= e^{-2{,}4}$$

$$\approx 0{,}090$$

إذن : احتمال أن ينتظر شخص ما مدة أكثر من 30 دقيقة هو 0,09

3 ـ معدل زمن الانتظار هو الأمل الرياضياتي للمتغير X

أي : $E(X) = \frac{1}{0{,}08} \approx 12{,}5$

منه : معدل زمن الانتظار هو 12,5 دقيقة (12 دقيقة و 30 ثانية)

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ـ 1

في امتحان شهادة بكالوريا كانت نسبة النجاح 40 %

من بين 5 أصدقاء مترشحين ، ما هو احتمال الحوادث التالية :

A) أن لا يكون أي ناجح

B) أن ينجح واحد فقط

C) أن ينجح إثنان فقط

D) أن ينجح على الأقل إثنان

E) أن ينجح الأصدقاء الخمسة

الحل ـ 1

تجربة اختيار مترشح ما لها مخرجين فقط هما :

S : النجاح باحتمال $p = 40\,\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

$\overline{S}$: عدم النجاح باحتمال $1 - p = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

إذن : بتكرار هذه التجربة 5 مرات نعتبر المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد المترشحين الناجحين من بين الخمسة أصدقاء

منه X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه $n = 5$ و $p = \frac{2}{5}$

و عليه النتائج كمايلي :

(A $\quad p(A) = p(X = 0) = C_5^0\, p^0 (1-p)^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{243}{3125}$

(B $\quad p(B) = p(X = 1) = C_5^1\, p^1 (1-p)^4 = 5 \times \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{162}{625}$

(C $\quad p(C) = p(X = 2) = C_5^2\, p^2 (1-p)^3 = 10\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{216}{625}$

(D
$$\begin{aligned} p(D) &= p(X \geq 2) \\ &= 1 - p(X < 2) \\ &= 1 - [p(X = 1) + p(X = 0)] \\ &= 1 - \left[\frac{162}{625} + \frac{243}{3125}\right] \\ &= 1 - \frac{810 + 243}{3125} \\ &= \frac{2072}{3125} \end{aligned}$$

(E $\quad p(E) = p(X = 5) = C_5^5\, p^5 (1-p)^0 = \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{32}{3125}$

التمرين ـــ 2

عائشة ، فاطمة و خديجة ثلاث صديقات ترشحن لامتحان شهادة البكالوريا بحظوظ مختلفة حسب مجهودات كل منها طوال السنة الدراسية .

إذا كانت احتمالات نجاح كل منها هي 0,25 (عائشة) و 0,9 (فاطمة) ، 0,45 (خديجة)

أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : تنجح الصديقات الثلاثة معا .

B : تنجح واحدة منهن على الأقل .

C : تنجح صديقتان فقط .

D : تنجح صديقتان فقط من بينها فاطمة .

الحـل ـــ 2

نرمز بـ 0 إلى الرسوب و 1 إلى النجاح

منه الحالات الممكنة هي كمايلي :

عائشة	فاطمة	خديجة	الحادثة	الاحتمال
0	0	0	a	$0{,}75 \times 0{,}1 \times 0{,}55 = 0{,}04125$
		1	b	$0{,}75 \times 0{,}1 \times 0{,}45 = 0{,}03375$
	1	0	c	$0{,}75 \times 0{,}9 \times 0{,}55 = 0{,}37125$
		1	d	$0{,}75 \times 0{,}9 \times 0{,}45 = 0{,}30375$
1	0	0	e	$0{,}25 \times 0{,}1 \times 0{,}55 = 0{,}01375$
		1	f	$0{,}25 \times 0{,}1 \times 0{,}45 = 0{,}01125$
	1	0	g	$0{,}25 \times 0{,}9 \times 0{,}55 = 0{,}12375$
		1	h	$0{,}25 \times 0{,}9 \times 0{,}45 = 0{,}10125$

لاحظ أن احتمال رسوب عائشة ، فاطمة و خديجة هي على الترتيب 0,75 ؛ 0,1 ؛ 0,55

منه النتائج التالية :

الحادثة A توافق الحادثة h

منه : $p(A) = p(h) = 0{,}10125$

الحادثة B توافق الحادثة $\overline{a}$ (الحادثة العكسية للحادثة و لا ناجحة)

منه : $p(B) = p(\bar{a}) = 1 - p(a) = 1 - 0{,}04125 = 0{,}95875$

الحادثة C توافق الحوادث : $\{d ; f ; g\}$

منه :

$$p(C) = p(d) + p(f) + p(g) = 0{,}30375 + 0{,}01125 + 0{,}12375 = 0{,}43875$$

الحادثة D توافق الحوادث $\{d ; g\}$

منه : $p(D) = p(d) + p(g) = 0{,}30375 + 0{,}12375 = 0{,}4275$

التمرين ـــ 3

نرمي زهرة نرد متوازنة 4 مرات متتابعة

1 ـــ أحسب p احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي يساوي عدد مرات ظهور رقم فردي

2 ـــ أحسب 'p احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم فردي

3 ـــ أجب عن السؤالين (1) و (2) من أجل خمس رميات متتابعة

4 ـــ أجب عن السؤال (1) من أجل n رمية متتابعة $(n > 5)$

الحـل ـــ 3

عند رمي زهرة النرد لدينا مخرجين فقط هما :

S : الحصول على رقم زوجي باحتمال $p(S) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\overline{S}$: الحصول على رقم فردي باحتمال $p(\overline{S}) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

1 ـــ إذن : عند تكرار هذه التجربة 4 مرات نعتبر المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد مرات الحصول على رقم زوجي

إذن : X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد بوسيطين $n = 4$ و $p = \frac{1}{2}$

عدد مرات ظهور رقم زوجي يساوي عدد مرات ظهور رقم فردي

إذن : $X = \frac{4}{2} = 2$

منه : $p = p(X = 2) = C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$

2 ــ عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم فردي أي $X = 3$ أو $X = 4$

منه :

$$p' = p(X > 2)$$
$$= p(X = 3) + p(X = 4)$$
$$= C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) + C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$= 4\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}$$
$$= \frac{5}{16}$$

3 ــ عند إعادة التجربة 5 مرات فإن :

لا يمكن الحصول على عدد مرات ظهور رقم فردي يساوي عدد مرات ظهور رقم زوجي لأن عدد الرميات هو 5

أي فردي $\left(\frac{5}{2} \notin N\right)$

منه : $p = 0$

يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم فردي إذا و فقط إذا كان $X = 3$ أو $X = 4$

أو $X = 5$

أي :

$$p' = p(X > 2)$$
$$= p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5)$$
$$= C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) + C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$= 10\left(\frac{1}{32}\right) + 5\left(\frac{1}{32}\right) + \frac{1}{32}$$
$$= \frac{16}{32}$$
$$= \frac{1}{2}$$

4 ــ إذا أعدنا التجربة n مرة نميز حالتين كمايلي :

الحالة الأولى : n زوجي إذن : $n = 2k$ حيث $k \in IN^*$

إذن :

$$p = p(X = k)$$
$$= C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$
$$= C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{حيث } k = n/2$$

الحالة الثانية : n فردي إذن : $n = 2k + 1$ حيث $k \in IN^*$

في هذه الحالة لا يمكن أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي يساوي عدد مرات ظهور رقم فردي

لأن عدد الرميات فردي منه $p = 0$

التمرين ــ 4

في احدى المسابقات يطرح على المترشح سؤال مرفوق بثلاث أجوبة مقترحة و احد منها فقط صحيحة . فيقدم المترشح إجابة عشوائية و دون تفكير .

1 ــ ما هو احتمال أن تكون إجابته صحيحة .

2 ــ المسابقة مكونة الآن من 5 أسئلة من الشكل السابق .

أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : يقدم المترشح إجابة صحيحة عن 3 أسئلة .

B : يقدم المترشح إجابة صحيحة عن 4 أسئلة .

C : يقدم المترشح إجابة صحيحة عن 5 أسئلة .

3 ـ إذا كان النجاح في المسابقة يقتضي الإجابة الصحيحة عن 3 أسئلة على الأقل . فما هو احتمال نجاح هذا المترشح الذي يعتمد في الإجابة على الطريقة العشوائية .

الحل ـ 4

1 ـ تجربة الإجابة العشوائية على سؤال له 3 اختيارات لها مخرجين فقط هما :

S : الجواب صحيح و احتماله $p(S) = 1/3$

$\overline{S}$: الجواب خاطئ و احتماله $p(\overline{S}) = 2/3$

نتيجة : احتمال أن تكون الإجابة صحيحة هو $1/3$

2 ـ المسابقة مكونة من 5 أسئلة

إذن : بتكرار التجربة 5 مرات نعتبر X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الأجوبة الصحيحة منه X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه $n = 5$ و $p = 1/3$ منه النتائج التالية :

(A $$p(A) = p(X=3) = C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10\left(\frac{1}{27}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{40}{243}$$

(B $$p(B) = p(X=4) = C_5^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right) = 5\left(\frac{1}{81}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{243}$$

(C $$p(C) = p(X=5) = C_5^5\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

3 ـ احتمال الحصول على 3 أجوبة صحيحة على الأقل أي $X = 3$ أو $X = 4$ أو $X = 5$ منه : احتمال النجاح هو :

$$p = p(X=3) + p(X=4) + p(X=5)$$
$$= \frac{40}{243} + \frac{10}{243} + \frac{1}{243}$$
$$= \frac{51}{243} = \frac{17}{81}$$

ملاحظة : في هذا التمرين اعتبرنا أن التلميذ يجاوب إجباريا على السؤال أي دائما يعطي إقتراح سواء كان صحيح أو خاطئ .

التمرين ـ 5

يحب رشيد صناعة النكت لكنه للأسف لا يوفق أحيانا في تشكيل نكتة مضحكة حيث احتمال أن تكون نكتته مضحكة هو 0,05 إذا علمت أن رشيد يشكل نكتة كل يوم . أحسب احتمال أن يشكل نكتة مضحكة في :

A) أسبوع B) شهر (30 يوم) C) سنة (365 يوم)

الحل ـ 5

تجربة رشيد في تشكيل نكتة لها مخرجين فقط هما :

S : النكتة مضحكة باحتمال $p = 0,05$

$\overline{S}$: النكتة ليست مضحكة باحتمال $1 - p = 0,95$

منه : تكرار هذه التجربة n مرة و اعتبار المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد النكت المضحكة التي شكلها رشيد بعد تكرار التجربة n مرة (أي n يوما) فإن X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه n هو عدد الأيام و $p = 0,05$ منه النتائج التالية :

1 ـ احتمال الحصول على نكتة مضحكة في أسبوع $(n = 7)$

$$p(X=1) = C_7^1\,(0,05)^1(0,95)^6 = 7 \times 0,05 \times (0,95)^6$$

2 ـ احتمال الحصول على نكتة مضحكة في شهر $(n = 30)$

$$p(X=1) = C_{30}^1\,(0,05)^1(0,95)^{29} = 30 \times 0,05 \times (0,95)^{29}$$

3 ـ احتمال الحصول على نكتة مضحكة في سنة $(n = 365)$

$$p(X=1) = C_{365}^1(0,05)^1(0,95)^{364} = 365 \times 0,05 \times (0,95)^{364}$$

التمرين ـ 6

نرمي قطعة نقود متوازنة n مرة

ما هو أصغر عدد من الرميات اللازمة حتى يكون احتمال الحصول على وجه واحد على الأقل أكبر تماما من 98 %

الحـل ــ 6

تجربة رمي القطعة النقدية المتوازنة لها مخرجين فقط هما :

S : ظهور الوجه F باحتمال $1/2$

$\overline{S}$: ظهور الظهر P باحتمال $1/2$

باعتبار اعادة التجربة n مرة و المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد مرات الحصول على الوجه F فإن X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 1/2$

منه : احتمال الحصول على وجه واحد على الأقل هي الحادثة العكسية للحادثة $X = 0$

منه الاحتمال المطلوب هو : $1 - p(X = 0)$

أي : $$1 - C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

نتيجة : $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 98\ \%$ يكافئ $1 - 98\ \% > \left(\frac{1}{2}\right)^n$

يكافئ $1 - 0{,}98 > \left(\frac{1}{2}\right)^n$

يكافئ $0{,}02 > \left(\frac{1}{2}\right)^n$

يكافئ $\ln(0{,}02) > n\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

يكافئ $\ln(0{,}02) > -\, n \ln 2$

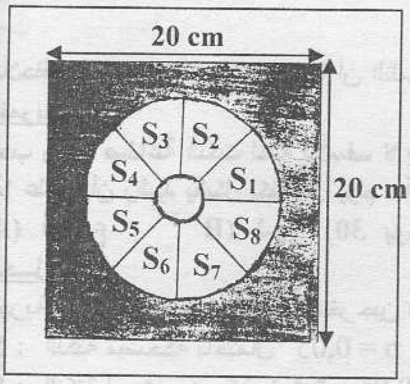
يكافئ $\frac{\ln(0{,}02)}{\ln 2} > -\, n$

يكافئ $n > \frac{-\ln(0{,}02)}{\ln 2}$

يكافئ $n > 5{,}64$

يكافئ $n \geq 6$

خلاصة : أصغر عدد من الرميات اللازمة هو 6 رميات .



التمرين ــ 7

إليك الشكل المقابل :

نضع عشوائيا نقطة على هذا الشكل

احتمال أن تكون النقطة في جزء ما من الشكل هو نسبة مساحة هذا الجزء إلى مساحة المربع بأكمله .

I) 1 ــ أحسب $p(D)$ احتمال أن تكون النقطة على القرص ذو المساحة D

2 ــ أحسب $p(S_1)$ احتمال أن تكون النقطة على الجزء ذو المساحة S_1

II) لتكن القيم التقريبية التالية :

$$p(D) = 0{,}008$$

من أجل $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$ $p(S_k) = 0{,}0785$

نعتبر اللعبة التالية :

إذا كانت النقطة على القرص D نربح المبلغ 10 da

إذا كانت النقطة على أحد الأجزاء S_k نربح k DA مع $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$

إذا كانت النقطة تقع في المنطقة R الملونة نخسر 4 DA

نرمز بـ X للمتغير العشوائي الذي يعبر عن المبلغ المحصل عليه

1 ــ أحسب $p(R)$ ثم الأمل الرياضياتي للمتغير X

2 ــ نلعب مرتين متتابعتين و بكيفيتين مستقلتين . أحسب احتمال الحصول على مبلغ موجب أو معدوم

3 ــ ليكن n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 نلعب n مرة متتابعة .

أحسب الاحتمال p_n للحصول على نقطة واحدة على الأقل داخل القرص D ثم حدد أصغر قيمة لـ n يكون من أجلها $p_n \geq 0{,}9$

الحل ــ 7

مساحة المربع هي $20 \times 20 = 400$ مقدرة بـ cm^2

I) 1 ــ $p(D) = \dfrac{D}{400}$ حيث D هي مساحة القرص D .

2 ــ $p(S_1) = \dfrac{S_1}{400}$ حيث S_1 هي مساحة الجزء S_1

II) 1 ــ
$$\begin{aligned} p(R) &= 1 - [p(D) + \sum_{k=1}^{8} p(S_k)] \\ &= 1 - p(D) - 8\,p(S_k) \\ &= 1 - 0{,}008 - 8(0{,}0785) \\ &= 0{,}364 \end{aligned}$$

لدينا قانون احتمال المتغير العشوائي X كمايلي

X_i	1	2	3	4	5	6	7	8	10	- 4
$p(X = X_i)$	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,008	0,364

منه :
$$\begin{aligned} E(X) &= 0{,}0785(1+2+3+4+5+6+7+8) + 0{,}008(10) + 0{,}364(-4) \\ &= 0{,}0785(36) + 0{,}08 - 1{,}456 \\ &= 1{,}45 \end{aligned}$$

2 ــ الحادثة العكسية للحادثة : الحصول على مبلغ موجب أو معدوم هي

الحادثة : الحصول على مبلغ سالب تماما . و ليكن $p(\overline{S})$ هذا الاحتمال

الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي : $\{RR ; RS_3 ; RS_2 ; RS_1 ; S_3R ; S_2R ; S_1R\}$

منه :
$$\begin{aligned} p(\overline{S}) &= [p(R)]^2 + 6 \times p(R) \times p(S_k) \\ &= (0{,}364)^2 + 6 \times (0{,}364)(0{,}0785) \\ &= 0{,}30394 \end{aligned}$$

نتيجة : احتمال الحصول على مبلغ موجب أو معدوم هو :
$$\begin{aligned} 1 - p(\overline{S}) &= 1 - 0{,}30394 \\ &= 0{,}69606 \end{aligned}$$

3 ــ تجربة وضع نقطة على الشكل لها مخرجين فقط هما :

S : النقطة على القرص D باحتمال $p(S) = 0{,}008$

$\overline{S}$: النقطة خارج القرص D باحتمال $p(\overline{S}) = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$

إذن : بتكرار التجربة n مرة و اعتبار المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد مرات الحصول على نقطة داخل القرص D فإن المتغير X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 0{,}008$

إذن :
$$\begin{aligned} p_n &= p(X \geq 1) \\ &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - C_n^0 (0{,}008)^0 (0{,}992)^n \\ &= 1 - (0{,}992)^n \end{aligned}$$
و هو احتمال الحصول على نقطة على الأقل داخل القرص D

نتيجة : $p_n \geq 0{,}9$ يكافئ $1 - (0{,}992)^n \geq 0{,}9$

يكافئ $1 - 0{,}9 \geq (0{,}992)^n$

يكافئ $0{,}1 \geq (0{,}992)^n$

يكافئ $\ln(0{,}1) \geq n \ln(0{,}992)$

يكافئ $n \geq \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}992)}$

يكافئ $n \geq 286{,}67$

إذن : أصغر قيمة لـ n حتى يكون $p_n \geq 0{,}9$ هي $n = 287$

التمرين ـ 8

يحتوي صندوق على 5 كرات منها 4 سوداء و واحدة بيضاء .

I) نسحب من الصندوق 6 كرات على التوالي مع الارجاع في كل مرة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية عدد مرات ظهور الكرة البيضاء .

1 ـ عرف قانون الاحتمال للمتغير X ثم أحسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري

II) نقوم الآن بالسحب n مرة بنفس الكيفية السابقة .

ليكن X_n المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية عدد مرات ظهور الكرة البيضاء

1 ـ عرف قانون الاحتمال للمتغير X_n ثم أحسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري

III) ليكن Y_n المتغير العشوائي المعرف بـ $Y_n = \frac{X_n}{n}$ الذي يمثل تواترات ظهور القريصة البيضاء

عرف قانون احتمال المتغير Y_n و أحسب أمله الرياضياتي

الحـل ـ 8

عملية سحب كرة من الصندوق لها مخرجين فقط هما :

B : الكرة بيضاء باحتمال $p = 1/5$

$\overline{B}$: الكرة سوداء باحتمال $1 - p = 4/5$

إذن : عملية سحب n كرات على التوالي بارجاع هو تكرار هذه التجربة n مرة منه النتائج التالية :

I) سحب 6 كرات على التوالي بارجاع إذن $n = 6$

X هو المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الكرات البيضاء المسحوبة

إذن : X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه $n = 6$ و $p = 1/5$

منه : $E(X) = n\,p = 6/5$

$$Var(X) = n\,p(1-p) = \frac{6}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

II) نقوم بالسحب n مرة إذن : المتغير X_n الذي يعبر عن عدد الكرات البيضاء المسحوبة يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 1/5$

منه : $E(X_n) = n\,p = n/5$

$$Var(X_n) = n\,p(1-p) = \frac{n}{5}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4\,n}{25}$$

$$\sigma(X_n) = \sqrt{Var(X_n)} = \sqrt{\frac{4\,n}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{n}$$

III) $$Y_n = \frac{X_n}{n} = \frac{1}{n} \times X_n$$

بما أن $1/n$ ثابت و X_n يتبع قانون ثنائي الحد $B(n\,;\,1/5)$ فإن حسب الخواص :

$$E(Y_n) = E\left(\frac{1}{n} \times X_n\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$Var(Y_n) = Var\left(\frac{1}{n} \times X_n\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var(X_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 . \frac{4\,n}{25} = \frac{4}{25\,n}$$

$$\sigma(Y_n) = \sqrt{Var(Y_n)} = \sqrt{\frac{4}{25\,n}} = \frac{2}{5\sqrt{n}}$$

التمرين ـ 9

p قانون احتمال معرف على المجال [1 ; 4] حيث f دالة كثافته معرفة بـ $f(x) = \frac{k}{x^2}$ (k عدد حقيقي)

المطلوب : عين قيمة k

الحـل ـ 9

تكون f دالة كثافة احتمال على المجال [1 ; 4] إذا و فقط إذا كان :

$\begin{cases} \int_1^4 f(x)\,dx = 1 \\ k > 0 \end{cases}$ أي $\int_1^4 \frac{k}{x^2}\,dx = 1$

أي $k\int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx = 1$

أي $k\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = 1$

أي $k\left[-\frac{1}{4}+1\right] = 1$

أي $\frac{3}{4}k = 1$

أي $k = \frac{4}{3}$

نتيجة : $k = \frac{4}{3}$ منه $f(x) = \frac{4}{3x^2}$ (f مستمرة و موجبة على المجال [1 ; 4])

التمرين ـ 10

ليكن p قانون احتمال معرف على المجال [-1 ; 3] و f دالة كثافته معرفة بـ $f(x) = k|x|$

المطلوب : عين قيمة k

الحـل ـ 10

تكون f دالة كثافة احتمال على المجال [-1 ; 3] إذا و فقط إذا كان :

$\begin{cases} \int_{-1}^3 f(x)\,dx = 1 \\ k > 0 \end{cases}$ أي $\int_{-1}^3 k|x|\,dx = 1$

أي $\int_{-1}^0 k|x|\,dx + \int_0^3 k|x|\,dx = 1$

أي $\int_{-1}^0 -kx\,dx + \int_0^3 kx\,dx = 1$

أي $-k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = 1$

أي $-k\left(0-\frac{1}{2}\right) + k\left(\frac{9}{2}-0\right) = 1$

أي $\frac{k}{2} + \frac{9k}{2} = 1$

أي $5k = 1$

أي $k = 1/5$

نتيجة : $k = \frac{1}{5}$ منه $f(x) = \frac{1}{5}|x|$

التمرين ـ 11

X متغير عشوائي معرف على المجال [0 ; π] و f دالة كثافة احتماله معرفة بـ $f(x) = k \sin x$

1 ـ عين قيمة k

2 ـ أحسب $p(x \geq \pi/3)$

3 ـ أحسب $\int_0^\pi x f(x)\,dx$ ماذا يمثل هذا التكامل ؟

الحـل ـ 11

1 ـ f دالة كثافة احتمال على المجال [0 ; π] إذا و فقط إذا كان :

أي $\left.\begin{array}{l}\int_0^\pi f(x)\,dx = 1 \\ k > 0\end{array}\right\}$ $\int_0^\pi k \sin x\,dx = 1$

أي $k\int_0^\pi \sin x\,dx = 1$

أي $k[-\cos x]_0^\pi = 1$

أي $k[1+1] = 1$

أي $k = \dfrac{1}{2}$

نتيجة : $k = \dfrac{1}{2}$ منه $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x$

2 ــ $p\left(X \geq \dfrac{\pi}{3}\right) = p\left(\dfrac{\pi}{3} \leq X \leq \pi\right)$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}\sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}[-\cos x]_{\pi/3}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{4}$$

3 ــ $\int_0^\pi x f(x)\,dx = \int_0^\pi \dfrac{1}{2} x \sin x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi x \sin x\,dx$$

ليكن $I = \int_0^\pi x \sin x\,dx$

نحسب I بالتجزئة كمايلي :

نضع $\left.\begin{array}{l}u(x) = x \\ v'(x) = \sin x\end{array}\right\}$ منه $\left.\begin{array}{l}u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos x\end{array}\right\}$

إذن : $I = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx$

$$= -\pi\cos\pi + 0 + [\sin x]_0^\pi$$

$$= \pi$$

نتيجة : $\int_0^\pi x f(x)\,dx = \dfrac{1}{2} I = \dfrac{\pi}{2}$

التكامل $\int_0^\pi x f(x)\,dx$ يمثل الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X أي $E(X) = \dfrac{\pi}{2}$

<u>التمرين ــ 12</u>

X متغير عشوائي يعبر عن عدد مأخوذ عشوائيا من المجال $[-3 ; 5]$

1 ــ ما هو قانون احتمال المتغير X

2 ــ أحسب امله الرياضياتي $E(X)$

3 ــ أحسب $p(X < 0)$ ؛ $p(X = 0)$ ؛ $p(X \geq 1/3)$ ؛ $p(X \leq 4/5)$

<u>الحـل ــ 12</u>

1 ــ X يتبع قانون توزيع ،نتظم على المجال $[-3 ; 5]$ حيث دالة كثافة احتماله هي $f(x) = \dfrac{1}{5-(-3)} = \dfrac{1}{8}$

2 ــ حسب خواص الدرس : $E(X) = \dfrac{-3+5}{2} = 1$

3 –

$$p(X<0)=p(-3\le X<0)=\int_{-3}^{0}f(x)\,dx=\int_{-3}^{0}\frac{1}{8}\,dx=\frac{1}{8}[x]_{-3}^{0}=\frac{3}{8}$$

$$p(X=0)=p(0\le X\le 0)=\int_{0}^{0}f(x)\,dx=0$$

$$p\left(X\ge\frac{1}{3}\right)=p\left(\frac{1}{3}\le X\le 5\right)=\int_{1/3}^{5}f(x)\,dx=\int_{1/3}^{5}\frac{1}{8}\,dx=\frac{1}{8}[x]_{1/3}^{5}=\frac{1}{8}\left[5-\frac{1}{3}\right]=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

$$p\left(X\le\frac{4}{5}\right)=p\left(-3\le X\le\frac{4}{5}\right)=\int_{-3}^{4/5}f(x)\,dx=\frac{1}{8}[x]_{-3}^{4/5}=\frac{1}{8}\left[\frac{4}{5}+3\right]=\frac{19}{40}$$

<u>التمرين – 13</u>

نأخذ عشوائيا عددا من المجال [13 ; 2] . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A : الحصول على عدد أصغر من 10

B : الحصول على عدد جزؤه الصحيح زوجي .

<u>الحـل – 13</u>

ليكن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن العدد المأخوذ عشوائيا من المجال [13 ; 2] اذن X يتبع قانون توزيع منتظم على المجال [13 ; 2] دالة كثافة احتماله f معرفة بـــ $f(x)=\frac{1}{13-2}=\frac{1}{11}$

منه من أجل كل α و β من المجال [13 ; 2] فإن إذا كان $\alpha<\beta$:

$$p(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{11} d x = \frac{1}{11}[x]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta-\alpha}{11}$$

منه النتائج التالية :

$$p(A) = p(X \le 10) = p(2 \le X \le 10) = \frac{10-2}{11} = \frac{8}{11}$$

$$p(B) = p(2 \le X < 3) + p(4 \le X < 5) + p(6 \le X < 7) + p(8 \le X < 9) + p(10 \le X < 11) + p(12 \le X < 13)$$

$$= \frac{3-2}{11} + \frac{5-4}{11} + \frac{7-6}{11} + \frac{9-8}{11} + \frac{11-10}{11} + \frac{13-12}{11}$$

$$= \frac{6}{11}$$

تفسير : على المجال $[a ; b[$ إذا كان a زوجي فإن كل الأعداد التي تنتمي إلى المجال $[a ; b[$ لها جزء صحيح يساوي a أي زوجي $(a \in N$ و $b = a + 1)$

التمرين ـــ 14

T متغير عشوائي يأخذ قيم في المجال $[0 ; +\infty[$ و يتبع قانونا أسيا وسيطه λ حيث $\lambda = 1$

1 ـــ أرسم المنحنى البياني لدالة كثافة احتمال المتغير T

2 ـــ فسر بيانيا الاحتمالين التاليين : $p(T \le 0,5)$ ؛ $p(T > 1)$

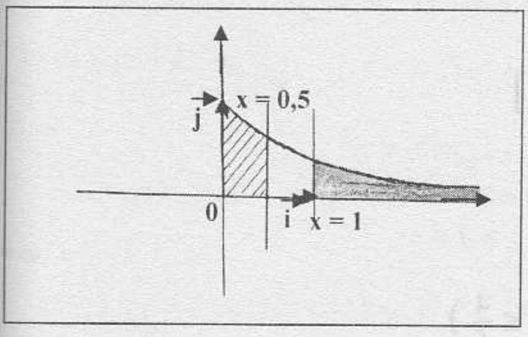
ثم أعط قيمة مقربة لكل منهما .

الحـل ـــ 14

1 ـــ T يتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda = 1$ إذن : دالة كثافة احتماله هي الدالة f المعرفة بـــ $f(x) = e^{-x}$ منه المنحنى التالي :

$x \in [0 ; +\infty[$ ؛ $f(0) = 1$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = -e^{-x}$ إذن : f متناقصة تماما .



2 ـــ التفسير الهندسي :

$$p(T \le 0,5) = p(0 \le T \le 0,5)$$
$$= \int_0^{0,5} f(x) d x$$
$$= \int_0^{0,5} e^{-x} d x$$
$$= S_1$$

حيث S_1 هي مساحة حيز المستوي المحدود بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و محور التراتيب و المستقيم ذو المعادلة $x = 0,5$ إذن : $p(T \le 0,5)$ هي مساحة الجزء المخطط

$$p(T > 1) = \lim_{\alpha \to +\infty} p(1 \le T \le \alpha)$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \int_1^{\alpha} f(x) d x$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \int_1^{\alpha} e^{-x} d x$$
$$= S_2$$

حيث S_2 هي مساحة حيز المستوي المحدود بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ و المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ حيث α يؤول إلى $+\infty$ إذن : $p(T > 1)$ هي مساحة الجزء الملون

القيم المقربة :

$$p(T \le 0,5) = \int_0^{0,5} e^{-x} d x = [-e^{-x}]_0^{0,5} = -e^{-0,5} + 1 = 0.3934$$

$$p(T > 1) = 1 - p(T \le 1)$$
$$= 1 - p(0 \le T \le 1)$$

$$= 1 - \int_0^1 e^{-x}\,dx$$
$$= 1 - [-e^{-x}]_0^1$$
$$= 1 - [-e^{-1} + 1]$$
$$= e^{-1}$$
$$= 0.3678$$

ملاحظة : يمكن حساب $p(T > 1)$ بطريقة أخرى كما يلي :

$$p(T > 1) = \lim_{\alpha \to +\infty} p(1 < T \leq \alpha)$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \int_1^{\alpha} e^{-x}\,dx$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} [-e^{-x}]_1^{\alpha}$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} -e^{-\alpha} + e^{-1}$$

$= e^{-1}$ لأن $\lim_{\alpha \to +\infty} e^{-\alpha} = 0$

$$= 0{,}3678$$

التمرين ــ 15

T متغير عشوائي يأخذ قيمه في المجال $[0 ; +\infty[$ و يتبع قانون احتمال أسي و سيطه $\lambda > 0$ من أجل أي قيمة لــ t يكون للحادثة $(T < t)$ و الحادثة العكسية لها نفس الاحتمال ؟

الحـل ــ 15

T يتبع قانون احتمال أسي إذن : دالة كثافة احتماله هي f حيث $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ليكن $t \in [0 ; +\infty[$

يكون للحادثتين $(T < t)$ و $(T \geq t)$ نفس الاحتمال إذا و فقط إذا كان $p(T < t) = 1/2$

لأن : $p(T < t) + p(T \geq t) = 1$

أي : $2\,p(T < t) = 1$ لأن $p(T < t) = p(T \geq t)$

منه : $p(T < t) = 1/2$

نتيجة : $p(T < t) = \frac{1}{2}$ يكافئ $\int_0^t f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

يكافئ $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{2}$

يكافئ $\lambda \int_0^t e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{2}$

يكافئ $\int_0^t e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{2\lambda}$

يكافئ $\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^t = \frac{1}{2\lambda}$

يكافئ $-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\lambda}$

يكافئ $-e^{-\lambda t} + 1 = 1/2$

يكافئ $-e^{-\lambda t} = -1/2$

يكافئ $e^{-\lambda t} = 1/2$

يكافئ $-\lambda t = \ln(1/2)$

يكافئ $t = \dfrac{\ln(1/2)}{-\lambda}$

يكافئ $t = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$ لأن $-\ln(1/2) = \ln 2$

نتيجة : يكون للحادثتين $(T < t)$ و $(\overline{T < t})$ نفس الاحتمال إذا و فقط إذا كان $t = \frac{1}{\lambda} \ln 2$

التمرين ــ 16

T متغير عشوائي يأخذ قيمته في المجال $[0 ; +\infty[$ و يتبع قانون احتمال أسي وسيطه $\lambda > 0$

برهن أن احتمال الحادثة $\left(T > \frac{1}{\lambda}\right)$ مستقل عن λ ثم أعط قيمة مقربة له

الحــل ــ 16

T يتبع قانون احتمال أسي وسيطه λ إذن : دالة كثافة احتماله هي : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

منه :

$$p\left(T > \frac{1}{\lambda}\right) = 1 - p\left(T \le \frac{1}{\lambda}\right)$$
$$= 1 - \int_0^{1/\lambda} \lambda e^{-\lambda x} dx$$
$$= 1 - \lambda \int_0^{1/\lambda} e^{-\lambda x} dx$$
$$= 1 - \lambda\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{1/\lambda}$$
$$= 1 - \lambda\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(1/\lambda)} + \frac{1}{\lambda}\right]$$
$$= 1 + e^{-1} - 1$$
$$= e^{-1}$$
$$= 0.367879441$$

التمرين ــ 17

g دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0 ; +\infty[$ و تحقق الشروط التالية :

g ليست معدومة

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين t و h فإن $g(t+h) = g(t) \times g(h)$

1 ــ برهن أن $g'(t) = \alpha\, g(t)$ من أجل كل $t \ge 0$ حيث $\alpha = g'(0)$

2 ــ استنتج أن $g(t) = e^{\alpha t}$

الحــل ــ 17

1 ــ لدينا من أجل كل عددين حقيقيين موجبين h و t فإن :

$$g(t+h) = g(h) \times g(t)$$

إذن : من أجل $h = 0$ فإن : $g(t) = g(0) \times g(t)$

منه : $g(0) = \frac{g(t)}{g(t)}$ أي $g(0) = 1$

من جهة أخرى حسب تعريف العدد المشتق عند t فإن :

$$g'(t) = \lim_{x \to t} \frac{g(x) - g(t)}{x - t}$$

نضع $x = t + h$

إذن :

$$g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{t + h - t}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(t) \times g(h) - g(t)}{h}$$ لأن $g(t+h) = g(t) \times g(h)$
$$= \lim_{h \to 0} g(t)\left(\frac{g(h) - 1}{h}\right)$$
$$= \lim_{h \to 0} g(t)\left(\frac{g(h) - g(0)}{h - 0}\right)$$ لأن $g(0) = 1$
$$= g(t) \times g'(0)$$ لأن حسب التعريف فإن

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h - 0} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$$

نتيجة : $g'(t) = \alpha\, g(t)$ حيث $\alpha = g'(0)$

2 ـ لدينا : $g'(t) = \alpha\, g(t)$ معادلة تفاضلية من الشكل $y' = a\, y$

منه : $g(t) = c\, e^{\alpha t}$ حيث c ثابت حقيقي

لكن $g'(0) = \alpha$ حيث $g'(t) = \alpha\, c\, e^{\alpha t}$

إذن : $\alpha\, c = \alpha$

منه : $c = 1$

نتيجة : $g(t) = e^{\alpha t}$ حيث $\alpha = g'(0)$

التمرين ـ 18

إذا كانت مدة عمر تلفاز بالسنوات هو متغير عشوائي يتبع قانون احتمال أسي وسيطه λ حيث متوسط عمر التلفاز هو 14
أحسب مايلي :
1 ـ وسيط القانون الأسي λ .
2 ـ أوجد دالة كثافة احتمال هذا المتغير العشوائي .
3 ـ ما هو احتمال أن يكون عمر تلفاز ما أكبر من 20 سنة .

الحـل ـ 18

ليكن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عمر التلفاز

X يتبع قانون احتمال أسي وسيطه λ إذن : دالة كثافة احتماله هي $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ حيث $\lambda > 0$

1 ـ متوسط عمر التلفاز هو 14 سنة إذن : $E(X) = 14$

$E(X) = 14$ يكافئ $\frac{1}{\lambda} = 14$

يكافئ $\lambda = \frac{1}{14}$

2 ـ $\lambda = \frac{1}{14}$ إذن : دالة كثافة احتمال المتغير X هي : $f(x) = \frac{1}{14}\, e^{-\frac{1}{14}x}$

3 ـ
$$\begin{aligned}
p(X > 20) &= 1 - p(0 \le X \le 20)\\
&= 1 - \int_0^{20} f(x)\, dx\\
&= 1 - \int_0^{20} \frac{1}{14}\, e^{-\frac{1}{14}x}\, dx\\
&= 1 - \frac{1}{14}\int_0^{20} e^{-\frac{1}{14}x}\, dx\\
&= 1 - \frac{1}{14}\left[-14\, e^{-\frac{1}{14}x}\right]_0^{20}\\
&= 1 - \frac{1}{14}\left[-14\, e^{-\frac{20}{14}} + 14\right]\\
&= e^{-\frac{20}{14}}\\
&\approx 0{,}23965
\end{aligned}$$

التمرين ـ 19

عمر مقاومة كهربائية يتبع قانون احتمال أسي نرمز له بـ X (معبرا عنه بالأيام) وسيطه $\lambda = 0{,}0012$
1 ـ ما هو متوسط عمر مقاومة كهربائية
2 ـ أحسب احتمال أن تعمر مقاومة مدة :
A) أكثر من 100 يوم .
B) أقل من 60 يوم .
3 ـ أحسب t (عدد الأشهر ذات 30 يوم) حتى يكون احتمال أن تعمر مقاومة ما مدة أقل من t شهرا هو 0,5

الحـل ـ 19

X يتبع قانون أسي وسيطه $\lambda = 0{,}0012$ إذن : دالة كثافة احتماله هي $f(x) = 0{,}0012\, e^{-0{,}0012x}$ منه النتائج التالية :

1 ـــ متوسط عمر مقاومة هو : $E(X) = \dfrac{1}{0,0012} = 833,33$

أي : متوسط عمر مقاومة هو 833 يوم و 8 ساعات

2 ـــ
$$p(A) = p(X \geq 100)$$
$$= 1 - p(X \leq 100)$$
$$= 1 - \int_0^{100} 0,0012\, e^{-0,0012x}\, dx$$
$$= 1 - 0,0012 \int_0^{100} e^{-0,0012x}\, dx$$
$$= 1 - 0,0012\Big[-\frac{1}{0,0012} e^{-0,0012x}\Big]_0^{100}$$
$$= e^{-0,0012\times 100}$$
$$= e^{-0,12}$$
$$\approx 0,886$$

3 ـــ
$$p(B) = p(X \leq 60)$$
$$= \int_0^{60} 0,0012\, e^{-0,0012x}\, dx$$
$$= 0,0012\Big[-\frac{1}{0,0012} e^{-0,0012x}\Big]_0^{60}$$
$$= 0,0012\Big[\frac{-1}{0,0012} e^{-0,0012\times 60} + \frac{1}{0,0012}\Big]$$
$$= 1 - e^{-0,072}$$
$$= 0,069$$

3 ـــ ليكن $t > 0$

$p(X \leq t) = 0,5$ يكافئ $\int_0^t 0,0012\, e^{-0,0012x}\, dx = 0,5$

يكافئ $0,0012\Big[-\dfrac{1}{0,0012} e^{-0,0012x}\Big]_0^t = 0,5$

يكافئ $1 - e^{-0,0012t} = 0,5$

يكافئ $-e^{-0,0012t} = -0,5$

يكافئ $-0,0012\,t = \ln(0,5)$

يكافئ $t = \dfrac{\ln(0,5)}{-0,0012}$

يكافئ $t = 577,62$

نتيجة : $t = 577,62$ يوم أي 19 أشهر و يوم واحد و ساعة و 40 دقيقة

التمرين ـــ 20

في مركز بريد احدى البلديات مدة الانتظار عند الشباك بالدقائق هي متغير عشوائي X يتبع قانون أسي وسيطه $\lambda = 0,07$

1 ـــ ما هو متوسط وقت الانتظار

2 ـــ أحسب احتمال الحوادث التالية : A) أن ننتظر أكثر من نصف ساعة

B) أن ننتظر أقل من 20 دقيقة .

الحــل ـــ 20

دالة كثافة احتمال المتغير X هي $f(x) = 0,07\, e^{-0,07x}$

1 ـــ $E(X) = \dfrac{1}{0,07} = 14,285$

إذن : متوسط وقت الانتظار هو 14,285 دقيقة .

2 ـــ
$$p(A) = p(X \geq 30)$$
$$= 1 - p(X \leq 30)$$
$$= 1 - \int_0^{30} 0,07\, e^{-0,07x}\, dx$$

$$= 1 - 0{,}07\left[\frac{-1}{0{,}07}\, e^{-0.07x}\right]_0^{30}$$
$$= 1 + e^{-0.07\times 30} - 1$$
$$= 0{,}1224$$
$$p(B) = p(X \le 20)$$
$$= \int_0^{20} 0{,}07\, e^{-0.07x}\, d\,x$$
$$= 0{,}07\left[\frac{-1}{0{,}07}\, e^{-0.07x}\right]_0^{20}$$
$$= 1 - e^{-0.07\times 20}$$
$$= 0.7534$$

التمرين ــ 21

نهتم بدراسة متوسط عمر جهاز إلكتروني (بالأسابيع) . نعبر عن هذه الوضعية بقانون احتمال p لمتوسط العمر . من دون أعطال معرف على المجال $[0\,;+\infty[$ حيث احتمال أن يكون الجهاز في حالة جيدة طيلة المدة t

هو $p([0\,;t[) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x}\, d\,x$

أثبتت دراسة إحصائية أن 50% من الأجهزة المشغلة منذ 200 أسبوع لا زالت في حالة جيدة و بالتالي $p([0\,;200[) = 0{,}5$

1 ــ برهن أن $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$

2 ــ ما هو احتمال أن يكون عمر جهاز ما أكبر من 300 أسبوع

3 ــ نقبل أن متوسط عمر الأجهزة معطى بالعلاقة $d_m = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, d\,x$

A) برهن أن $\int_0^{\alpha} \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, d\,x = \dfrac{-\lambda\,\alpha\, e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\alpha} + 1}{\lambda}$

B) استنتج d_m

الحـل ــ 21

1 ــ $p([0\,;200[) = 0{,}5$ يكافئ $\int_0^{200} \lambda\, e^{-\lambda x}\, d\,x = 1/2$

يكافئ $[-e^{-\lambda x}]_0^{200} = 1/2$

يكافئ $-e^{-200\lambda} + 1 = 1/2$

يكافئ $-e^{-200\lambda} = -1/2$

يكافئ $-200\,\lambda = \ln(1/2)$

يكافئ $-200\,\lambda = -\ln 2$

يكافئ $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$

2 ــ
$$p([0\,;300[) = \int_0^{300} \lambda\, e^{-\lambda x}\, d\,x$$
$$= [-e^{-\lambda x}]_0^{300}$$
$$= 1 - e^{-300\lambda}$$
$$= 1 - e^{\frac{-300\ln 2}{200}}$$
$$= 0{,}6464$$

3 ــ A) ليكن $I = \int_0^{\alpha} \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, d\,x$

باستعمال التكامل بالتجزئة :

نضع $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\, e^{-\lambda x} \end{array}\right\}$

منه :
$$I = [-\,x\, e^{-\lambda x}]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-\lambda x}\, d\,x$$
$$= -\,\alpha\, e^{-\lambda\alpha} + \left[-\,\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda x}\right]_0^{\alpha}$$
$$= -\,\alpha\, e^{-\lambda\alpha} - \frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\alpha} + \frac{1}{\lambda}$$
$$= \frac{-\,\lambda\,\alpha\, e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\alpha} + 1}{\lambda}$$ و هو المطلوب

(B
$$d_m = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, d\,x$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{-\,\lambda\,\alpha\, e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\alpha} + 1}{\lambda}$$
$$= \frac{1}{\lambda}$$ لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\alpha \to +\infty} e^{-\lambda\alpha} = 0 \\ \lim\limits_{\alpha \to +\infty} -\,\lambda\,\alpha\, e^{-\lambda\alpha} = 0 \end{array}\right\}$
$$= \frac{200}{\ln 2}$$
$$\approx 288{,}539$$

نتيجة : متوسط عمر الأجهزة هو 288,539 أسبوع

<u>التمرين ــ 22</u>

في شركة متخصصة لانتاج الثلاجات أثبت مراقب نوعية أن الثلاجة يمكن أن تحوي عيبين : إما عيب في التلحيم باحتمال قدره 0,03 أو عيب إلكتروني باحتمال 0,02 حيث العيبين مستقلين .
نقول عن ثلاجة أنها غير صالحة إذا وجد فيها أحد العيبين

1 ــ برهن أن احتمال أن تكون ثلاجة ما غير صالحة هو 0,0494

2 ــ عرضت الشركة في سوق ما 800 ثلاجة . ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق الثلاجات المعروضة للبيع بعدد الثلاجات غير الصالحة
A) عرف قانون احتمال المتغير X
B) أحسب E(X) الأمل الرياضياتي لــ X

3 ــ إشترى أحد التجار 25 ثلاجة من هذه الشركة
A) أحسب احتمال وجود ثلاجتين غير صالحتين
B) تاجر آخر يريد شراء عدد من الثلاجات بشرط أن يكون احتمال حصوله على ثلاجة غير صالحة على الأقل ; أقل من 50 %
أحسب أكبر عدد من الثلاجات يمكن أن يشتريها هذا التاجر

4 ــ Y هو المتغير العشوائي الذي يرفق كل ثلاجة من هذه الشركة بمدة صلاحيتها(مقدرا بالأيام)
إذا علمت أن Y يتبع قانون أسي وسيطه 0,0007 على المجال $[0\,;+\infty[$
أحسب احتمال أن تكون مدة صلاحية ثلاجة ما تتراوح بين 700 و 1000 يوم .

<u>الحـل ــ 22</u>

1 ــ لتكن الحوادث : S : الثلاجة ذات عيب في التلحيم .
E : الثلاجة ذات عيب الكتروني .
N : الثلاجة غير صالحة

لدينا :
$$p(N) = p(S \cup E)$$
$$= p(S) + p(E) - p(S \cap E)$$
$$= p(S) + p(E) - p(S) \times p(E)$$ لأن الحادثتين E و S مستقلتين
$$= 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}03 \times 0{,}02$$
$$= 0{,}0494$$

2 ــ كل ثلاجة يمكن أن تكون في مخرجين فقط هما :

N : الثلاجة عير صالحة باحتمال $p = 0,0494$

$\overline{N}$: الثلاجة صالحة باحتمال $1 - p = 0,9506$

A) إذن : إذا اعتبرنا X متغير عشوائي يعبر عن عدد الثلاجات غير الصالحة من بين 800 ثلاجة فإن X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه $n = 800$ و $p = 0,0494$

B) $E(X) = n\,p = 800(0,0494) = 39,52$

3 ـ A) نعتبر T المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الثلاجات غير الصالحة من بين 25 ثلاجة إذن : T يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه $n = 25$ و $p = 0,0494$

منه : $p(T = 2) = C_{25}^{2}\,(0,0494)^2(0,9506)^{23}$

$= 0,732108(0,9506)^{23}$

B) ليكن S المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الثلاجات غير الصالحة من بين n ثلاجة إذن : S يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 0,0494$

الحادثة ثلاجة غير صالحة على الأقل هي الحادثة العكسية لـ كل الثلاجات صالحة منه الاحتمال هو : $1 - p(S = 0)$

$1 - p(S = 0) \le 50\,\%$ يكافئ $1 - C_n^0\,(0,9506)^n \le 1/2$

يكافئ $-(0,9506)^n \le -1/2$

يكافئ $(0,9506)^n \ge 1/2$

يكافئ $n\ln(0,9506) \ge \ln(1/2)$

يكافئ $n \le \dfrac{\ln(1/2)}{\ln(0,9506)}$ لأن $\ln(0,9506) < 0$

يكافئ $n \le 13,6818$

يكافئ $n \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\,;13\}$

إذن : أكبر عدد من الثلاجات يمكن للتاجر أن يشتريها هو 13

4 ـ دالة كثافة احتمال Y هي $f(x) = 0,0007\,e^{-0,0007x}$

منه : $p(700 \le Y \le 1000) = \int_{700}^{1000} 0,0007\,e^{-0,0007x}\,dx$

$= [-e^{-0,0007x}]_{700}^{1000}$

$= -e^{-0,0007\times 1000} + e^{-0,0007\times 700}$

$= e^{-0.49} - e^{-0.7}$

$= 0,11604$

التمرين ـ 23

يحتوي صندوق على كرات لا نفرق بينها عند اللمس و موزعة كمايلي : 10 % منها خضراء و عدد الكرات البيضاء هو 3 مرات عدد الكرات الخضراء

يسحب لاعب من الصندوق كرة عشوائيا :

إذا كانت الكرة حمراء يأخذ ربحا قاعديا

إذا كانت الكرة بيضاء يأخذ مربع الربح القاعدي

إذا كانت الكرة خضراء يخسر مكعب الربح القاعدي

I) نفرض أن الربح القاعدي هو 20 DA

1 ـ أكتب قانون احتمال المتغير X الذي يعبر عن مبلغ الربح

2 ـ أحسب الربح المتوسط المأمول .

II) نريد تعيين g_0 قيمة الربح القاعدي حتى يكون أمل الربح أكبر ما يمكن

ليكن x الربح القاعدي بالدينار .

1 ـ أثبت أن المسألة تؤول إلى دراسة النهايات الحدية للدالة f المعرفة على المجال $[0\,;+\infty[$ بـ

$$f(x) = -0,1\,x^3 + 0,3\,x^2 + 0,6\,x$$

2 ـ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0\,;+\infty[$ ثم استنتج قيمة g_0

الحـل ـ 23

لتكن الحوادث التالية : R : سحب كرة حمراء

B : سحب كرة بيضاء

V : سحب كرة خضراء

10 % من الكرات خضراء إذن $p(V) = 0{,}1$

عدد الكرات البيضاء هو 3 مرات عدد الكرات الخضراء إذن : $p(B) = 3\,p(V) = 0{,}3$

نتيجة : $p(R) = 1 - [p(V) + p(B)] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

I) 1 ــ القيم الممكنة لــ X هي : $\{20 ; 400 ; -8000\}$

قانون احتمال المتغير X :

X_i	20	400	- 8000
$p(X = X_i)$	0,6	0,3	0,1

2 ــ الربح المتوسط المأمول :

$$E(x) = 20(0{,}6) + 400(0{,}3) - 8000(0{,}1)$$
$$= 12 + 120 - 800$$
$$= -668$$

ملاحظة : الأمل الرياضياتي سالب أي خسارة (ليست في صالح الأعب)

II) 1 ــ ليكن G المتغير العشوائي الذي يعبر عن مبلغ الربح

القيم الممكنة لــ G هي $\{x ; x^2 ; -x^3\}$ حيث x هو الربح القاعدي ($x \in [0 ; +\infty[$)

منه قانون احتمال المتغير G هو كمايلي :

g_i	x	x^2	$-x^3$
$p(G = g_i)$	0,6	0,3	0,1

أمل الربح هو : $E(G) = 0{,}6\,x + 0{,}3\,x^2 - 0{,}1\,x^3$

نتيجة : $\begin{cases} E(G) = f(x) \\ x \in [0 ; +\infty[\end{cases}$

منه : يكون أمل الربح اعظميا اذا وفقط اذا كان لــ f قيمة حدية أعظمية على المجال $]0 ; +\infty[$

2 ــ تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$:

f مستمرة على $[0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f(0) = 0$

$f'(x) = -0{,}3\,x^2 + 0{,}6\,x + 0{,}6$
$= 0{,}3(-x^2 + 2x + 2)$

إشارة f ' على $[0 ; +\infty[$

$\Delta = 4 + 8 = 12$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2 - 2\sqrt{3}}{-2} = 1 + \sqrt{3} \\ x_2 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{3}}{-2} = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

منه :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	0	−	

منه جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$:

x	0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	1,8392	↘	$-\infty$

$$f(1+\sqrt{3}) = 0{,}6(1+\sqrt{3}) + 0{,}3(1+\sqrt{3})^2 - 0{,}1(1+\sqrt{3})^3 \approx 1.8392$$

نتيجة : يكون أمل الربح أكبر ما يمكن قيمته 1.8392 من أجل قيمة الربح القاعدي $g_0 = 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}7320$ DA

التمرين ــ 24

في دراسة أعدتها مؤسسة للكهرباء عن الأخطار التي يتعرض لها عمالها تبين أن كل عامل معرض إلى خطرين رئيسيين هما :
الخطر A : سقوط العامل من العمود الكهربائي باحتمال 0,03 و الخطر B : تعرض العامل لصعق كهربائي باحتمال 0,17
نقول عن عامل أنه مصاب إذا تعرض إلى أحد الخطرين . (باعتبار أن الخطرين مستقلين)
1 ــ نأخذ عشوائيا عامل من المؤسسة . أثبت أن احتمال أن يكون مصابا هو 0,1949
2 ــ تضم المؤسسة 500 عامل . ليكن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد العمال المصابين في المؤسسة .
عرف قانون احتمال X. و أحسب أمله الرياضياتي .
3 ــ a) في فصل الشتاء شنلت المؤسسة فوجا مكون من 10 عمال للتدخل السريع .
أحسب احتمال أن يكون في هذا الفوج أكثر من عاملين مصابين .
b) حتى لا يؤثر عدد المصابون على أداء زملائهم فكرت إدارة المؤسسة في تشكيل فرع للتدخل السريع بحيث يكون احتمال وجود عامل مصاب على الأقل ; أقل من 50 % . فما هو أكبر عدد من العمال يمكن أن يضمه هذا الفرع .

الحـل ــ 24

1 ــ لتكن S الحادثة " العامل مصاب"

$$\begin{aligned} p(S) &= p(A \cup B) \\ &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= p(A) + p(B) - p(A) \times p(B) \\ &= 0.03 + 0.17 - 0.03(0.17) \\ &= 0.1949 \end{aligned}$$

لأن الحادثتين A و B مستقلتين

2 ــ تجربة اختيار عامل لها مخرجين فقط هما :

S : باحتمال $p = 0{,}1949$: العامل مصاب

$\overline{S}$: باحتمال $1 - p = 0{,}8051$: العامل غير مصاب

إذن : بتكرار التجربة 500 مرة فإن المتغير X الذي يعبر عن عدد العمال المصابين يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه $n = 500$ و $p = 0{,}1949$

إذن : من أجل $0 \le k \le 500$ فإن $p(X=k) = C_{500}^{k}(0{,}1949)^k(0{,}8051)^{500-k}$

منه : $E(X) = n\,p = 500(0{,}1949) = 97{,}45$

3 ــ ليكن Y_n المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد العمال المصابين من بين n عامل

إذن : Y_n يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 0{,}1949$

حيث $p(X=k) = C_n^k(0{,}1949)^k(0{,}8051)^{n-k}$ مع $0 \le k \le n$

a) إذا كان $n = 10$ نحصل على :

$$\begin{aligned} p(Y_{10} > 2) &= 1 - p(Y_{10} \le 2) \\ &= 1 - [p(Y_{10}=0) + p(Y_{10}=1) + p(Y_{10}=2)] \end{aligned}$$

لدينا :

$$p(Y_{10}=0) = C_{10}^{0}(0{,}1949)^0(0{,}8051)^{10} = (0{,}8051)^{10}$$

$$p(Y_{10}=1) = C_{10}^{1}(0{,}1949)(0{,}8051)^9 = 1{,}949(0{,}8051)^9$$

$$p(Y_{10}=2) = C_{10}^{2}(0{,}1949)^2(0{,}8051)^8 = 1{,}7093(0{,}8051)^8$$

نتيجة :

$$\begin{aligned} p(Y_{10} > 2) &= 1 - [(0{,}8051)^{10} + 1{,}949(0{,}8051)^9 + 1{,}7093(0{,}8051)^8] \\ &= 1 - (0{,}8051)^8[(0{,}8051)^2 + 1{,}5691 + 1{,}7093] \\ &\approx 0{,}307 \end{aligned}$$

b) الحادثة وجود عامل مصاب على الأقل هي الحادثة العكسية للحادثة لا يوجد أي عامل مصاب إذن :

$1 - p(Y_n = 0) \le 50\,\%$ يكافئ $1 - p(Y_n = 0) \le 1/2$

يكافئ $1 - \dfrac{1}{2} \le p(Y_n = 0)$

يكافئ $p(Y_n = 0) \ge 1/2$

يكافئ $C_n^0(0{,}1949)^0(0{,}8051)^n \ge 1/2$

يكافئ $(0,8051)^n \geq 0,5$

يكافئ $n \ln(0,8051) \geq \ln(0,5)$

يكافئ $n \leq \dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,8051)}$

يكافئ $n \leq 3,197$

يكافئ $n \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

نتيجة : أكبر عدد من العمال يمكن أن يضمه هذا الفوج هو 3

التمرين ــ 25

لاحظ مدير ثانوية ارتفاع عدد الغيابات و تكرارها عند بعض التلاميذ و عندما بحث في الأمر ، وجد أن أسباب الغياب تتمثل في المرض أو مشكل النقل .

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يعبر عن المدة الزمنية (بالأيام) التي يدرسها التلميذ أحمد دون أي غياب .

نقبل أن X يتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda = 0,01$ حيث قانون الاحتمال معرف بـ :

$$p(X \leq \alpha) = \int_0^{\alpha} 0,01\, e^{-0,01x}\, dx$$

1 ــ أحسب احتمال أن تكون الفترة الدراسية دون غياب لأحمد هي :

a) محصورة بين 30 و 60 يوم

b) أكبر من 90 يوم

2 ــ باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{x}{100} e^{-\frac{1}{100}x}\, dx$

3 ــ أحسب $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$ ماذا تمثل هذه النهاية .

4 ــ تضم هذه الثانوية N تلميذ حيث الفترات الدراسية التي يقضيها كل تلميذ دون غياب عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة مثنى مثنى تتبع نفس القانون الأسي ذو الوسيط $\lambda = \dfrac{1}{100}$

d عدد حقيقي موجب نضع Y_d المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد التلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة الفترة d (بالأيام)

a) برهن أن Y_d يتبع قانون ثنائي الحد وسيطاه N و $e^{-\lambda d}$

b) أعط العدد المتوسط للتلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة الفترة d بالأيام .

الحـل ــ 25

1 ــ $p(a) = p(30 \leq X \leq 60)$

$= \displaystyle\int_{30}^{60} 0,01\, e^{-0,01x}\, dx$

$= [- e^{-0,01x}]_{30}^{60}$

$= - e^{-0,01(60)} + e^{-0,01(30)}$

$= 0,1920$

$p(b) = p(X \geq 90)$

$= 1 - p(X \leq 90)$

$= 1 - \displaystyle\int_0^{90} 0,01\, e^{-0,01x}\, dx$

$= 1 - [- e^{-0,01x}]_0^{90}$

$= 1 - [- e^{-0,01(90)} + 1]$

$= 0,4065$

2 ــ $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{x}{100} e^{-\frac{1}{100}x}\, dx$

التكامل بالتجزئة :

نضع $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}x} \end{cases}$ منه: $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = - e^{-\frac{1}{100}x} \end{cases}$

إذن :
$$I(\alpha) = \left[- x e^{-\frac{1}{100}x}\right]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-\frac{1}{100}x} dx$$
$$= - \alpha e^{-\frac{1}{100}\alpha} + \left[- 100 e^{-\frac{1}{100}x}\right]_0^{\alpha}$$
$$= - \alpha e^{-0,01\alpha} - 100 e^{-0,01\alpha} + 100$$

3 ــ $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} - \alpha e^{-0,01\alpha} - 100 e^{-0,01\alpha} + 100 = 100$

العدد $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = 100$ يمثل الأمل الرياضياتي للمتغير X

أي الفترة المتوسطة بالأيام التي يدرس فيها تلميذ دون أي غياب .

4 ــ احتمال أن يكون تلميذ لم يتغيب طيلة الفترة d هو :
$$p(X \geq d) = 1 - p(X \leq d)$$
$$= 1 - \int_0^{d} 0,01 e^{-0,01x} dx$$
$$= 1 - [- e^{-0,01x}]_0^{d}$$
$$= 1 - [- e^{-0,01d} + 1]$$
$$= e^{-0,01d}$$

a) إذن : Y_d الذي يعبر عن عدد التلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة الفترة d يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه N و $p = e^{-0,01d}$

إذن : من أجل $0 \leq k \leq N$: $p(Y_d = k) = C_N^k (e^{-0,01d})^k (1 - e^{-0,01d})^{N-k}$

b) $E(Y_d) = N p = N e^{-0,01d}$

إذن : العدد المتوسط للتلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة الفترة d هو $[N e^{-0,01d}] + 1$ حيث $[x]$ هو الجزء الصحيح لــ x (لأن عدد التلاميذ المطلوب هو عدد طبيعي)

التمرين ــ 26

مدة صلاحية آلة بالساعات تتبع قانون أسي p معرف على $[0 ; + \infty[$ وسيطه $\lambda = 0,0005$ حيث احتمال أن تتعطل الآلة قبل الزمن t هو : $p([0 ; t[) = \int_0^{t} \lambda e^{-\lambda x} dx$

1 ــ هل احتمال أن تكون مدة صلاحية آلة أكبر من 2500 ساعة هو :

a) $e^{\frac{2500}{2000}}$ b) $e^{\frac{-5}{4}}$ c) $1 - e^{\frac{-2500}{2000}}$ d) $e^{\frac{-2000}{2500}}$

2 ــ مدة الصلاحية المتوسطة للآلة معطاة بالعلاقة $E = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} \lambda x e^{-\lambda x} dx$

هل مدة الصلاحية المتوسطة بالساعات هي :

a) 3500 b) 2000 c) 2531,24 d) 3000

الحـل ــ 26

1 ــ
$$p([2500 ; + \infty[) = 1 - p([0 ; 2500[)$$
$$= 1 - \int_0^{2500} 0,0005 e^{-0,0005x} dx$$
$$= 1 - [- e^{-0,0005x}]_0^{2500}$$
$$= e^{-0,0005 \times 2500}$$
$$= e^{-1,25}$$
$$= e^{\frac{-5}{4}}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو b) $e^{\frac{-5}{4}}$

2 _ $E = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} \lambda x e^{-\lambda x} dx$

باستعمال التكامل بالتجزئة :

نضع $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = - e^{-\lambda x} \end{cases}$

منه :

$$\int_0^{\alpha} \lambda x e^{-\lambda x} dx = [- x e^{-\lambda x}]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-\lambda x} dx$$

$$= - \alpha e^{-\lambda \alpha} + \left[- \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\alpha}$$

$$= - \alpha e^{-\lambda \alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \alpha} + \frac{1}{\lambda}$$

نتيجة :

$$E = \lim_{\alpha \to +\infty} \left(- \alpha e^{-\lambda \alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \alpha} + \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{0.0005}$$

$$= 2000$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو b) 2000