الإحتمالات الشرطية

Kimou.

القوائـــم

تعريف : (Ω) مجموعة منتهية ذات n عنصر حيث $n \in IN^*$ و $p \in IN^*$

نسمي قائمة ذات p عنصر من المجموعة (Ω) كل متتالية مرتبة من p حد مأخوذ من المجموعة (Ω)

مثال : $(\Omega) = \{1 ; 2 ; 3\}$

قوائم المجموعة (Ω) ذات عنصرين هي

$\{(1 ; 1) ; (1 ; 2) ; (1 ; 3) ; (2 ; 1) ; (2 ; 2) ; (2 ; 3) ; (3 ; 1) ; (3 ; 2) ; (3 ; 3)\}$

ملاحظة : عدد القوائم ذات p عنصر من المجموعة ذات n عنصر هو n^p

مثلا : في المثال السابق عدد القوائم ذات عنصرين من المجموعة $\{1 ; 2 ; 3\}$ هو $3^2 = 9$

الترتيبة :

(Ω) مجموعة منتهية ذات n عنصرا حيث $n \in IN^*$ و $p \in IN^*$

كل قائمة ذات p عنصرا متمايزا مثنى مثنى من عناصر المجموعة (Ω) تسمى ترتيبة ذات p عنصرا من المجموعة (Ω)

و عددها هو A_n^p معرف كمايلي : $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times (n-p+1)$

حالات خاصة :

إذا كان $p > n$ فإن $A_n^p = 0$

إذا كان $p = n$: $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1$ نرمز له بـــ $n!$ و يقرأ "n عاملي" أو "مفكوك n"

في هذه الحالة كل ترتيبة تسمى أيضا تبديلة ذات n عنصر من المجموعة (Ω)

نشاط :

نريد ترتيب 8 أشخاص حول طاولة مستديرة

بكم طريقة مختلفة يمكن تحديد وضعية كل شخص ؟

الحـل :

إذا اعتبرنا كل وضعية للجلوس هي قائمة ذات 8 عناصر من مجموعة الأشخاص ذات 8 عناصر فإن عدد هذه الوضعيات هو تبديلات لـــ 8 عناصر من بين 8 عناصر لأن الأشخاص مختلفة مثنى مثنى . و عليه فعدد الوضعيات المختلفة للجلوس هو $8!$

التوفيقات :

(Ω) مجموعة منتهية ذات n عنصرا حيث $n \in IN^*$. p عدد طبيعي حيث $0 \le p \le n$

نسمي توفيقة ذات p عنصر من عناصر المجموعة (Ω) كل جزء ذات p عنصر من المجموعة (Ω)

نرمز إلى عدد التوفيقات ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر بالرمز C_n^p أو $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ و نقرأ : توفيقة ذات p عنصر من بين n عنصر .

نتائج : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$C_n^0 = 1$: يوجد جزء وحيد خالي

$C_n^n = 1$: يوجد جزء وحيد يحتوي على كل عناصر المجموعة (Ω) و هو (Ω)

إذا كان $0 \le p \le n$ فإن :
$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

مثال :
$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 120$$

خواص أساسية :

n و p عددين طبيعيين حيث $0 \le p \le n$

1 — $C_n^p = C_n^{n-p}$

2 — $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$

مثلث باسكال : هو مثلث يسمح بحساب C_n^p باستعمال الخواص كمايلي :

← الأسطر تمثل العدد n

← الأعمدة تمثل العدد p

← العمود الأول يمثل C_n^0 إذن : $C_n^0 = 1$

← الأعمدة الأخيرة تمثل C_n^n إذن : $C_n^n = 1$

← حسب الخاصية $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$

يمكن التنقل من سطر إلى آخر .

أنظر المثلث المقابل :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	C_n^p	C_n^{p+1}	6	1	
7	1	7			C_{n+1}^{p+1}			1

نشاط :

يحتوي صندوق على 9 كرات لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد . فما هو عدد الحالات الممكنة ؟

الحــل :

كل سحب لثلاث كرات هو توفيقة لــ 3 عناصر من بين 9 عناصر (جزء ذات 3 عناصر من مجموعة ذات 9 عناصر)

إذن : عدد الحالات الممكنة هو : $C_9^3 = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$

دستور ثنائي الحد

A و B عددان حقيقيان . n عدد طبيعي غير معدوم .

$$(A+B)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \times A^{n-p} \times B^p$$

$$= A^n + C_n^1 A^{n-1} B + C_n^2 A^{n-2} B^2 + \dots + C_n^{n-1} A B^{n-1} + B^n$$

مثال :

$$(a+b)^2 = a^2 + C_2^1 \, a\, b + b^2 = a^2 + 2\, a\, b + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + C_3^1 \, a^2\, b + C_3^2 \, a\, b^2 + b^3 = a^3 + 3\, a^2\, b + 3\, a\, b^2 + b^3$$

نشاط :

أحسب $\mathbf{A = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k C_n^k}$

الحــل :

$$A = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times C_n^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times (1)^{n-k} \times C_n^k$$

إذن : حسب دستور ثنائي الحد : $A = \left(\frac{1}{2} + 1\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

نشاط :

أحسب $B = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{n-k}}{4^n} \times C_n^k$

الحـل :

$$B = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{n-k}}{4^n} \times C_n^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 3^{n-k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times C_n^k$$

إذن : حسب دستور ثنائي الحد : $B = \left(\frac{1}{4} + 3\right)^n = \left(\frac{13}{4}\right)^n$

نمذجة تجربة عشوائية

عند القيام بتجربة عشوائية تكون مجموعة نتائجها الممكنة منتهية و قابلة للعد تسمى مخارج التجربة و نرمز لها بـــ $E = \{x_1 ; x_2 ; ...... x_n\}$

نعرف على هذه المجموعة قانون احتمال p و هو كل متتالية عددية معرفة من المجموعة $\{1 ; 2 ; .... n\}$ نحو المجموعة $[0 ; 1]$ ترفق بعنصر i العدد الحقيقي p_i حيث $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$

كل عدد حقيقي p_i يسمى احتمال الحادثة x_i و نكتب $p(x_i) = p_i$

في حالة تساوي الاحتمال بين كل الحوادث فإن :

$p_1 + p_2 + ... + p_i = 1$ يكافئ $p_1 + p_1 + ... + p_1 = 1$

يكافئ $n\,p_1 = 1$

يكافئ $p_1 = 1/n$

مبرهنة : في حالة تساوي احتمال على مجموعة المخارج E فإن من أجل كل حادثة A

لدينا : $p(A) = \dfrac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } E}$

مثلا : نسحب كرة واحدة من كيس فيه 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6

لتكن A الحادثة : سحب كرة رقمها مضاعف 3

إذا كان الاحتمال متساوي فإن : $p(A) = 2/6$ لأن :

$E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ إذن : عدد عناصر E هو 6

$A = \{3 ; 6\}$ إذن : عدد عناصر A هو 2

خواص أساسية و مصطلحات الاحتمالات

E مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية .

A و B حادثتين (مجموعتين جزئيتين من المجموعة E)

p قانون احتمال معرف على المجموعة E

1 ــ $0 \le p(A) \le 1$

2 ــ $p(\phi) = 0$: حادثة مستحيلة .

3 ــ $p(E) = 1$: حادثة أكيدة .

4 ــ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$: A و B حادثتان كيفيتان .

5 ــ $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$: A و B حادثتان غير متلائمتين .

6 ــ $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$: $\overline{A} = E - A$

المتغير العشوائي

نسمي متغير عشوائي X كل دالة عددية معرفة على مجموعة الامكانيات E مزودة بقانون احتمال p حيث X يأخذ القيم $X_1 ; X_2 ; ..... X_n$ بالاحتمالات $p_1 ; p_2 ; ..... p_n$ معرفا كمايلي : $p(X = X_i) = p_i$

مثال : صندوق يحتوي على كرتين لا نفرق بينهما عند اللمس أحدهما بيضاء B و الأخرى سوداء N نسحب 3 مرات كرة واحدة مع إرجاعها بعد كل سحب إلى الصندوق .

إذن : المخارج الممكنة $E = \{BBB ; BBN ; BNB ; BNN ; NBB ; NBN ; NNB ; NNN\}$

ليكن سحب كرة بيضاء يؤدي إلى ربح 20 DA و سحب كرة سوداء يؤدي إلى خسارة 10 DA . نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حادثة مجموع المبالغ الناتجة (ربح أو خسارة مثلا : BBN يؤدي إلى $X = 20 + 20 - 10$)

القيم الممكنة لــ X :

الحوادث	BBB	BBN	BNB	BNN	NBB	NBN	NNB	NNN
قيم X	60	30	30	0	30	0	0	- 30

إذن : X يأخذ القيم $\{-30 ; 0 ; 30 ; 60\}$

يكون $x = -30$ إذا وفقط إذا كانت نتيجة التجربة NNN

يكون $x = 0$ إذا و فقط إذا كانت نتيجة التجربة BNN أو NBN أو NNB

يكون $x = 30$ إذا و فقط إذا كانت نتيجة التجربة BBN أو BNB أو NBB

يكون $x = 60$ إذا و فقط إذا كانت نتيجة التجربة BBB

منه :
$p(X = -30) = 1/8$
$p(X = 0) = 3/8$
$p(X = 30) = 3/8$
$p(X = 60) = 1/8$

إذن : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو كمايلي :

X_i	- 30	0	30	60
$p(X = X_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

الأمل الرياضياتي ، التباين

ليكن X متغير عشوائي يأخذ القيم $\{X_1 ; X_2 ; ..... X_n\}$

نضع $p(X = X_i) = p_i$

الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X هو $E(X) = \sum_{k=1}^{n} X_k \, p(X = X_k)$

تباين المتغير العشوائي X هو العدد : $Var(X) = \sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X))^2 \, p(X = X_k)$

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

التفسير الفيزيائي

E(X) هو الربح المتوسط الذي يأمله اللاعب عند القيام بالتجربة عدة مرات .

و عليه فإن : إذا كان $E(X) = 0$ فإن اللعبة عادلة

إذا كان $E(X) > 0$ فإن اللعبة مربحة

إذا كان $E(X) < 0$ فإن اللعبة ليست في صالح اللاعب

مبرهنة

X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس الوضعية

a عدد حقيقي ، E(X) ، E(Y) ، E(X + Y) هي على الترتيب الأمل الرياضياتي للمتغيرات العشوائية X ، Y ، X + Y

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{و} \quad E(a X) = a\,E(X)$$

نتائج : X متغير عشوائي و a و b عددان حقيقيان

1– $E(X + b) = E(X) + b$ لأن $E(b) = b$

2– $Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

3– $Var(a X) = a^2\, Var(X)$ و $\sigma(a X) = |a|\,\sigma(X)$

4– $Var(X + b) = Var(X)$ و $\sigma(X + b) = \sigma(X)$

إثبات الخاصية (2)

$$Var(X) = \sum_{k=1}^{n} (X_i - E(X))^2\, p(X = X_i)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [X_i^2 - 2 X_i E(X) + E^2(X)]\, p(X = X_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^2\, p(X = X_i) - 2 E(X) \sum_{i=1}^{n} X_i\, p(X = X_i) + E^2(X) \sum_{i=1}^{n} p(X = X_i)$$
$$= E(X^2) - 2 E(X) \times E(X) + E^2(X) \quad \text{لأن} \quad \sum_{i=1}^{n} p(X = X_i) = 1$$
$$= E(X^2) - E^2(X)$$

الاحتمالات الشرطية

تعريف :

A و B حادثتان حيث $p(A) \neq 0$

احتمال وقوع الحادثة B علما أن A محققة يسمى احتمال شرطي نرمز له بـ $p_A(B)$ حيث $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

و نقرأ : احتمال الحادثة B علما أن الحادثة A محققة

مثال : نرمي زهرة نرد ذات 6 أوجه غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6

لتكن A الحادثة النتيجة عدد فردي

B الحادثة النتيجة عدد مضاعف 3

لدينا : $p(A) = 3/6$ ؛ $p(B)\ 2/6$ ؛ $p(A \cap B) = 1/6$

منه : احتمال الحصول على عدد مضاعف 3 علما أن النتيجة عدد فردي هي $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{1/6}{3/6} = \dfrac{1}{3}$

تحقيق : إذا كانت النتيجة فردية فإن عدد الحالات الممكنة هي $\{1 ; 3 ; 5\}$

من بين هذه الحالات العدد 3 فقط مضاعف 3 إذن : $p_A(B) = 1/3$

تطبيق:

يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و 3 كرات خضراء لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب من الصندوق كرتين على التوالي دون ارجاع

لتكن A الحادثة : الكرة الأولى حمراء

B الحادثة : الكرة الثانية خضراء

أحسب $p(A)$ ؛ $p_A(B)$ ثم استنتج $p(A \cap B)$

الحـل:

عدد الحالات الممكنة هو $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$

لتكن R كرة حمراء و V كرة خضراء

الحادثة A توافق الحالات التالية : RR أو RV

إذن : عدد هذه الحالات هو $6 \times 3 + A_6^2 = 18 + 30 = 48$

نتيجة : $p(A) = \dfrac{48}{72} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

الحادثة B علما أن A محققة توافق الحالات RV من بين RR و RV

إذن : عدد هذه الحالات هو $6 \times 3 = 18$ من بين $18 + 30 = 48$

نتيجة : $p_A(B) = \dfrac{18}{48} = \dfrac{3}{8}$

خلاصة : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$ منه : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

أي : $p(A \cap B) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}$

تحقيق : الحادثة $(A \cap B)$ توافق الحالات RV و عددها $6 \times 3 = 18$

منه : $p(A \cap B) = \dfrac{18}{72} = \dfrac{1}{4}$

الحوادث المستقلة :

تعريف : نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتين إذا و فقط إذا كان $p(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

(أي اذا كان $p(A) \neq 0$ فإن $p_A(B) = P(B)$)

المتغيرات العشوائية المستقلة

X و Y متغيران عشوائيان على نفس الفضاء الاحتمالي E

لتكن $X_1 ; X_2 ; \dots X_n$ قيم المتغير العشوائي X

و $Y_1 ; Y_2 ; \dots X_m$ قيم المتغير العشوائي Y

تعريف :

نقول أن المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان إذا و فقط إذا كانت الحادثتان $X = X_i$ و $Y = Y_j$ مستقلتان من أجل كل $1 \leq i \leq n$ و من أجل كل $1 \leq j \leq m$

ملاحظة : إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y مرتبطان بتجربتين مختلفتين فإنهما حتما مستقلان

نشاط :

نرمي ثلاث مرات متتالية قطعة نقدية غير مزيفة ذات وجه و ظهر

نرمز بـ X لعدد مرات ظهور الوجه في الرمية الأولى

نرمز بـ Y لعدد مرات ظهور الوجه في الرميتين الثانية و الثالثة

تحقق أن X و Y هما متغيران عشوائيان مستقلان .

الحـل :

نرمز إلى الوجه بـ F و الظهر بـ P

إذن : مجموعة الامكانيات للتجربة هي كما يلي :

$$E = \{PPF ; PPP ; PFF ; PFP ; FFF ; FFP ; FPF ; FPP\}$$

الوجه إما يظهر مرة واحدة في الرمية الأولى أو لا يظهر اطلاقا .

إذن : قيم المتغير العشوائي X هي $\{0 ; 1\}$

الوجه إما لا يظهر في كلا من الرميتين الثانية و الثالثة أو يظهر مرة واحدة فقط إما في الثانية أو الثالثة أو يظهر في كلا من الثانية و الثالثة إذن : المتغير العشوائي Y يأخذ القيم $\{0 ; 1 ; 2\}$

الحادثة	الحالات الملائمة للحادثة	احتمال الحادثة
$X = 0$	PPF ; PPP ; PFF ; PFP	$4/8 = 1/2$
$X = 1$	FFF ; FFP ; FPF ; FPP	$4/8 = 1/2$
$Y = 0$	PPP ; FPP	$2/8 = 1/4$
$Y = 1$	PPF ; PFP ; FFP ; FPF	$4/8 = 1/2$
$Y = 2$	FFF ; PFF	$2/8 = 1/4$

من جهة أخرى لدينا الاحتمالات التالية :

الحادثة	الحالات الملائمة	احتمال الحادثة
$X = 0$ و $Y = 0$	PPP	$1/8$
$X = 0$ و $Y = 1$	PFP ; PPF	$2/8 = 1/4$
$X = 0$ و $Y = 2$	PFF	$1/8$
$X = 1$ و $Y = 0$	FPP	$1/8$
$X = 1$ و $Y = 1$	FFP ; FPF	$2/8 = 1/4$
$X = 1$ و $Y = 2$	FFF	$1/8$

مقارنة :

$$p(X = 0) \times p(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 0 ; Y = 0)$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(X = 0 ; Y = 1)$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 0 ; Y = 2)$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 1 ; Y = 0)$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(X = 1 ; Y = 1)$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 1 ; Y = 2)$$

نتيجة : من أجل كل $i \in \{0 ; 1\}$ من أجل كل $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$ لدينا :

$$p(X = i) \times p(Y = k) = p(X = i ; Y = k)$$

إذن : الحوادث X_i و Y_k مستقلة مثنى مثنى .

منه : المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان .

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين – 1

يحتوي صندوق على 32 كرة لا نفرق بينها عند اللمس .
نسحب من الصندوق 8 كرات عشوائيا . أحسب عدد الحالات الممكنة للسحب

الحل – 1

لحساب عدد الحالات الممكنة للسحب نميز بين ثلاث أنواع من السحب كمايلي :

a) **سحب في آن واحد** : إذن كل سحب هو توفيقة لـ 8 عناصر من بين 32 عنصر إذن : عدد الحالات الممكنة هو C_{32}^{8}

b) **سحب على التوالي دون ارجاع** : إذن كل سحب هو ترتيبية لـ 8 عناصر من بين 32 عنصر إذن : عدد الحالات الممكنة هو A_{32}^{8}

c) **سحب على التوالي بارجاع** : إذن كل سحب هو قائمة لـ 8 عناصر من بين 32 عنصر إذن : عدد الحالات الممكنة هو $(32)^8$

التمرين – 2

أحسب مايلي :

a) $A=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{2^k}$ (b $B=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{3^{n-k}}{4^k}$

الحل – 2

(a
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{2^k}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\times(1)^{n-k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

إذن : $A=\left(\frac{3}{2}\right)^n$

(b
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{3^{n-k}}{4^k}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\times 3^{n-k}\times\left(\frac{1}{4}\right)^k$$
$$=\left(3+\frac{1}{4}\right)^n$$
$$=\left(\frac{13}{4}\right)^n$$

منه : $B=\left(\frac{13}{4}\right)^n$

التمرين – 3

يحتوي صندوق A على 3 كرات حمراء ؛ 3 كرات سوداء ؛ 5 كرات خضراء
يحتوي صندوق B على 7 كرات حمراء ؛ 4 كرات سوداء ؛ 2 كرات خضراء
جميع الكرات متساوية الاحتمال في السحب
نسحب كرة من الصندوق A ثم كرة من الصندوق B
لتكن الحوادث التالية : V : سحب كرة خضراء من الصندوق A
V' : سحب كرة خضراء من الصندوق B
N : سحب كرة سوداء من الصندوق B
R : سحب كرة حمراء من الصندوق B

1 – أحسب p(V) ؛ p(V') ؛ p(N) ؛ p(R)
2 – أحسب احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق A و من الصندوق B

الحـل ــ 3

1 ــ عدد الكرات الخضراء في الصندوق A هو 5 إذن : $p(V) = 5/11$
عدد الكرات الخضراء في الصندوق B هو 2 إذن : $p(V') = 2/13$
عدد الكرات السوداء في الصندوق B هو 4 إذن : $p(N) = 4/13$
عدد الكرات الحمراء في الصندوق B هو 7 إذن : $p(R) = 7/13$

2 ــ احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق A و من الصندوق B هو $p(V) \times p(V') = \frac{5}{11} \times \frac{2}{13}$

التمرين ــ 4

يشارك رشيد في لعبة حظ حيث احتمال الفشل فيها هو 0,6 . قرر رشيد المحاولة 5 مرات متتابعة . نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل 5 محاولات عدد مرات الفوز

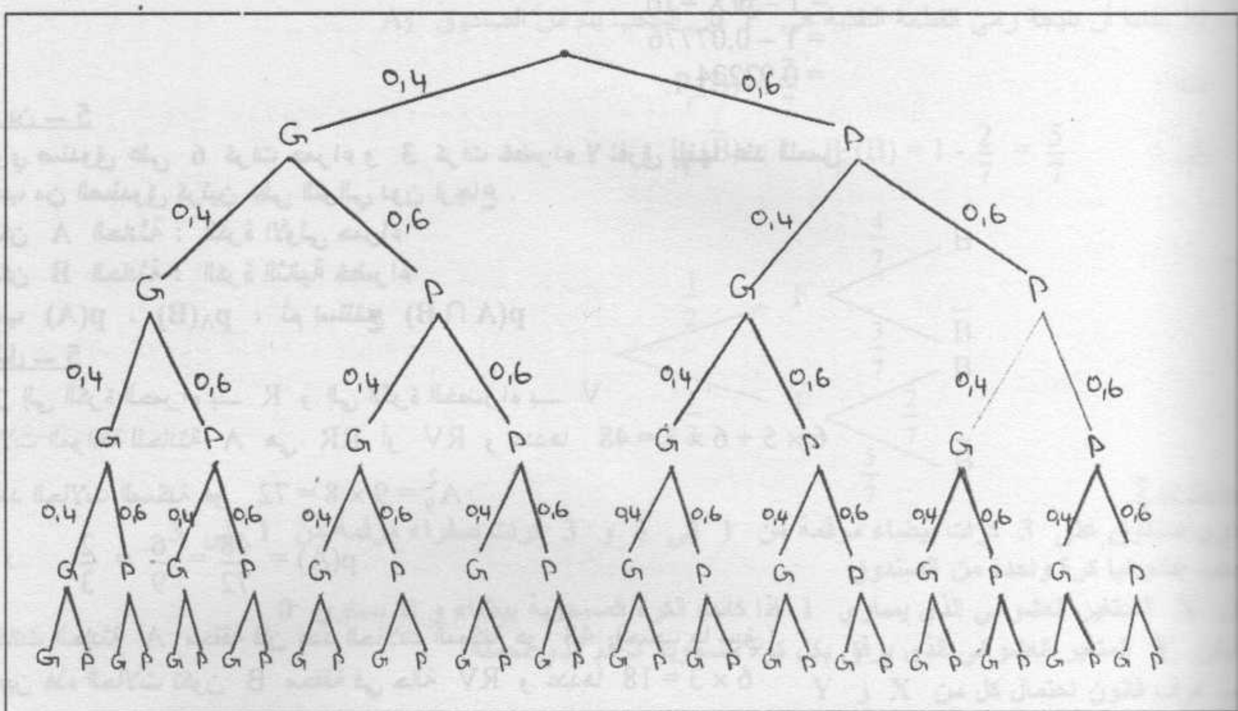
1 ــ عرف قانون الاحتمال للمتغير X

2 ــ أوجد الأمل الرياضياتي و الانحراف المعياري لــ X

3 ــ ما هو احتمال الحادثتين : A : دوما يفشل في المحاولات الخمسة
B : يفوز مرة واحدة على الأقل

الحـل ــ 4

نرمز إلى حالة الفوز بــ G و إلى حالة الفشل بــ P
نمثل الحالات الممكنة على شكل شجرة كما يلي :



1 ــ X هو عدد مرات الفوز إذن : X يأخذ القيم $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$

منه الجدول التالي :

الحادثة	الحالات الملائمة للحادثة
X = 0	PPPPP
X = 1	GPPPP ; PGPPP ; PPGPP ; PPPGP ; PPPPG
X = 2	GPPPG ; GPPGP ; GPGPP ; GGPPP ; PGGPP ; PGPGP ; PGPPG ; PPGGP ; PPGPG ; PPPGG
X = 3	GGGPP ; GGPGP ; GGPPG ; GPGGP ; GPGPG ; GPPGG ; PGGGP ; PGPGG ; PPGGG ; PGGPG
X = 4	GGGGP ; GGGPG ; GGPGG ; GPGGG ; PGGGG
X = 5	GGGGG

في كل مرة لدينا : $p(P) = 0,6$ و $p(G) = 0;4$

منه : النتائج التالية :

$$p(X = 0) = (0,6)^5 = 0,07776$$
$$p(X = 1) = 5 \times [(0,6)^4 \times (0,4)] = 0,2592$$
$$p(X = 2) = 10 \times [(0,6)^3 \times (0,4)^2] = 0,3456$$
$$p(X = 3) = 10 \times [(0,6)^2 \times (0,4)^3] = 0.2304$$
$$p(X = 4) = 5 \times [(0,6) \times (0,4)^4] = 0,0768$$
$$p(X = 5) = (0,4)^5 = 0,01024$$

منه قانون المتغير العشوائي X كمايلي :

X_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = X_i)$	0,07776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

2 –
$$E(X) = 0 \times (0,07776) + 1(0,2592) + 2(0,3456) + 3(0,2304) + 4(0,0768) + 5(0,01024)$$
$$= 2$$

$$Var(X) = 0 \times (2 - 0,07776)^2 + 1(2 - 0,2592)^2 + 2(2 - 0,3456)^2 + 3(2 - 0,2304)^2 + 4(2 - 0,0768)^2 + 5(2 - 0,01024)^2$$

$$\sigma (X) = \sqrt{Var(X)}$$

3 –
$$p(A) = P(X = 0) = 0,07776$$
$$p(B) = p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5)$$
$$= 1 - p(X = 0)$$
$$= 1 - 0,07776$$
$$= 0,92224$$

<u>التمرين – 5</u>

يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و 3 كرات خضراء لا نفرق بينها عند اللمس

نسحب من الصندوق كرتين على التوالي دون ارجاع .

لتكن A الحادثة : الكرة الأولى حمراء

و لتكن B الحادثة : الكرة الثانية خضراء

أحسب $p(A)$ ، $p_A(B)$ ، ثم استنتج $p(A \cap B)$

<u>الحـل – 5</u>

نرمز إلى الكرة الحمراء بـــ R و إلى الكرة الخضراء بـــ V

الحالات الموافقة للحادثة A هي RR أو RV و عددها $6 \times 5 + 6 \times 3 = 48$

و عدد الحالات الممكنة هو $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$

إذن : $p(A) = \dfrac{48}{72} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

إذا كانت الحادثة A محققة فإن عدد الحالات الممكنة هو 48 (حسب ما سبق)

من بين هذه الحالات تكون B محققة في حالة RV و عددها $6 \times 3 = 18$

إذن : $p_A(B) = \dfrac{18}{48} = \dfrac{3}{8}$

نتيجة : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$ منه : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{8}$$
$$= \frac{1}{4}$$

<u>التمرين – 6</u>

يحتوي صندوق A_1 على 4 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء

و يحتوي صندوق A_2 على 2 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء

كل الكرات متساوية الاحتمال و لا نفرق بينها عند اللمس

نرمي قطعة نقدية غير مزيفة . إذا ظهر الوجه نسحب عشوائيا كرة من الصندوق A_1 أما إذا ظهر " ظهر" نسحب كرة من الصندوق A_2

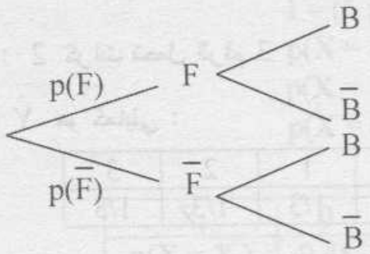
نسمي F الحادثة " ظهور وجه" و B الحادثة " الكرة المسحوبة بيضاء "

1 ـ أحسب $P(F)$ ؛ $P(\overline{F})$

2 ـ أحسب $P_F(B)$ ثم استنتج $P_F(\overline{B})$

3 ـ أحسب $P_{\overline{F}}(B)$ ثم استنتج $P_{\overline{F}}(\overline{B})$

4 ـ أكمل الشجرة التالية بالنتائج المحصل عليها :



الحـل ـ 6

1 ـ القطعة النقدية ليست مزيفة إذن : ظهور وجه أو ظهر لهما نفس الاحتمال

أي : $P(F) = 1/2$ و $P(\overline{F}) = 1/2$

2 ـ إذا علمت أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي F فإن السحب يتم من الصندوق A_1

منه :

$$P_F(B) = \frac{4}{7}$$

إذن :

$$P_F(\overline{B}) = 1 - P_F(B) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

3 ـ إذا علمنا أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي $\overline{F}$ فإن السحب يتم من الصندوق A_2

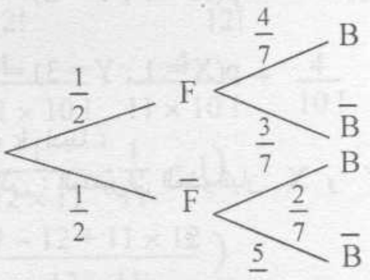
منه :

$$P_{\overline{F}}(B) = \frac{2}{7}$$

إذن :

$$P_{\overline{F}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{F}}(B) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

4 ـ



التمرين ـ 7

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 و 3 كرات صفراء مرقمة من 1 إلى 3 .

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق

ليكن X التمتغير العشوائي الذي يساوي 1 إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء و إلا يساوي 0

و ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل كرة مسحوبة الرقم الذي تحمله

1 ـ عرف قانون احتمال كل من X و Y

2 ـ أحسب الأمل الرياضياتي لكل من X و Y

3 ـ برهن أن المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان

4 ـ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X . Y و أحسب أمله الرياضياتي

الحـل ـ 7

1 ـ X يأخذ القيم $\{0 ; 1\}$

$$p(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad p(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

منه : قانون احتمال المتغير X هو كمايلي :

X_i	0	1
$p(X = X_i)$	1/2	1/2

Y يأخذ القيم $\{1 ; 2 ; 3\}$

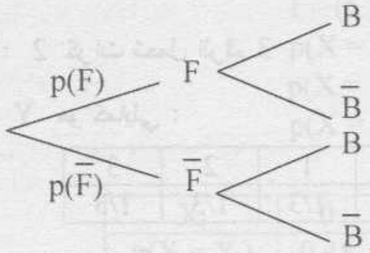
نسمي F الحادثة " ظهور وجه" و B الحادثة " الكرة المسحوبة بيضاء "

1 ـ أحسب $P(F)$ ؛ $P(\overline{F})$

2 ـ أحسب $P_F(B)$ ثم استنتج $P_F(\overline{B})$

3 ـ أحسب $P_{\overline{F}}(B)$ ثم استنتج $P_{\overline{F}}(\overline{B})$

4 ـ أكمل الشجرة التالية بالنتائج المحصل عليها :



الحل ـ 6

1 ـ القطعة النقدية ليست مزيفة إذن : ظهور وجه أو ظهر لهما نفس الاحتمال

أي : $P(F) = 1/2$ و $P(\overline{F}) = 1/2$

2 ـ إذا علمت أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي F فإن السحب يتم من الصندوق A_1

منه : $P_F(B) = \dfrac{4}{7}$

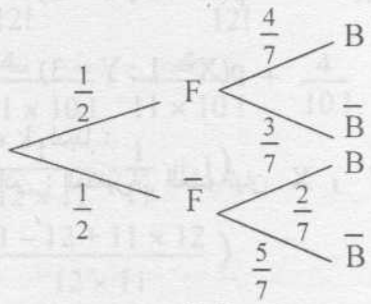
إذن : $P_F(\overline{B}) = 1 - P_F(B) = 1 - \dfrac{4}{7} = \dfrac{3}{7}$

3 ـ إذا علمنا أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي $\overline{F}$ فإن السحب يتم من الصندوق A_2

منه : $P_{\overline{F}}(B) = \dfrac{2}{7}$

إذن : $P_{\overline{F}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{F}}(B) = 1 - \dfrac{2}{7} = \dfrac{5}{7}$

4 ـ



التمرين ـ 7

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 و 3 كرات صفراء مرقمة من 1 إلى 3 .

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق

ليكن X التمتغير العشوائي الذي يساوي 1 إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء و إلا يساوي 0

و ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل كرة مسحوبة الرقم الذي تحمله

1 ـ عرف قانون احتمال كل من X و Y

2 ـ أحسب الأمل الرياضياتي لكل من X و Y

3 ـ برهن أن المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان

4 ـ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X . Y و أحسب أمله الرياضياتي

الحل ـ 7

1 ـ X يأخذ القيم $\{0 ; 1\}$

$p(X = 1) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ ؛ $p(X = 0) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

منه : قانون احتمال المتغير X هو كمايلي :

X_i	0	1
$p(X = X_i)$	1/2	1/2

Y يأخذ القيم $\{1 ; 2 ; 3\}$

1 كرات تحمل الرقم 2 : $p(Y=1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2 كرات تحمل الرقم 2 : $p(Y=2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3 كرات تحمل الرقم 2 : $p(Y=3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

منه : قانون احتمال المتغير Y هو كمايلي :

Y_i	1	2	3
$p(Y = Y_i)$	1/3	1/3	1/3

2 –
$$E(X) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

3 –
$p(X=0 ; Y=1) = \frac{1}{6}$ و $p(X=0) \times p(Y=1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

$p(X=0 ; Y=2) = \frac{1}{6}$ و $p(X=0) \times p(Y=2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

$p(X=0 ; Y=3) = \frac{1}{6}$ و $p(X=0) \times p(Y=3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

$p(X=1 ; Y=1) = \frac{1}{6}$ و $p(X=1) \times p(Y=1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

$p(X=1 ; Y=2) = \frac{1}{6}$ و $p(X=1) \times p(Y=2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

$p(X=1 ; Y=3) = \frac{1}{6}$ و $p(X=1) \times p(Y=3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

نتيجة : من أجل كل $i \in \{0 ; 1\}$ و من أجل كل $k \in \{1 ; 2 ; 3\}$ لدينا :
$p(X = X_i ; Y = Y_k) = p(X = X_i) \times p(Y = Y_k)$ إذن : المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان

4 – القيم الممكنة للمتغير العشوائي XY هي $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

$$p(XY=0) = p(X=0) = \frac{1}{2}$$

$$p(XY=1) = p(X=1 ; Y=1) = \frac{1}{6}$$

$$p(XY=2) = p(X=1 ; Y=2) = \frac{1}{6}$$

$$p(XY=3) = p(X=1 ; Y=3) = \frac{1}{6}$$

منه قانون المتغير العشوائي XY كمايلي :

α_i	0	1	2	3
$p(XY = \alpha_i)$	1/2	1/6	1/6	1/6

$$E(XY) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1+2+3}{6} = 1$$

التمرين – 8

نرمي زهرة نرد غير متوازنة مرة واحدة

ليكن X العلامة المحددة كمايلي :

a) العلامة (10 -) إذا ظهر الرقم 1

b) العلامة (10) إذا ظهر الرقم 6

c) العلامة (0) في الحالات الأخرى

نفرض أن احتمال ظهور الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 هو 0,12
عرف قانون احتمال العدد X

الحل – 8

احتمال ظهور الرقم 6 هو $1-(5\times 0{,}12)=1-0{,}6=0{,}4$

منه : النتائج التالية :

$p(X=-10)=0{,}12$

$p(X=10)=0{,}4$

$p(X=0)=4\times 0{,}12=0{,}48$

منه قانون الاحتمال للعدد X هو كمايلي :

X_i	0	- 10	10
$p(X=X_i)$	0,48	0,12	0,4

التمرين – 9

بسط الأعداد التالية :

a) $\dfrac{8\,!}{6\,!}$ c) $\dfrac{13!-12\,!}{12\,!}$

b) $\dfrac{11\,!}{9\,!\times 2\,!}$ d) $\dfrac{4}{12\,!}-\dfrac{4}{11\,!}+\dfrac{4}{10\,!}$

الحل – 9

a) $\dfrac{8\,!}{6\,!}=\dfrac{8\times 7\times 6\,!}{6!}=8\times 7=56$

b) $\dfrac{11\,!}{9\,!\times 2\,!}=\dfrac{11\times 10\times 9\,!}{9!\times 2\times 1}=\dfrac{11\times 10}{2}=55$

c) $\dfrac{13!-12\,!}{12\,!}=\dfrac{13\times 12\,!-12\,!}{12!}=\dfrac{12\,!\,(13-1)}{12!}=13-1=12$

d) $\dfrac{4}{12\,!}-\dfrac{4}{11\,!}+\dfrac{4}{10\,!}=\dfrac{4}{12\times 11\times 10\,!}-\dfrac{4}{11\times 10\,!}+\dfrac{4}{10\,!}$

$=\dfrac{4}{10\,!}\left(\dfrac{1}{12\times 11}-\dfrac{1}{11}+1\right)$

$=\dfrac{4}{10\,!}\left(\dfrac{1-12+11\times 12}{12\times 11}\right)$

$=\dfrac{4}{10\,!}\left(\dfrac{121}{12\times 11}\right)$

$=\dfrac{4}{10\,!}\left(\dfrac{11\times 11}{12\times 11}\right)$

$=\dfrac{11}{10\,!\times 3}$

التمرين – 10

n عدد طبيعي غير معدوم . بسط العبارات التالية :

a) $\dfrac{n!}{(n+1)\,!}$ c) $\dfrac{1}{(n-1)\,!}-\dfrac{1}{(n+1)\,!}$

b) $\dfrac{(2\,n+1)\,!}{(2\,n-1)\,!}$ d) $\dfrac{n!}{n}-(n-1)\,!$

الحل – 10

a) $\dfrac{n!}{(n+1)\,!}=\dfrac{n\,!}{(n+1)n\,!}=\dfrac{1}{n+1}$

b) $\dfrac{(2\,n+1)\,!}{(2\,n-1)\,!}=\dfrac{(2\,n+1)(2\,n)(2\,n-1)\,!}{(2\,n-1)\,!}=2\,n(2\,n+1)=4\,n^2+2\,n$

c) $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n)}{(n+1)(n)(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n^2+n-1}{(n+1)!}$

d) $\frac{n!}{n} - (n-1)! = \frac{n! - n(n-1)!}{n} = \frac{n! - n!}{n!} = 0$

التمرين ــ 11

أكتب العبارات التالية باستعمال العاملي (!)

a) $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$

b) $n(n-1)(n-2)$ حيث n عدد طبيعي أكبر من 2

c) $\frac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 6 \times 7}$

الحــل ــ 11

a) $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{4!}$

b) $n(n-1)(n-2) = \frac{n!}{(n-3)!}$

c) $\frac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 6 \times 7} = \frac{\frac{12!}{8!}}{\frac{7!}{4!}} = \frac{12!}{8!} \times \frac{4!}{7!}$

التمرين ــ 12

1 ــ بكم طريقة يمكن اختيار تلميذين من بين 26 تلميذ

2 ــ بكم طريقة يمكن اختيار مسؤول عنهم ثم نائب لهذا المسؤول

الحــل ــ 12

1 ــ اختيار تلميذين من بين 26 هو توفيقة لعنصرين من بين 26 عنصر و عددها إذن :

$$C_{26}^{2} = \frac{26!}{24! \times 2!} = \frac{26 \times 25 \times 24!}{24! \times 2} = 25 \times 13$$

2 ــ اختيار مسؤول ثم نائب له هو ترتيبة لعنصرين من بين 26 عنصر و عددها $A_{26}^{2} = 26 \times 25$

التمرين ــ 13

في لعبة الرهان الرياضي يختار المشارك 6 أرقام من بين 49 رقما (كرات مرقمة من 1 إلى 49)

1 ــ ما هو عدد الحالات الممكنة ؟

2 ــ استنتج احتمال فوز المشارك بسحب 6 أرقام صحيحة .

الحــل ــ 13

1 ــ عدد الحالات الممكنة هو $C_{49}^{6} = \frac{49!}{43! \times 6!} = \frac{44 \times 45 \times 46 \times 47 \times 48 \times 49}{6!}$

2 ــ من بين الحالات الممكنة يوجد حالة واحدة فقط تحمل 6 أرقام صحيحة .

إذن : الاحتمال المطلوب هو : $\frac{1}{C_{49}^{6}} = \frac{6!}{44 \times 45 \times 46 \times 47 \times 48 \times 49}$

التمرين ــ 14

يحتوي صندوق على 10 كرات موزعة كمايلي : 4 كرات سوداء و 6 كرات بيضاء

نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد . فما هو عدد الحالات الممكنة للحصول على :

a) كرة بيضاء b) كرة بيضاء على الأقل

c) 3 كرات ليست من نفس اللون

نضيف إلى هذا الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون

1 ــ أثبت أن من أجل $n \in IN^*$: $X_n = (n+4)^2(n+6)$

2 ــ كم نضيف من كرة سوداء و بيضاء حتى يكون $X_n = 2016$

الحــل ــ 14

a) سحب كرة بيضاء هي الحادثة : كرة بيضاء و كرتين سوداوين

منه الحالات الممكنة هو $C_6^1 \times C_4^2 = 6 \times 6 = 36$

b) سحب كرة بيضاء على الأقل هو عدد كل الحالات الممكنة ماعدا الحالات التي تكون فيها كل الكرات سوداء إذن عددها هو :

$$C_{10}^3 - C_4^3 = \frac{10\,!}{7\,! \times 3\,!} - \frac{4\,!}{1 \times 3\,!} = \frac{8 \times 9 \times 10}{3 \times 2} - 4 = 120 - 4 = 116$$

c) لا يمكن سحب 3 كرات ليست من نفس اللون . لأن الألوان المختلفة المتوفرة هي الأسود و الأبيض فقط .

I ــ بعد اضافة n كرة سوداء و n كرة بيضاء تصبح الوضعية كمايلي : $(n+4)$ كرات سوداء ؛ $(n+6)$ كرات بيضاء

سحب كرتين من نفس اللون أي $\Bigg\{$ إما كرتين سوداوين و كرة بيضاء
أو كرتين بيضاوين و كرة سوداء

منه :

$$X_n = C_{n+4}^2 \times C_{n+6}^1 + C_{n+6}^2 \times C_{n+4}^1$$

$$= \frac{(n+4)\,!}{(n+4-2)\,! \times 2\,!} \times (n+6) + \frac{(n+6)\,!}{(n+6-2)\,! \times 2\,!} \times (n+4)$$

$$= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)\,!(n+6)}{(n+2)\,! \times 2} + \frac{(n+6)(n+5)(n+4)\,!(n+4)}{(n+4)\,! \times 2}$$

$$= \frac{(n+4)(n+3)(n+6)}{2} + \frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{2}$$

$$= \frac{(n+4)(n+6)}{2}(n+3+n+5)$$

$$= \frac{(n+4)(n+6)(2n+8)}{2}$$

$$= (n+4)(n+6)(n+4)$$

$$= (n+4)^2(n+6)$$

2 ــ $X_n = 2016$ يكافئ $(n+4)^2(n+6) = 2016$

لنحلل العدد 2016 كما يلي :

2016	3
672	3
224	2
112	2
56	2
28	2
14	2
7	7
1	

منه :

$$2016 = 3^2 \times 2^5 \times 7$$
$$= 3^2 \times 2^4 \times 2 \times 7$$
$$= 3^2 \times 4^2 \times 14$$
$$= (3 \times 4)^2 \times 14$$
$$= (8+4)^2 \times (8+6)$$

بالمطابقة مع عبارة $X_n = (n+4)^2(n+6)$ نحصل على $n = 8$

إذن : يكفي اضافة 8 كرات بيضاء و 8 كرات سوداء

التمرين ــ 15

يحتوي صندوق على 15 كرات موزعة كمايلي :

6 بيضاء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3

5 خضراء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2

4 حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 3 ، 3 ، 3

نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد .

أحسب عدد الحالات الملائمة للحوادث التالية :

A) سحب 3 كرات من نفس اللون .

B) سحب 3 كرات تحمل نفس الرقم

C) سحب 3 كرات مجموع أرقامها 6

D) سحب أحد الأرقام الفردية على الأقل .

الحل ـ 15

A) الحادثة 3 كرات من نفس اللون توافق الحادثة 3 كرات بيضاء أو 3 كرات خضراء أو 3 كرات حمراء
إذن : عدد الحالات الملائمة هو :

$$C_6^3 + C_5^3 + C_4^3 = \frac{6\,!}{3\,!3\,!} + \frac{5!}{3\,!2\,!} + 4 = 20 + 10 + 4 = 34$$

B) الحادثة 3 كرات تحمل نفس الرقم توافق الحادثة 3 كرات تحمل الرقم 1 أو 3 كرات تحمل الرقم 2 أو 3 كرات تحمل الرقم 3
إذن : عدد الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي :

$$C_6^3 + C_4^3 + C_5^3 = 20 + 4 + 10 = 34$$

C) الحادثة 3 كرات مجموع أرقامها 6 توافق الحادثة : سحب الأرقام $\{3\,;2\,;1\}$ أو $\{2\,;2\,;2\}$ منه عدد الحالات الملائمة للحادثة هي : $C_6^1 \times C_4^1 \times C_5^1 + C_4^3 = 6 \times 4 \times 5 + \frac{4\,!}{3\,!} = 120 + 4 = 124$

D) الحادثة " أحد الأرقام على الأقل فردي" توافق الحادثة العكسية للحادثة سحب كل الأرقام زوجية منه عدد الحالات الملائمة لهذه الجادثة هو : $C_{15}^3 - C_4^3 = \frac{15\,!}{12\,!\,3\,!} - \frac{4\,!}{3\,!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2} - 4 = 485 - 4 = 481$

التمرين ـ 16

يتنافس 10 لاعبين في دورة كرة تنس الطاولة بكم طريقة مختلفة يمكن تنظيم الدور الأول (5 مباريات)

الحل ـ 16

نرقم اللاعبين من 1 إلى 10 و نوزعهم على شكل ثنائيات للتنافس كمايلي : $(1\,;2)$ ؛ $(3\,;4)$ ؛ $(5\,;6)$ ؛ $(7\,;8)$ ؛ $(9\,;10)$

اللاعب الأول يمكن أن يتنافس مع 9 لاعبين (ماعدا نفسه)
اللاعب الثالث يمكن أن يتنافس مع 7 لاعبين (ماعدا نفسه و اللاعبين السابقين)
اللاعب الخامس يمكن أن يتنافس مع 5 لاعبين (ماعدا نفسه و اللاعبين الأربعة الأوائل)
اللاعب السابع يمكن أن يتنافس مع 3 لاعبين (ماعدا نفسه و اللاعبين الستة الأوائل)
اللاعب التاسع يمكن أن يتنافس مع لاعب واحد فقط (ماعدا نفسه و 8 لاعبين الأوائل)

نتيجة : يمكن اختيار مباريات الدورة الأولى بـ $9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1$ طريقة مختلفة أي 945 طريقة مختلفة .

مثال : في حالة أربعة لاعبين فقط نحصل على عدد الطرق المختلفة هو : $3 \times 1 = 3$ كمايلي :

الطريقة الأولى : A ينافس B و C ينافس D
الطريقة الثانية : A ينافس C و B ينافس D
الطريقة الثالثة : A ينافس D و B ينافس C

التمرين ـ 17

من بين 5 جزائريين و 10 سعوديين و 10 فلسطنيين نختار 3 شخصيات من جنسيات مختلفة فما هو عدد الثلاثيات الممكنة ؟

الحل ـ 17

الأشخاص من جنسيات مختلفة إذن : عدد الحالات الممكنة هو : $C_5^1 \times C_{10}^1 \times C_{10}^1 = 5 \times 10 \times 10 = 500$

التمرين ـ 18

يحتوي صندوق على 49 كرية مرقمة من 1 إلى 49 منها 6 كرات حمراء و 43 كرات بيضاء .
نسحب في آن واحد 6 كرات .
1 ـ ما هو عدد الحالات الممكنة
2 ـ ما هو عدد الحالات الملائمة للحصول على 3 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء

الحل ـ 18

1 ـ سحب في آن واحد إذن : الحالات الممكنة هي توفيقات لـ 6 عناصر من بين 49 عنصر و عددها

$$C_{49}^6 = \frac{49\,!}{43\,! \times 6!} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6\,!}$$

2 ـ سحب 3 كرات حمراء من بين 6 و 3 كرات بيضاء من بين 43 :

$$C_6^3 \times C_{43}^3 = \frac{6\,!}{3\,!\,3\,!} \times \frac{43\,!}{40\,! \times 3\,!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} \times \frac{43 \times 42 \times 41}{3 \times 2} = 20 \times 43 \times 7 \times 41$$

التمرين ـ 19

نضع بين يدي طفل ثلاث أقلام ملونة أخضر ، أحمر ، أصفر . نطلب من الطفل تلوين الأوجه الستة لعلبة مكعبة الشكل .
بكم طريقة مختلفة يمكن التلوين ؟

الحـل ـ 19

توزيع الألوان على الأوجه الستة هو قوائم ذات 6 عناصر من بين 3 عناصر حيث يمكن استعمال لون واحد للأوجه الستة معا
منه عدد الطرق المختلفة هو $3^6 = 729$

التمرين ـ 20

يتكون قسم من 18 تلميذ و 12 تلميذة
نريد تشكيل لجنة مكونة من رئيس ، نائب ، أمين (3 أشخاص مختلفة)
1 ـ ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها
2 ـ ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في الحالات التالية :
A) الأمين تلميذة
B) التلميذ X موجود في اللجنة
C) الرئيس تلميذ و الأمين تلميذة
D) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين

الحـل ـ 20

1 ـ عدد اللجان هو تراتيب لـ 3 عناصر من بين 30 عنصر و عددها $A_{30}^3 = 30 \times 29 \times 28$
2 ـ لتكن اللجنة مكونة كمايلي :

P	V	S
رئيس	نائب	أمين

A) الأمين تلميذة إذن : عدد الحالات الممكنة هو : $12 \times A_{29}^2 = 29 \times 28 \times 12$

B) التلميذ X موجود في اللجنة : هي الحادثة العكسية للحادثة التلميذ X غير موجود في اللجنة إذن : عدد الحالات الممكنة هو : $A_{30}^3 - A_{29}^3 = 30 \times 29 \times 28 - 29 \times 28 \times 27 = 29 \times 28 \times 3$

C) الرئيس تلميذ و الأمين تلميذة : عدد الحالات الممكنة هو : $18 \times 28 \times 12$

D) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين إذن :
إما الرئيس تلميذ و النائب تلميذة
أو الرئيس تلميذة و النائب تلميذ

منه عدد الحالات الممكنة : $18 \times 12 \times 28 + 12 \times 18 \times 28 = 2 \times 12 \times 18 \times 28$

التمرين ـ 21

أوجد العدد الطبيعي n في كل حالة من الحالات التالية :

a) $C_n^3 = 56$ **c)** $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n$

b) $9\,C_n^2 = 2\,C_{2n}^2$

الحـل ـ 21

a) $C_n^3 = 56$ يكافئ
$$\begin{cases} n \geq 3 \\ \dfrac{n\,!}{(n-3)!\,3\,!} = 56 \;......... (1) \end{cases}$$

(1) تكافئ $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\,!} = 56$

تكافئ $n(n-1)(n-2) = 56 \times 3\,!$
تكافئ $n(n-1)(n-2) = 8 \times 7 \times 6$
تكافئ $n = 8$

نتيجة : $8 > 3$ إذن : $C_n^3 = 56$ من أجل $n = 8$

b) $9\,C_n^2 = 2\,C_{2n}^2$ يكافئ
$$\begin{cases} n \geq 2\ ;\ 2\,n \geq 2 \\ 9 \times \dfrac{n\,!}{(n-2)!\,2\,!} = 2 \times \dfrac{(2\,n)\,!}{(2\,n-2)\,!\,2\,!} \text{ .... (1)} \end{cases}$$

(1) تكافئ $\dfrac{9 \times n\,!}{(n-2)\,!} = \dfrac{2 \times (2\,n)\,!}{(2\,n-2)\,!}$

تكافئ $9 \times n(n-1) = 2 \times 2\,n(2\,n-1)$

تكافئ $9\,n^2 - 9\,n = 8\,n^2 - 4\,n$

تكافئ $n^2 - 5\,n = 0$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} n = 0 \text{ مرفوض لأن } 2\,n \geq 2 \\ \text{أو} \\ n = 5 \text{ مقبول} \end{array}\right\}$

نتيجة : $9\,C_n^2 = 2\,C_{2n}^2$ من أجل $n = 5$

c) $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8\,n$ يكافئ
$$\begin{cases} n \geq 3\ ;\ 2\,n \geq 2 \\ \dfrac{n\,!}{(n-3)!\,3\,!} + \dfrac{(2\,n)\,!}{(2\,n-2)\,!\,2\,!} = 8\,n \text{ .... (1)} \end{cases}$$

(1) تكافئ $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2} + \dfrac{2\,n(2\,n-1)}{2} = 8\,n$

تكافئ $n(n-1)(n-2) + 3 \times 2\,n(2\,n-1) = 6 \times 8\,n$

تكافئ $n(n^2 - 3\,n + 2) + 12\,n^2 - 6\,n = 48\,n$

تكافئ $n^3 - 3\,n^2 + 2\,n + 12\,n^2 - 6\,n - 48\,n = 0$

تكافئ $n^3 + 9\,n^2 - 52\,n = 0$

تكافئ $n(n^2 + 9\,n - 52) = 0$

تكافئ $n^2 + 9\,n - 52 = 0$ لأن $n \neq 0$

$\Delta = 81 + 208 = 289 = (17)^2$

مرفوض $n_1 = \dfrac{-9-17}{2} = -8$

مقبول $n_2 = \dfrac{-9+17}{2} = 4$

نتيجة : $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8\,n$ من أجل $n = 4$

التمرين ـــ 22

n و m عددان طبيعيان حيث $n \geq 2$ و $n - 2 \geq m$

أثبت صحة المساواة التالية :

1 ـ $C_{2n}^{n} = 2\,C_{2n-1}^{n-1}$

2 ـ $C_n^m = C_{n-2}^{m-2} + 2\,C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m}$

الحـل ـــ 22

1 ـ
$$2\,C_{2n-1}^{n-1} = 2 \times \frac{(2\,n-1)\,!}{(2\,n-1-n+1)\,!\,(n-1)\,!}$$
$$= 2 \times \frac{(2\,n-1)\,!}{n\,!\,(n-1)!}$$
$$= 2 \times \frac{(2\,n-1)\,!}{n\,!\,(n-1)!} \times \frac{2\,n}{2\,n}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n-n)!\,n!}$$

$$= C_{2n}^{n}$$ و هو المطلوب

2 –

$$C_{n-2}^{m-2} + 2\,C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m} = C_{n-2}^{m-2} + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m}$$

$$= C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m}$$

$$= C_{n}^{m}$$

ملاحظة : استعملنا خاصية مثلث باسكال : $C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m} = C_{n}^{m}$

التمرين – 23

حل في IN^2 الجمل التالية ذات المجهولين x و y

1 – $\begin{cases} C_{x+1}^{y} = C_{x}^{y-1} \\ C_{x+y}^{2} = 10 \end{cases}$ **2 –** $\begin{cases} 2\,C_{x}^{2} = C_{y}^{1} \\ C_{x+y-5}^{2} = 4 \end{cases}$

الحل – 23

1 – $\begin{cases} C_{x+1}^{y} = C_{x}^{y-1} \\ C_{x+y}^{2} = 10 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} y-1 \geq 0 \\ x+1 \geq y \\ x+y \geq 2 \\ x \geq y-1 \\ C_{x+1}^{y} = C_{x}^{y-1} \quad \text{........ (1)} \\ C_{x+y}^{2} = 10 \quad \text{............ (2)} \end{cases}$

(2) تكافئ $\dfrac{(x+y)!}{(x+y-2)!\,2!} = 10$

تكافئ $\dfrac{(x+y)(x+y-1)}{2} = 10$

تكافئ $(x+y)(x+y-1) = 20$

تكافئ $x+y=5$ لأن التحليل الممكن لـ 20 من الشكل $n(n-1)$ هو 5×4

(1) تكافئ $\dfrac{(x+1)!}{(x-y+1)!\,y!} = \dfrac{x!}{(x-y+1)!\,(y-1)!}$

تكافئ $\dfrac{(x+1)!}{y!} = \dfrac{x!}{(y-1)!}$

تكافئ $\dfrac{(x+1)\,x!}{y\,(y-1)!} = \dfrac{x!}{(y-1)!}$

تكافئ $\dfrac{x+1}{y} = 1$

تكافئ $x+1 = y$

تكافئ $x - y = -1$

نتيجة : $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ منه بالجمع : $2x = 4$ أي $x = 2$

بالتعويض في أحد المساواة : $x+y=5$ أي $2+y=5$ منه $y=3$

خلاصة : $x = 2$ و $y = 3$

يكفي إذن أن نتأكد أن كل الشروط محققة كمايلي :

$$\begin{cases} y-1>0 \;:\; \text{إذن } y-1=3-1=2 \\ x+1\ge y \;:\; \text{إذن } x+1=2+1=3 \\ x+y>2 \;:\; \text{إذن } x+y=3+2=5 \\ x\ge y-1 \;:\; \text{إذن } y-1=3-1=2 \end{cases}$$

منه كل الشروط محققة

إذن : حلول الجملة هي $\{(2 ; 3)\}$

2 – $\begin{cases} 2C_x^2 = C_y^1 \\ C_{x+y-5}^2 = 4 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} y\ge 1 \; ; \; x\ge 2 \\ x+y-5\ge 2 \\ 2C_x^2 = C_y^1 \;........ (1) \\ C_{x+y-5}^{2} = 4 \;......... (2) \end{cases}$

(1) تكافئ $\dfrac{2(x\,!)}{(x-2)!\,2\,!} = y$

تكافئ $\dfrac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)\,!} = y$

تكافئ $x(x-1) = y$

(2) تكافئ $\dfrac{(x+y-5)\,!}{(x+y-7)\,!\,2!} = 4$

تكافئ $\dfrac{(x+y-5)(x+y-6)(x+y-7)!}{(x+y-7)\,!\times 2\,!} = 4$

تكافئ $(x+y-5)(x+y-6) = 8$

نتيجة : $\begin{cases} x(x-1) = y \\ (x+y-5)(x+y-6) = 8 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x^2 = x+y \\ (x+y-5)(x+y-6) = 8 \;........(\alpha) \end{cases}$

نعوض $x+y$ بـ x^2 في المساواة (α) فنحصل على : $(x^2-5)(x^2-6) = 8$

منه $x^4 - 11\,x^2 + 30 = 8$

أي : $x^4 - 11\,x^2 + 22 = 0$

نضع $x^2 = \alpha$ حيث $\alpha \ge 0$ منه المعادلة تصبح $\alpha^2 - 11\,\alpha + 22 = 0$

$\Delta = 121 - 88 = 33$ ليس جذر تام

منه : المعادلة لا تقبل حلول طبيعية إذن : الجملة لا تقبل حلولا في IN^2 .

التمرين – 24

x ، y عددان حقيقيان . باستعمال دستور ثنائي الحد أنشر العبارات التالية :

1 – $(1+x)^4$ 2 – $(2-x)^5$ 3 – $(2\,x+1)^6$

الحـل – 24

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

1 – $(1+x)^4 = C_4^0\,x^4 + C_4^1x^3 + C_4^2\,x^2 + C_4^3\,x + C_4^4$

$= x^4 + 4\,x^3 + 6\,x^2 + 4\,x + 1$

2 –
$$(2-x)^5 = [2+(-x)]^5$$
$$= C_5^0\,(-x)^5(2)^0 + C_5^1(-x)^4(2) + C_5^2\,(-x)^3(2)^2 + C_5^3\,(-x)^2(2)^3 + C_5^4\,(-x)(2)^4 + C_5^5\,(2)^5$$
$$= -x^5 + 10x^4 - 40x^3 + 80x^2 - 80x + 32$$

3 –
$$(2x+1)^6 = C_6^0(2x)^0 + C_6^1(2x)^1 + C_6^2(2x)^2 + C_6^3(2x)^3 + C_6^4(2x)^4 + C_6^5(2x)^5 + C_6^6(2x)^6$$
$$= 1 + 12x + 15\times 4x^2 + 20\times 8x^3 + 15\times 16x^4 + 6\times 32x^5 + 64x^6$$
$$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$$

التمرين – 25

i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و عمدته $\pi/2$

أحسب $(2-i)^7$ و $(2+i)^7$ ثم استنتج أن العدد $(2-i)^7+(2+i)^7$ حقيقي

الحـل – 25

باستعمال دستور ثنائي الحد لدينا :
$$(2+i)^7 = 2^7 + 7i(2)^6 + 21(i)^2(2)^5 + 35(i)^3(2)^4 + 35(i)^4(2)^3 + 21(i)^5(2)^2 + 7(i)^6(2) + (i)^7$$
$$= 2^7 + 7\times 64i - 21\times 32 - 35\times 16i + 35\times 8 + 21\times 4i - 14 - i$$
$$(2-i)^7 = [2+(-i)]^7$$
$$= 2^7 + 7(-i)(2)^6 + 21(-i)^2(2)^5 + 35(-i)^3(2)^4 + 35(-i)^4(2)^3 + 21(-i)^5(2)^2 + 7(-i)^6(2) + (-i)^7$$
$$= 2^7 - 7\times 64i - 21\times 32 + 35\times 16i + 35\times 8 - 21\times 4i - 14 + i$$

النتيجة : $(2+i)^7 + (2-i)^7 = 2[2^7 - 21\times 32 + 35\times 8 - 14]$

إذن : العدد $(2+i)^7+(2-i)^7$ حقيقي

التمرين – 26

n عدد طبيعي غير معدوم . أحسب المجاميع التالية بدلالة n .

a) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 3^k \times 5^{n-k}$ c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$

b) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 2^k$ d) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$

الحـل – 26

a) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 3^k \times 5^{n-k} = (3+5)^n = 8^n$

b) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 2^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, 2^k \times (1)^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (-1)^k (1)^{n-k} = (1-1)^n = 0$

d) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (1)^k (1)^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$

التمرين – 27

m و n عددان طبيعيان حيث $n \geq m \geq 1$

1 – أثبت أن $m\,C_n^m = n\,C_{n-1}^{m-1}$ ثم أحسب $A = 1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + m\,C_n^m + ... + n\,C_n^n$

2 – أثبت أن : $m\,C_{n+1}^m = (n+1)\,C_n^{m-1}$ ثم أحسب B حيث

$$B = 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{m+1}C_n^m + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

الحـل – 27

1 –
$$n\,C_{n-1}^{m-1} = n\times\frac{(n-1)!}{(n-m)!\,(m-1)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-m)!\,(m-1)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-m)!\,(m-1)!}\times\frac{m}{m}$$

$$= m \times \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

$$= m\,C_n^m \quad \text{و هو المطلوب}$$

$$A = 1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + mC_n^m + (m+1)C_n^{m+1} + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$$

$$= 1 + nC_{n-1}^1 + nC_{n-1}^2 + \dots + nC_{n-1}^{m-1} + nC_{n-1}^m + \dots + nC_{n-1}^{n-2} + nC_{n-1}^{n-1} \quad \text{لأن } mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$$

$$= 1 + n(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) \quad \text{حسب السؤال (1)}$$

$$= 1 + n\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k$$

$$= 1 + n[2^{n-1} - 1]$$

$$= 1 - n + n \times 2^{n-1}$$

تحقيق : من أجل $n = 2$: $A = 1 + 2C_2^2 = 1 + 2 = 3$

من جهة أخرى : $1 - 2 + 2 \times 2^1 = -1 + 4 = 3$

ملاحظة :

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k - 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (1)^k (1)^{n-k} - 1$$

$$= (1+1)^{n-1} - 1$$

$$= 2^{n-1} - 1$$

2 –

$$(n+1) \times C_n^{m-1} = (n+1) \times \frac{n!}{(n-m+1)!\,(m-1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-m+1)!\,(m-1)!} \times \frac{m}{m}$$

$$= m \times \frac{(n+1)!}{(n-m+1)!\,m!}$$

$$= m\,C_{n+1}^m \quad \text{و هو المطلوب}$$

لدينا : $m\,C_{n+1}^m = (n+1)\,C_n^{m-1}$ منه $C_{n+1}^m = \frac{n+1}{m} C_n^{m-1}$

أي $\frac{1}{n+1} C_{n+1}^m = \frac{1}{m} C_n^{m-1}$

$$B = 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{m+1}C_n^m + \dots + \frac{1}{n}C_n^{n-1} + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1}C_{n+1}^2 + \frac{1}{n+1}C_{n+1}^3 + \dots + \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{m+1} + \dots + \frac{1}{n+1}C_{n+1}^n + \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1})$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1 - C_{n+1}^1)$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1}[2^{n+1} - 1 - (n+1)]$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

ملاحظة : استعملنا المساواة :

$$C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = (1+1)^{n+1} = 2^{n+1}$$

إذن : $1 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1}$

منه : $C_{n+1}^{2}+C_{n+1}^{3}+ .... +C_{n+1}^{n+1}=2^{n+1}-1-C_{n+1}^{1}$

تحقيق : من أجل $n = 2$

$$B=1+\frac{1}{2}C_{2}^{1}+\frac{1}{3}C_{2}^{2}=1+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

من جهة أخرى : $\frac{2^{3}-1}{3}=\frac{7}{3}$

التمرين – 28

n و m عددان طبيعيان حيث $n \geq m > 0$

1 – أثبت أن $C_{n}^{m}=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^{m}$

2 – استنتج أن $C_{m}^{m}+C_{m+1}^{m}+ .... +C_{n}^{m}=C_{n+1}^{m+1}$

الحل – 28

– 1

$$C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^{m}=\frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-m-1)!m!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!}\times\frac{m}{m}+\frac{(n-!)!}{(n-m-1)!m!}\times\frac{(n-m)}{(n-m)}$$

$$=\frac{m(n-1)!}{(n-m)!m!}+\frac{(n-m)(n-1)!}{(n-m)!m!}$$

$$=\frac{(n-1)![m+n-m]}{(n-m)!m!}$$

$$=\frac{n(n-1)!}{(n-m)!m!}$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!m!}$$

$= C_{n}^{m}$ وهو المطلوب

2 – حسب السؤال الأول لدينا مايلي :

$$C_{n+1}^{m+1}=C_{n}^{m}+\cancel{C_{n}^{m+1}}$$
$$\oplus$$
$$\cancel{C_{n}^{m+1}}=C_{n-1}^{m}+\cancel{C_{n-1}^{m+1}}$$
$$\oplus$$
$$\cancel{C_{n-1}^{m+1}}=C_{n-2}^{m}+C_{n-2}^{m+1}$$
$$\vdots$$
$$\oplus$$
$$C_{m+3}^{m+1}=C_{m+2}^{m}+\cancel{C_{m+2}^{m+1}}$$
$$\oplus$$
$$\cancel{C_{m+2}^{m+1}}=C_{m+1}^{m}+C_{m+1}^{m+1}$$

بجمع هذه المساواة طرف لـــ طرف تحصل على :

$$C_{n+1}^{m+1}=C_{n}^{m}+C_{n-1}^{m}+C_{n-2}^{m}+ ..... +C_{m+2}^{m}+C_{m+1}^{m}+C_{m+1}^{m+1}$$

أي : $C_{n+1}^{m+1}=C_{n}^{m}+C_{n-1}^{m}+ ..... +C_{m+1}^{m}+C_{m}^{m}$ لأن $C_{m+1}^{m+1}=C_{m}^{m}=1$

التمرين – 29

ليكن المنشور $\left(x^{3}-\frac{2}{x^{2}}\right)^{15}$ حيث $x \in IR^*$

1 – أكتب الحد الذي درجته 10

2 – أوجد معامل الحد التاسع

3 – أوجد الحد الثابت

الحـل ــ 29

$$\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k} x^{3k} (-1)^{15-k} \left(\frac{2}{x^2}\right)^{15-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k} x^{3k} (-1)^{15-k} (2)^{15-k} (x)^{2k-30}$$

$$= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k} (-1)^{15-k} (2)^{15-k} (x)^{3k+2k-30}$$

$$= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k} (-1)^{15-k} (2)^{15-k} (x)^{5k-30}$$

1 ــ الحد ذو الدرجة 10 من أجل : $5k - 30 = 10$

أي : $5k = 40$ منه $k = 8$

إذن : الحد هو : $C_{15}^{8} (-1)^{15-8} (2)^{15-8} x^{10}$

$$C_{15}^{8} = \frac{15\,!}{7\,!\,8\,!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 6435$$

منه : الحد ذو الدرجة 10 هو : $-6435 \times 2^7 x^{10} = -823680\, x^{10}$

2 ــ الحد التاسع هو الحد ذو $k = 8$ (لأن k يأخذ القيم من 0 إلى 15)

منه الحد هو : $-823680\, x^{10}$ أي معامل الحد التاسع هو -823680

3 ــ يكون الحد ثابت من أجل : $5k - 30 = 0$ أي $k = 6$

منه الحد الثابت هو : $C_{15}^{6} (-1)^{15-6} (2)^{15-6}$

$$C_{15}^{6} = \frac{15\,!}{9\,!\,6\,!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 5005$$

منه الحد الثابت هو : $-5005 \times 2^9 = -2562560$

التمرين ــ 30

n عدد طبيعي غير معدوم . ليكن المنشور $(1 + x)^n$ حيث $x \in IR$

1 ــ عين قيمة n حتى يكون الحد الثالث في المنشور هو $28\, x^2$

2 ــ من أجل قيمة n المحصل عليها عين x حتى يكون الحد الخامس هو 1120

3 ــ نضع $n = 15$

عين قيمة العدد الطبيعي m حتى يكون الحدان اللذان رتبتاهما $(m - 1)$ و $(2m + 3)$ متساويي المعامل .

الحـل ــ 30

1 ــ $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

الحد الثالث من أجل $k = 2$ هو : $C_n^2 x^2$

إذن : $C_n^2 x^2 = 28\, x^2$ يكافئ $C_n^2 = 28$

يكافئ $\frac{n\,!}{(n-2)!\,2\,!} = 28$

يكافئ $\frac{n(n-1)}{2} = 28$

يكافئ $n(n-1) = 56$

يكافئ $n^2 - n - 56 = 0$

$\Delta = 1 + 224 = 225 = (15)^2$

$n_1 = \frac{1 - 15}{2} = -7$ مرفوض

$n_2 = \frac{1 + 15}{2} = 8$ مقبول

نتيجة : $n = 8$

2 – من أجل $n = 8$ الحد الخامس هو $C_8^4 x^4 = \frac{8!}{4!4!} x^4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} x^4 = 70 x^4$

إذن : $70 x^4 = 1120$ يكافئ $x^4 = 16$

يكافئ $x = \sqrt[4]{16}$

يكافئ $x = -2$ أو $x = 2$

نتيجة : توجد قيمتين لـ x حتى يكون الحد الخامس هو 1120 و هما $\{2 ; -2\}$

3 – من أجل $n = 15$

الحد ذو الرتبة $m - 1$ من أجل $k = m - 2$ هو $C_{15}^{m-2} x^{m-2}$

الحد ذو الرتبة $2m + 3$ من أجل $k = 2m + 2$ هو $C_{15}^{2m+2} x^{2m+2}$

إذن : $C_{15}^{m-2} = C_{15}^{2m+2}$ يكافئ $m - 2 = 2m + 2$ أو $m - 2 = 15 - (2m + 2)$ أو $2m + 2 = 15 - (m - 2)$

يكافئ $-m = 4$ أو $m - 2 = 15 + 2m + 2$ أو $2m + 2 = 17 - m$

يكافئ $m = -4$ مرفوض أو $m = -19$ مرفوض أو $m = 5$

يكافئ $m = 5$

التمرين – 31

ليكن X المتغير العشوائي المعرف كما يلي :

α	-1	2	3	4
$p(X = \alpha)$	1/3	1/4	1/5	a

1 – عين قيمة العدد الحقيقي a

2 – أحسب $P(X \geq 5/2)$ ثم $P(X < 1)$

3 – أحسب $p(X^2 \leq 2)$

4 – أحسب $p(X^2 - 6X + 8 < 0)$

الحل – 31

1 – $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + a = 1$ منه $\frac{20 + 15 + 12}{60} + a = 1$

أي : $\frac{47}{60} + a = 1$

أي : $a = 1 - \frac{47}{60}$

أي : $a = \frac{13}{60}$

2 – $p(X \geq 5/2) = p(X = 3) + p(X = 4)$

$= \frac{1}{5} + a$

$$= \frac{1}{5} + \frac{13}{60}$$

$$= \frac{25}{60}$$

$$= \frac{5}{12}$$

$$p(X < 1) = p(X = -1) = \frac{1}{3}$$

3 ــ $p(X^2 \le 2) = p(X = -1) = \frac{1}{3}$

4 ــ

X	-1	2	3	4
X^2	1	4	9	16
$-6X$	6	-12	-18	-24
$X^2 - 6X + 8$	15	0	-1	0

نتيجة : $p(X^2 - 6X + 8 < 0) = p(X = 3) = \frac{1}{5}$

التمرين ــ 32

يحتوي كيس على 5 كرات تحمل الرقم 10 و 3 كرات تحمل الرقم 15
نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس
X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الرقمين المسحوبين .
1 ــ ما هي القيم الممكنة للمتغير X
2 ــ عرف قانون احتمال المتغير X
3 ــ أحسب E(X) الأمل الرياضياتي للمتغير X
4 ــ أحسب التباين Var(X)
5 ــ أحسب $p(X \ge 25)$

الحــل ــ 32

1 ــ

⊕	10	15
10	20	25
15	25	30

إذن : القيم الممكنة لــ X هي $\{20 ; 25 ; 30\}$

2 ــ عدد الحالات الممكنة للسحب $C_8^2 = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين تحملان الرقم 10 : $C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين تحملان الرقم 15 : $C_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرة تحمل 15 و أخرى تحمل 10 : $C_5^1 \times C_3^1 = 5 \times 3 = 15$

منه : $p(X = 20) = 10/28$ ؛ $p(X = 25) = 15/28$ ؛ $p(X = 30) = 3/28$

إذن : قانون احتمال المتغير X هو كمايلي :

α	20	25	30
$p(X = \alpha)$	10/28	15/28	3/28

3 ــ $E(X) = 20\left(\frac{10}{28}\right) + 25\left(\frac{15}{28}\right) + 30\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{200 + 375 + 90}{28} = 23,75$

4 ــ $Var(x) = \frac{10}{28}(3,75)^2 + \frac{15}{28}(1,25)^2 + \frac{3}{28}(6,25)^2 = 10,04$

5 ــ $p(X \ge 25) = p(X = 25) + p(X = 30)$

$$= \frac{15}{28} + \frac{3}{28}$$
$$= \frac{18}{28}$$
$$= \frac{9}{14}$$

التمرين ـ 33

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 و 3 كرات سوداء مرقمة 1 ، 2 ، 3 .
نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق الكرة البيضاء بالرقم (1+) و الكرة السوداء بـ 0
ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل كرة الرقم الذي تحمله .
1 ـ عرف قانون احتمال كل من X و Y
2 ـ أحسب E(X) و E(Y)
3 ـ أثبت أن المتغيران X و Y مستقلان
4 ـ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي T حيث T = X Y ثم أحسب E(T)

الحـل ـ 33

1 ـ القيم الممكنة لـ X هي $\{0 ; 1\}$

$p(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$p(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

X_i	0	1
$p(X = X_i)$	1/2	1/2

القيم الممكنة لـ Y هي $\{1 ; 2 ; 3\}$

$p(Y = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$p(Y = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$p(Y = 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Y_i	1	2	3
$p(Y = Y_i)$	1/3	1/3	1/3

2 ـ

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

3 ـ

$p(X = 0 ; Y = 1) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 0) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(X = 0 ; Y = 2) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 0) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(X = 0 ; Y = 3) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 0) \times p(Y = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(X = 1 ; Y = 1) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 1) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(X = 1 ; Y = 2) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 1) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(X = 1 ; Y = 3) = \frac{1}{6}$ و $p(X = 1) \times p(Y = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

نتيجة : من أجل كل $i \in \{0 ; 1\}$ ؛ من أجل كل $k \in \{1 ; 2 ; 3\}$
$p(X = i) \times p(Y = k) = p(X = i ; Y = k)$ إذن : المتغيران X و Y مستقلان

4 ـ نضع $T = XY$ إذن : القيم الممكنة لـ T هي $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

T_i	0	1	2	3
$p(T = T_i)$	1/2	1/6	1/6	1/6

منه : $E(T) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1+2+3}{6} = 1$

التمرين ـ 34

يحتوي كيس على 4 كرات تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، a حيث $a \in IN$
نسحب كرة واحدة من الكيس . نضع P_k احتمال سحب الكرة ذات الرقم k (السحب ليس متساوي الاحتمال)
1 ـ أحسب P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_a علما أنها بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{18}$
2 ـ ليكن F المتغير العشوائي الذي يرفق كل كرة مسحوبة بالرقم الذي تحمله . أوجد قيمة العدد الطبيعي a حتى يكون الأمل الرياضياتي للمتغير F هو $E(F) = \frac{43}{9}$

الحـل ـ 34

1 ـ $P_a + P_3 + P_2 + P_1 = 1$ إذن : $P_1 + \left(P_1 + \frac{1}{18}\right) + \left(P_1 + \frac{2}{18}\right) + \left(P_1 + \frac{3}{18}\right) = 1$

أي : $4P_1 + \frac{6}{18} = 1$

أي : $4P_1 = 1 - \frac{1}{3}$

أي : $P_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

نتيجة : $P_1 = \frac{1}{6}$

$P_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

$P_3 = \frac{2}{9} + \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$

$P_a = \frac{5}{18} + \frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

2 ـ قانون المتغير العشوائي F هو كمايلي :

F_i	1	2	3	a
$P(F = F_i)$	1/6	2/9	5/18	1/3

$$E(F) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{2}{9}\right) + 3\left(\frac{5}{18}\right) + a\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{4}{9} + \frac{15}{18} + \frac{a}{3}$$

$$= \frac{3+8+15}{18} + \frac{a}{3}$$

$$= \frac{26}{18} + \frac{a}{3}$$

$$= \frac{13}{9} + \frac{a}{3}$$

نتيجة : $E(F) = \frac{43}{9}$ يكافئ $\frac{13}{9} + \frac{a}{3} = \frac{43}{9}$

يكافئ $\frac{a}{3} = \frac{43}{9} - \frac{13}{9}$

يكافئ $\frac{a}{3} = \frac{30}{9}$

يكافئ $9a = 90$

يكافئ $a = 10$

التمرين ـــ 35

يحتوي كيس على 20 كرات مرقمة من 1 إلى 20 لا نفرق بيها عند اللمس

I) نسحب من الكيس كرة واحدة . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A) الحصول على مضاعف 4

B) كرة تحمل عددا ليس مضاعفا 5

II) نسحب من الكيس كرتين في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A) كرتين تحملان مضاعفا لــ 4

B) كرة تحمل مضاعف 3 و أخرى تحمل مضاعف 4

III) نسحب الآن 3 كرات في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A) ثلاث كرات مضاعفات 4

B) ثلاث كرات مجموع أرقامها زوجي

الحـل ـــ 35

I) مضاعفات 4 هي $\{4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20\}$

الأرقام غير مضاعفات 5 هي $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19\}$

نتيجة : $P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

$P(B) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

II) عدد الحالات الممكنة هو $C_{20}^{2} = \frac{20\,!}{18!2\,!} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$

مضاعفات 4 : $\{4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20\}$

مضاعفات 3 : $\{3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18\}$

نتيجة : $P(A) = \frac{C_5^2}{190} = \frac{\frac{5\,!}{3\,!2\,!}}{190} = \frac{\frac{5 \times 4}{2}}{190} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$

لاحظ أن العدد 12 مضاعف لكل من 3 و 4 إذن نميز 3 حالات كمايلي :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{مضاعف } 3 \text{ و مضاعف } 4 \text{ مختلفين عن } 12 \\ 12 \text{ و مضاعف } 4 \text{ مختلف عن } 12 \\ 12 \text{ و مضاعف } 3 \text{ مختلف عن } 12\end{array}\right.$$

إذن : $$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_5^1 + C_1^1 \times C_5^1 + C_1^1 \times C_4^1}{190}$$

$$= \frac{4 \times 5 + 1 \times 5 + 1 \times 4}{190}$$

$$= \frac{20 + 5 + 4}{190}$$

$$= \frac{29}{190}$$

III) عدد الحالات الممكنة : $C_{20}^{3} = \frac{20\,!}{17!3\,!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2} = 1140$

$$P(A)=\frac{C_5^3}{1140}=\frac{10}{1140}=\frac{1}{114}$$

سحب 3 كرات مجموع أرقامها زوجي يوافق أحد الحالات التالية :

سحب 3 أرقام زوجية

سحب رقمين فرديين و رقم زوجي علما أن { عدد الأرقام الفردية هو : 10 ، عدد الأرقام الزوجية هو : 10 }

إذن :

$$P(B)=\frac{C_{10}^3+C_{10}^2\times C_{10}^1}{1140}=\frac{120+45\times 10}{1140}=\frac{570}{1140}=\frac{57}{114}=\frac{19}{38}=\frac{1}{2}$$

التمرين ــ 36

يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة الاحتمال موزعة كمايلي :

5 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3

3 كرات خضراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3

2 كرات حمراء تحمل الأرقام 3 ، 3

نسحب من الكيس 3 كرات في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A) الحصول على كرة بيضاء و كرتين حمراوين

B) الحصول على كرة حمراء على الأقل

C) الحصول على كرات مجموع أرقامها أكبر تماما من 7

الحــل ــ 36

عدد الحالات الممكنة : $C_{10}^3=\frac{10!}{7!3!}=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2}=120$

عدد الحالات الملائمة للحادثة A هو : $C_5^1\times C_2^2=5\times 1=5$

منه : $P(A)=\frac{5}{120}=\frac{1}{24}$

عدد الحالات الملائمة للحادثة $\overline{B}$ هو $C_8^3=\frac{8!}{5!3!}=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2}=56$ (و لا كرة حمراء)

منه : $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{56}{120}=\frac{64}{120}=\frac{8}{15}$

يكون مجموع الأرقام المسحوبة أكبر تماما من 7 إذا و فقط إذا تم سحب 3 كرات تحمل الرقم 3 أو 2 كرات تحمل الرقم 3 و كرة تحمل الرقم 2

إذن : عدد الحالات الملائمة هو : $C_4^3+C_4^2\times C_3^1=4+6\times 3=22$

منه : $P(C)=\frac{22}{120}=\frac{11}{60}$

التمرين ــ 37

في سباق 400 متر تتابع كل فريق يتكون من 4 عدائين

يريد المدرب تشكيل فريق للمشاركة في المسابقة من بين 10 عدائين حيث يتم تحديد رتبة انطلاق كل عداء من العدائين الأربعة المشكلين للفريق

1 ــ كم من فريق مختلف يمكن للمدرب تشكيله

2 ــ ما هو احتمال أن يكون عداء ما ضمن الفريق المختار

الحــل ــ 37

1 ــ عند اختيار 4 عدائين نهتم بترتيبهم حسب الانطلاق

إذن : عدد الحالات الممكنة هي تراتيب لــ 4 عناصر من بين 10 عناصر و عددها :

$$A_{10}^4=10\times 9\times 8\times 7=5040$$

2 ــ عدد الحالات الملائمة للحادثة "الفريق لا يضم لاعب معين" هو A_9^4 (الحادثة العكسية)

أي : $A_9^4=9\times 8\times 7\times 6=3024$

منه : احتمال أن يكون الفريق يضم لاعب معين هو :

$$1 - \frac{3024}{5040} = \frac{2016}{5040} = \frac{2}{5}$$

التمرين ــ 38

في ثانوية ما 25% من التلاميذ مستواهم ضعيف في مادة الرياضيات و 15% منهم مستواهم ضعيف في مادة الفيزياء و 10% منهم مستواهم ضعيف في مادتي الرياضيات و الفيزياء معا .
نختار عشوائيا تلميذا واحدا من هذه الثانوية .
1 ــ إذا كان هذا التلميذ ذو مستوى ضعيف في مادة الفيزياء فما هو احتمال أن يكون مستواه ضعيفا أيضا في مادة الرياضيات ؟ .
2 ــ إذا كان هذا التلميذ ذو مستوى ضعيف في مادة الرياضيات فما هو احتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الفيزياء أيضا ؟ .
3 ــ ما هو احتمال أن يكون هذا التلميذ ذو مستوى ضعيف في مادة الفيزياء أو في مادة الرياضيات

الحــل ــ 38

لتكن الحوادث التالية :
A : التلميذ ضعيف في مادة الرياضيات
B : التلميذ ضعيف في مادة الفيزياء
1 ــ احتمال أن يكون التلميذ ضعيف في الرياضيات علما أنه ضعيف في الفيزياء هو :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{15}{100}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

2 ــ احتمال أن يكون التلميذ ضعيف في الفيزياء علما أنه ضعيف في الرياضيات هو :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{25}{100}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

3 ــ احتمال أن يكون التلميذ ضعيف في احدى المادتين الرياضيات أو الفيزياء هو :

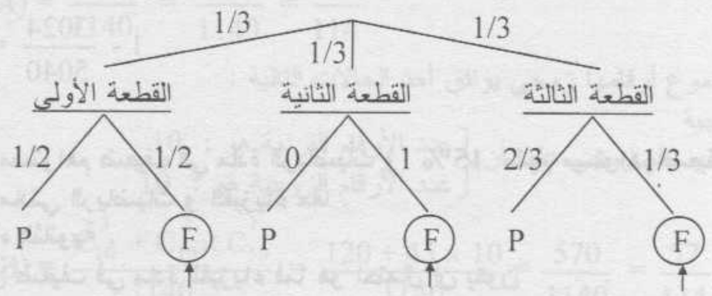
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{25}{100} + \frac{15}{100} - \frac{10}{100}$$
$$= \frac{25 + 15 - 10}{100}$$
$$= \frac{30}{100}$$
$$= \frac{3}{10}$$

التمرين ــ 39

يضم صندوق 3 قطع نقدية موزعة كمايلي :
القطعة الأولى تحمل وجه و ظهر متساويي الاحتمال
القطعة الثانية تحمل وجهين (لا تحمل ظهر)
القطعة الثالثة تحمل وجه و ظهر حيث احتمال ظهور الوجه هو 1/3
نختار عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق ثم نرميها مرة واحدة
ما هو احتمال الحصول على وجه

الحــل ــ 39

نرمز إلى الوجه بــ F و إلى الظهر بــ P
لدينا عملية اختيار القطعة من الصندوق متساوية الاحتمال و كل منها يساوي 1/3
اذن : نرسم الشجرة التالية :



نتيجة : احتمال الحصول على الوجه F هو :

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{3+6+2}{18}=\frac{11}{18}$$

ملاحظة : القطعة الثانية لا تحمل ظهر إذن $P(P) = 0$ و $P(F) = 1$

<u>التمرين ــ 40</u>

A ، B ، C ثلاث صناديق حيث :

الصندوق A مكون من 3 كرات حمراء و 5 كرات سوداء

الصندوق B مكون من 2 كرات حمراء و كرة سوداء

الصندوق C مكون من 2 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نأخذ أحد الصناديق عشوائيا و نسحب منه كرة واحدة

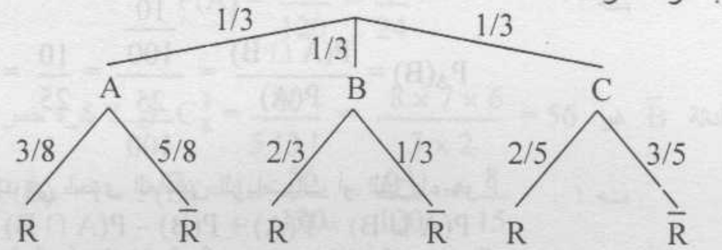
إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما هو احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق A ؟

<u>الحــل ــ 40</u>

لتكن A : الحادثة اختيار الصندوق A إذن : $P(A) = 1/3$

لتكن R : الحادثة سحب كرة حمراء

لدينا الشجرة التالية :



احتمال سحب الكرة من الصندوق A علما أنها حمراء هو الاحتمال الشرطي

$$P_R(A)=\frac{P(A\cap R)}{P(R)}$$

لدينا :

$$p(A\cap R)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$$

$$P(R)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{3}{8}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{45+80+48}{120}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{173}{120}$$

نتيجة :

$$P_R(A)=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{173}{3\times 120}}=\frac{1}{8}\times\frac{3\times 120}{173}=\frac{45}{173}$$

التمرين – 41

يضم كيس 10 كرات بيضاء و كرتين سوداوين
تسحب من الكيس كرتين على التوالي دون إرجاع
ترمز بـ B_i للحادثة الكرة المسحوبة في المرة i بيضاء
1 – أحسب الاحتمال $P(B_1)$ ثم $P_{B1}(B_2)$
2 – استنتج $P(B_2 \cap B_1)$

الحـل – 41

1 – $P(B_1) = \dfrac{10}{12}$ (سحب كرة أولى بيضاء)

$P_{B1}(B_2) = \dfrac{9}{11}$ (سحب كرة بيضاء في المرة الثانية علما أن الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء إذن تبقى 9 كرات بيضاء من بين 11 كرات)

2 – لدينا : $P_{B1}(B_2) = \dfrac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)}$

منه : $P(B_1 \cap B_2) = P_{B1}(B_2) \times P(B_1)$

$$= \frac{9}{11} \times \frac{10}{12}$$

$$= \frac{90}{132}$$

$$= \frac{15}{22}$$

نماذج للبكالوريــا

التمرين ـــ 1

يحتوي صندوق على 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

I) نسحب عشوائيا 3 كرات في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A : الحصول على 3 كرات بيضاء . C : الحصول على كرة بيضاء على الأقل

B : الحصول على 3 كرات سوداء .

II) نسحب 4 كرات في آن واحد . أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : الحصول على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء

B : الحصول على 3 كرات سوداء و كرة بيضاء .

III) نسحب 3 كرات في آن واحد ولا نعيدها إلى الصندوق ثم نسحب من الباقي 4 كرات في آن واحد .

ما هو احتمال أن تكون الكرات الثلاثة الأولى بيضاء و من بين الكرات الأربعة المسحوبة بعد ذلك كرة واحدة بيضاء فقط .

الحـل ـــ 1

I) عدد الحالات الممكنة هو : $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{7!3!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$

$$P(A) = \frac{C_6^3}{120} = \frac{1}{120} \times \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{120 \times 3 \times 2} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{C_4^3}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

II) عدد الحالات الممكنة هو : $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{6!4!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$

$$P(A) = \frac{C_6^3 \times C_4^1}{210} = \frac{20 \times 4}{210} = \frac{8}{21}$$

$$P(B) = \frac{C_4^3 \times C_6^1}{210} = \frac{4 \times 6}{210} = \frac{4}{35}$$

III) احتمال سحب 3 كرات بيضاء في المرة الأولى هو : $\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{6}$

بعد الحصول على 3 كرات بيضاء يبقى في الصندوق 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

إذن : احتمال سحب كرة واحدة بيضاء عند سحب 4 كرات في آن واحد هو :

$$\frac{C_3^1 \times C_4^3}{C_7^4} = \frac{3 \times 4}{35} = \frac{12}{35}$$

نتيجة : احتمال سحب 3 كرات بيضاء في المرة الأولى و كرة واحدة بيضاء في المرة الثانية هو :

$$P = \frac{1}{6} \times \frac{12}{35} = \frac{2}{35}$$

التمرين ـــ 2

يحتوي صندوق على 10 كرات مرقمة من 1 إلى 10

نسحب من الصندوق كرتين على التوالي مع الارجاع

1 ـــ أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4

2 ـــ أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 علما أن مجموعهما 10

الحــل ــ 2

عدد الحالات الممكنة للسحب هي قوائم لــ عنصرين من بين 10 عناصر و عددها $10^2 = 100$

1 ــ لتكن A الحادثة : سحب كرتين فرقهما 4

الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي (1 ، 5) ، (2 ، 6) ، (3 ، 7) ، (4 ، 8) ، (5 ، 9) ، (6 ، 2) ، (7 ، 3) ، (8 ، 4) ، (9 ، 5) ، (10 ، 6) ، (6 ، 10) ، (5 ، 1)

منه : $P(A) = \dfrac{12}{100}$

2 ــ لتكن B الحادثة : سحب كرتين مجموعهما 10

الحالات الملائمة للحادثة B هي (1 ، 9) ، (2 ، 8) ، (3 ، 7) ، (4 ، 6) ، (5 ، 5) ، (6 ، 4) ، (7 ، 3) ، (8 ، 2) ، (9 ، 1)

منه $P(B) = \dfrac{9}{100}$

الحالات الملائمة للحادثة $A \cap B$ هي (3 ، 7) ، (7 ، 3) منه $P(A \cap B) = \dfrac{2}{100}$

النتيجة : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{2}{100}}{\frac{9}{100}} = \dfrac{2}{9}$

التمرين ــ 3

يتكون قسم من 25 % بنات و 75 % ذكور

نفرض أن 60 % من البنات و 30 % من الأولاد هم تلاميذ جيدون .

نأخذ عشوائيا تلميذا من القسم . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A : أن يكون التلميذ بنتا

B : أن يكون التلميذ ولدا

C : أن يكون التلميذ جيدا

D : أن يكون التلميذ بنتا علما أنها عنصر جيد

الحــل ــ 3

$$P(A) = 25\ \% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = 75\ \% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$ (بنت جيدة أو ولد جيد)

$$= \frac{25}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{75}{100} \times \frac{30}{100}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{10}$$

$$= \frac{6+9}{40}$$

$$= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

$$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{25}{100} \times \frac{60}{100}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{5}$$ منه $P(D) = \dfrac{2}{5}$

التمرين ــ 4

يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 5 و 3 كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين خضراوين مرقمة من 9 إلى 10

نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد . أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : الكرتان تحملان رقمين فرديين

B : الكرتان من نفس اللون

C : الكرتان تحملان رقمان فرديان و من نفس اللون

D : الكرتان من لونان مختلفان

E : الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين

الحـل ــ 4

عدد الحالات الممكنة هو $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!8!} = \dfrac{10 \times 9}{2} = 45$

الألوان	بيضاء	حمراء	خضراء
الأرقام	1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5	6 ، 7 ، 8	9 ، 10
عدد الأرقام الفردية	3	1	1

$$P(A) = \frac{C_5^2}{45} = \frac{1}{45} \times \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{45 \times 2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$P(B) = \frac{C_5^2 + C_3^2 + C_2^2}{45} = \frac{10 + 3 + 1}{45} = \frac{14}{45}$$

$$P(C) = \frac{C_3^2}{45} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

لاحظ أن يوجد 3 كرات بيضاء تحمل أرقام فردية

إذن : لا يمكن سحب كرتين خضراوين أو حمراوين و تحملان أرقام فردية

$$P(D) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 + C_5^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_2^1}{45} = \frac{5 \times 3 + 5 \times 2 + 3 \times 2}{45} = \frac{31}{45}$$

$$P(E) = \frac{C_3^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1}{45} = \frac{3 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 1}{45} = \frac{7}{45}$$

تفسير : حتى تكون الكرات مختلفة الألوان و تحمل أرقام فردية يجب أن تكون : (بيضاء فردية ، حمراء فردية) أو (بيضاء فردية ، خضراء فردية) أو (حمراء فردية ، خضراء فردية)

التمرين ــ 5

A ، B ، C ثلاث صناديق تحتوي على كرات موزعة كمايلي :

في الصندوق A : 5 كرات بيضاء و كرة سوداء

في الصندوق B : 3 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء

في الصندوق C : كرة بيضاء و 4 كرات سوداء

يقوم لاعب برمي زهرة نرد ذات 6 أوجه مرقمة و متساوية الاحتمال .

إذا كان الرقم الظاهر هو 1 يسحب من الصندوق A

إذا كان الرقم الظاهر 2 أو 3 يسحب من الصندوق B

إذا كان الرقم الظاهر 4 أو 5 أو 6 يسحب من الصندوق C

I) إذا كان اللاعب يسحب كرة واحدة فقط ، أحسب احتمال أن تكون بيضاء

II) إذا كان اللاعب يسحب كرتان في آن واحد . أحسب احتمال الحوادث التالية :

X : كرتين بيضاوين

Y : كرتين سوداوين من الصندوق B .

الحـل ــ 5

لدينا الشجرة التالية :

رمي زهرة النرد

1/6 2/6 3/6

1 2 أو 3 4 أو 5 أو 6

سحب من الصندوق A سحب من الصندوق B سحب من الصندوق C

II) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء هو مجموع ثلاث احتمالات كمايلي :

أن تكون الكرة بيضاء من الصندوق A .

أن تكون الكرة بيضاء من الصندوق B .

أن تكون الكرة بيضاء من الصندوق C .

نتيجة : احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء هو كمايلي :

$$P = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{36} + \frac{6}{30} + \frac{3}{30} = \frac{5}{36} + \frac{3}{10} = \frac{25+54}{180} = \frac{79}{180}$$

III) الكرتان بيضاوين في حالتين فقط كمايلي :

كرتان بيضاوين من الصندوق A

كرتان بيضاوين من الصندوق B

منه احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو :

$$P(X) = \frac{1}{6} \times \frac{C_5^2}{C_6^2} + \frac{2}{6} \times \frac{C_3^2}{C_5^2}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{10}{15} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{10}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

$$= \frac{19}{90}$$

كرتين سوداوين من الصندوق B : $P(Y) = \frac{2}{6} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{2}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{30}$

التمرين ــ 6

X و Y لاعبان لرمي الأسهم كل منهما يسدد سهمه نحو هدف دائري مقسم إلى 3 مناطق I ، II ، III . حيث كل رمية تصيب منطقة واحدة فقط من بين المناطق I ، II ، III

احتمال إصابة الرامي X للمناطق I ، II ، III هي على الترتيب 1/12 ؛ 1/3 و 7/12 أما احتمالات إصابة الرامي Y للمناطق I ، II ، III فهي متساوية .

يسدد الرامي X سهمه ثلاث مرات متتابعة . أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : يصيب المنطقة III في كل رمية .

B : يصيب المناطق I ، II ، III بهذا الترتيب .

C : يصيب المناطق I ، II ، III

نختار الآن أحد الراميين X أو Y علما أن احتمال اختيار الرامي X هو ضعف احتمال اختيار الرامي Y في حالة تسديد رمية واحدة ما هو احتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة III

الحـل ــ 6

لدينا الحالات التالية للرامي X :

الحادثة	الرمية الثالثة	الرمية الثانية	الرمية الأولى
	I	I	I
	II		
	III		
	I	II	
	II		
a	III		
	I	III	
b	II		
	III		
	I	I	II
	II		
c	III		
	I	II	
	II		
	III		
d	I	III	
	II		
	III		
	I	I	III
e	II		
	III		
f	I	II	
	II		
	III		
	I	III	
	II		
g	III		

نتيجة :

الحادثة g توافق الحادثة A منه : $P(A)=\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{1728}$

الحادثة a توافق الحادثة B إذن : $P(B)=\frac{1}{12}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{12}=\frac{7}{432}$

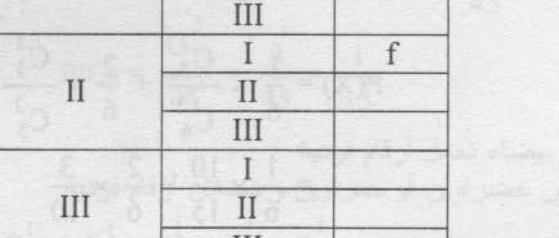
الحوادث a ، b ، c ، d ، e ، f توافق الحادثة C منه

$$P(C)=6\times\left(\frac{1}{12}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{12}\right)=\frac{6\times 7}{432}=\frac{7}{72}$$

باختيار أحد الراميين نضع α احتمال اختيار الرامي Y

منه : $\alpha+2\alpha=1$ أي $\alpha=1/3$

منه الشجرة التالية :



احتمال أن تصيب الرمية المنطقة III هو : $P = \frac{2}{3} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

تفسير : إما أن تكون الرمية من اللاعب X $= \frac{7}{18} + \frac{1}{9}$

أو تكون الرمية من اللاعب Y $= \frac{7+2}{18}$

$= \frac{1}{2}$

التمرين ــ 7

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z^3 - 4z^2 + z - 4 = 0$ ....(1)

1 ــ أوجد z_1 ، z_2 ، z_3 حلول المعادلة (1) ثم أكتبها على شكلها المثلثي .

2 ــ عين الجذور التربيعية لكل من z_1 ، z_2 ، z_3

زهرة نرد متجانسة الأوجه كل وجه منها يحمل جذرا تربيعيا من الجذور المحصل عليها في السؤال (2) نرمي هذه الزهرة مرتين متتابعتين

3 ــ ما هو احتمال الحصول على جذرين مربعاهما متساويان ؟

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل عمليتي رمي بطويلة جداء العددين المركبين المحصل عليهما

4 ــ عرف قانون الاحتمال للمتغير X

5 ــ أحسب E(X) الأمل الرياضياتي للمغير X

الحــل ــ 7

1 ــ لاحظ أن $z_1 = i$ هو حل للمعادلة $z^3 - 4z^2 + z - 4 = 0$

لنبحث عن الحلول الأخرى :

$$\begin{array}{l|l} z^3 - 4z^2 + z - 4 & z - i \\ \cline{2-2} z^3 - i z^2 & z^2 + (-4+i)z - 4i \\ \hline (-4+i)z^2 + z - 4 & \\ (-4+i)z^2 + (4i+1)z & \\ \hline -4iz - 4 & \\ -4iz - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

لنحل المعادلة $z^2 + (-4+i)z - 4i = 0$

$\Delta = 16 - 8i - 1 + 16i$

$= 15 + 8i$

$= (4+i)^2$

$$\begin{cases} z_2 = \frac{4 - i + 4 + i}{2} = 4 \\ z_1 = \frac{4 - i - 4 - i}{2} = -i \end{cases}$$

نتيجة : $z_1 = i$ ؛ $z_2 = 4$ ؛ $z_3 = -i$ ،

2 ــ جذور z_1 هي : $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i ; \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$

جذور z_2 هي : $\{2 ; -2\}$

جذور z_3 هي : $\left\{\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i ; \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$

3 ــ احتمال الحصول على جذرين مربعاهما متساويان هو : $P = 3 \times \left(\frac{2}{6} \times \frac{2}{6}\right) = \frac{1}{3}$

تفسير : إما نحصل على جذر z_1 ثم الجذر الآخر لــ z_1 (يمكن أن يكون نفسه)

أو نحصل على جذر z_2 ثم الجذر الآخر لــ z_2 (يمكن أن يكون نفسه)

أو نحصل على جذر z_3 ثم الجذر الآخر لــ z_3 (يمكن أن يكون نفسه)

ملاحظة : إذا سمينا على الترتيب a ، b ، c ، d ، e ، f الجذور التربيعية للأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، z_3
فإن الحالات الملائمة للحادثة هي :
(a ، a) ، (b ، a) ، (a ، b) ، (b ، b) ، (c ، c) ، (d ، c) ، (d ، d) ، (c ، d) ، (e ، e) ،
(f ، e) ، (f ، f) ، (e ، f) و عددها 12
و عدد الحالات الممكنة هو $6^2 = 36$

منه : الاحتمال المطلوب هو $\dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$

4 ــ كل من الجذور التربيعية للأعداد z_1 ، z_2 ، z_3 طاولاتها على الترتيب 1 ، 2 ، 1
إذن : القيم الممكنة لـــ X هي 1 ، 2 ، 4 $(|z.z'| = |z| \times |z'|)$

تفسير : نسحب في المرة الأولى أحد الجذور و في المرة الثانية
أحد الجذور حيث جداء طاولتيهما يساوي قيمة X

$$P(X=1) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$$

$$P(X=2) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{9}$$

$$P(X=4) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

منه : قانون الاحتمال للمتغير X كمايلي :

X_i	1	2	4
$P(X = X_i)$	4/9	4/9	1/9

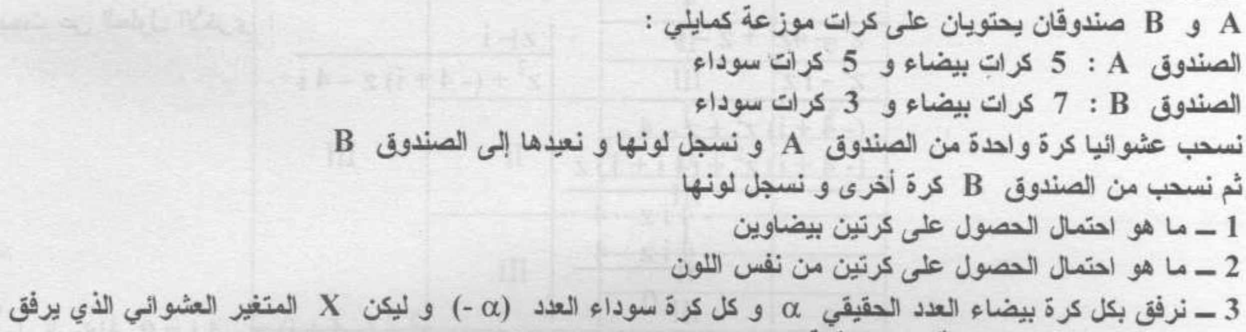
$$E(x) = \frac{4}{9} + \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9}$$

التمرين ــ 8

A و B صندوقان يحتويان على كرات موزعة كمايلي :
الصندوق A : 5 كراتٍ بيضاء و 5 كرات سوداء
الصندوق B : 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء
نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق A و نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق B
ثم نسحب من الصندوق B كرة أخرى و نسجل لونها
1 ــ ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين
2 ــ ما هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون
3 ــ نرفق بكل كرة بيضاء العدد الحقيقي α و كل كرة سوداء العدد $(-\alpha)$ و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع الأعداد المرقمة بها
a) عرف قانون احتمال المتغير X ثم أحسب E(X) (أمله الرياضياتي)
b) عين α حتى يكون $E(X) = 1$
4 ــ نضيف إلى الصندوق B $(n-3)$ كرة سوداء حيث n عدد طبيعي أكبر من 3
نعيد عملية السحب كما في السؤال (1)
a) ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين .
b) عين قيمة n حتى يكون احتمال سحب كرتين بيضاوين يساوي 0,25

الحـل ــ 8

لدينا الشجرة التالية :



نتيجة :

1 ــ احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو $\frac{1}{2} \times \frac{8}{11} = \frac{4}{11}$

2 ــ احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون هو $\frac{1}{2} \times \frac{8}{11} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \frac{4}{11} + \frac{2}{11} = \frac{6}{11}$

3 ــ القيم الممكنة لــ X هي $\{2\alpha ; -2\alpha ; 0\}$ حسب الحالات التالية :

الكرتين بيضاوين : $\alpha + \alpha = 2\alpha$

الكرتين سوداوين : $-\alpha - \alpha = -2\alpha$

الكرتين مختلفتين في اللون : $\alpha - \alpha = 0$

a) منه قانون احتمال المتغير x كمايلي :

X_i	0	-2α	2α
$P(X = X_i)$	$5/11$	$2/11$	$4/11$

حسب السؤال الأول : $P(X = 2\alpha) = \frac{4}{11}$

$$P(X = -2\alpha) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \frac{2}{11}$$

إذن : $P(X = 0) = 1 - \left(\frac{4}{11} + \frac{2}{11}\right) = \frac{5}{11}$

نتيجة : $E(X) = 0 - 2\alpha\left(\frac{2}{11}\right) + 2\alpha\left(\frac{4}{11}\right) = \frac{-4\alpha + 8\alpha}{11} = \frac{4\alpha}{11}$

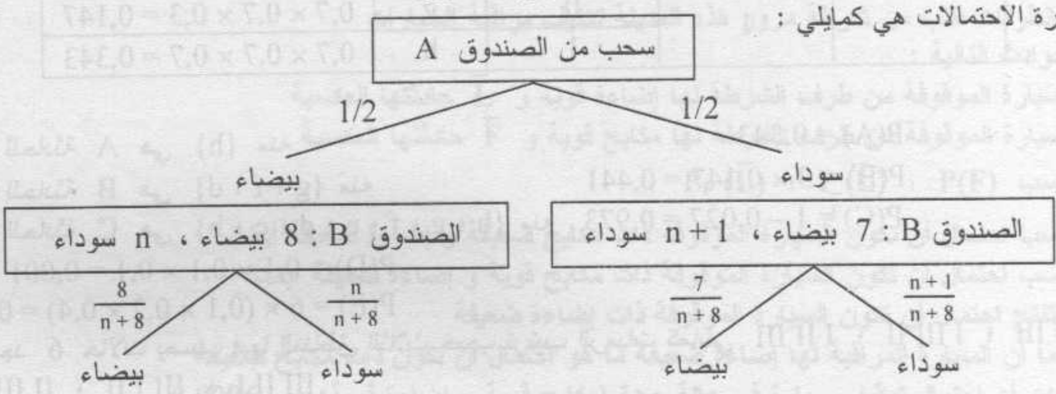
b) $E(X) = 1$ يكافئ $\frac{4\alpha}{11} = 1$

يكافئ $4\alpha = 11$

يكافئ $\alpha = \frac{11}{4}$

4 ــ نعيد عملية السحب بعد اضافة $(n - 3)$ كرة سوداء إلى الصندوق B

شجرة الاحتمالات هي كمايلي :



a) احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو $P = \frac{1}{2} \times \frac{8}{n+8} = \frac{4}{n+8}$

b) $P = 0{,}25$ يكافئ $\frac{4}{n+8} = 0{,}25$

يكافئ $\frac{4}{n+8} = \frac{1}{4}$

يكافئ $n + 8 = 16$

يكافئ $n = 8$

نتيجة : للحصول على احتمال سحب كرتين بيضاوين يساوي $0{,}25$ يكفي أن يكون $n = 8$

إذن يكفي أن نضيف 5 كرات سوداء إلى الصندوق B $\quad n - 3 = 8 - 3 = 5$

التمرين ــ 9

I) يسدد لاعب 3 رميات متتابعة نحو هدف

إذا علمت أن احتمال أن يصيب الهدف هو 0,7 أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : يصيب الهدف 3 مرات

B : يصيب الهدف مرتين فقط

C : يصيب الهدف مرة واحدة على الأقل

II) إذا علمت أن الهدف مكون من 3 مناطق مختلفة I ، II ، III حيث احتمالات إصابتها هي على الترتيب 0,1 ؛ 0,2 ؛ 0,4 أحسب احتمال الحوادث التالية :

D : يصيب المنطقة I 3 مرات

E : كل رمية تصيب منطقة واحدة من بين المناطق الثلاثة

III) يقوم اللاعب برمية واحدة فقط نرفق بكل رمية العلامة 10 إذا أصاب المنطقة I و العلامة 7 إذا أصاب المنطقة II و العلامة 5 إذا أصاب المنطقة III و العلامة 0 إذا كانت الاصابة خارج المناطق الثلاث

ليكن f المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العلامة المحصل عليها .

عين قانون احتمال المتغير f ثم أمله الرياضياتي E(f)

الحـــل ــ 9

I) نرسم جدول الرميات الثلاثة حيث نرمز بـــ 1 إذا أصاب الهدف . 0 إذا لم يصب الهدف .

إذن : الحالات الممكنة هي كمايلي :

ملاحظة : احتمال أن لا يصيب الهدف هو $1 - 0,7 = 0,3$

الرمية الأولى	الرمية الثانية	الرمية الثالثة	الحادثة	الاحتمال
0	0	0	a	$0,3 \times 0,3 \times 0,3 = 0,027$
		1	b	$0,3 \times 0,3 \times 0,7 = 0,063$
	1	0	c	$0,3 \times 0,7 \times 0,3 = 0,063$
		1	d	$0,3 \times 0,7 \times 0,7 = 0,147$
1	0	0	e	$0,7 \times 0,3 \times 0,3 = 0,063$
		1	f	$0,7 \times 0,3 \times 0,7 = 0,147$
	1	0	g	$0,7 \times 0,7 \times 0,3 = 0,147$
		1	h	$0,7 \times 0,7 \times 0,7 = 0,343$

نتيجة :

الحالات الموافقة للحادثة A هي {h} منه $P(A) = 0,343$

الحالات الموافقة للحادثة B هي {g ؛ f ؛ d} منه $P(B) = 3 \times 0,147 = 0,441$

الحالات الموافقة للحادثة C هي {h ؛ g ؛ f ؛ e ؛ d ؛ c ؛ b} منه $P(C) = 1 - 0,027 = 0,973$

II) $P(D) = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 = 0,001$

$P(E) = 6 \times (0,1 \times 0,2 \times 0,4) = 0,024$

تفسير : يوجد 6 حالات يصيب فيها المناطق الثلاث حسب ترتيب الرميات كمايلي I II III ؛ I III II ؛ II I III ؛ III II I ؛ III I II ؛ II III I

III) قانون المتغير العشوائي f :

f_i	10	7	5	0
$P(f = f_i)$	0,1	0,2	0,4	0,3

$$E(f) = 10(0,1) + 7(0,2) + 5(0,4) + 0 = 1 + 1,4 + 2 = 4,4$$

التمرين ــ 10

في لعبة يرمي اللاعب زهرة نرد متجانسة مرة واحدة و كلما كان الرقم المحصل عليه زوجي سمح له برمية أخرى . تنتهي اللعبة إجباريا بعد 10 رميات أو بتوقف اللاعب عن الرمي تلقائيا

1 ــ ما هو احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الأولى

2 ــ ما هو احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية

3 ــ إذا أراد اللاعب أن يكون احتمال حصوله على رقم فردي أكبر من 0,03 فما هو عدد الرميات التي لا ينبغي تجاوزها

الحـل ــ 10

1 ــ في الرمية الأولى ، احتمال الحصول على رقم فردي هو $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ (3 أرقام فردية من بين 6)

2 ــ حتى تكون هناك رمية ثانية يجب أن تكون نتيجة الرمية الأولى هي رقم زوجي

إذن : احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية هو $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3 ــ **تعميم** : للحصول على رقم فردي في الرمية n يجب أن يتحصل اللاعب في كل من الرميات السابقة من 1 إلى $(n-1)$ على رقم زوجي

منه : احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية n هو $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

نتيجة : حتى يكون احتمال الحصول على رقم فردي أكبر من 0,03 يلزم و يكفي

أن يكون : $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} > 0,03$

أي : $\ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right] > \ln(0,03)$

أي : $n \ln\left(\frac{1}{2}\right) > \ln(0,03)$

أي $-n \ln 2 > \ln 0,03$

أي $n < \frac{\ln 0,03}{-\ln 2}$

أي $n < 5,05$

منه : ينبغي للاعب أن لا يتجاوز 5 رميات

التمرين ــ 11

في دراسة خاصة لحالة سيارات مدينة معينة تبين أن : 12 % من السيارات ذات مكابح ضعيفة

من بين السيارات ذات المكابح الضعيفة هناك 20 % منها لها إضاءة ضعيفة

من بين السيارات ذات المكابح القوية هناك 8 % منها لها إضاءة ضعيفة

لسلامة الطرقات طلب من شرطة مرور هذه المدينة تكثيف مراقبة السيارات

لتكن الحوادث التالية :

L : السيارة الموقوفة من طرف الشرطة لها إضاءة قوية و $\overline{L}$ حادثتها العكسية

F : السيارة الموقوفة من طرف الشرطة لها مكابح قوية و $\overline{F}$ حادثتها العكسية

1 ــ أحسب $P(F)$ ؛ $P_{\overline{F}}(\overline{L})$ ؛ $P_F(\overline{L})$

2 ــ أحسب احتمال أن تكون السيارة الموقوفة ذات مكابح ضعيفة و إضاءة ضعيفة أيضا

3 ــ أحسب احتمال أن تكون السيارة الموقوفة ذات مكابح قوية و إضاءة ضعيفة أيضا

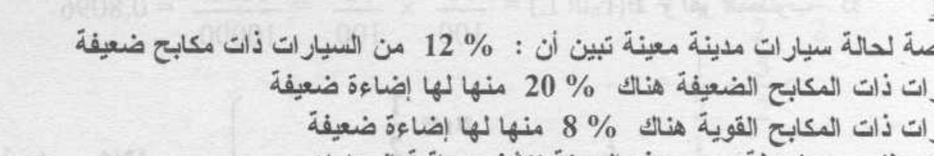
4 ــ استنتج احتمال أن تكون السيارة الموقوفة ذات إضاءة ضعيفة

5 ــ علما أن السيارة المراقبة لها إضاءة ضعيفة ما هو احتمال أن تكون ذات مكابح ضعيفة

6 ــ برهن أن احتمال توقيف سيارة في حالة جيدة (مكابح قوية و إضاءة قوية) هو 0,8096

الحـل ــ 11

لنمثل هذه النسب المئوية على شكل شجرة كمايلي :



منه النتائج التالية :

1 ــ $P(F) = 88\,\% = \dfrac{88}{100} = 0{,}88$

$$P_{\overline{F}}(\overline{L}) = \frac{P(\overline{F} \cap \overline{L})}{P(\overline{F})} = \frac{\frac{12}{100} \times \frac{20}{100}}{\frac{12}{100}} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$P_F(\overline{L}) = \frac{P(\overline{L} \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{88}{100} \times \frac{8}{100}}{\frac{88}{100}} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

2 ــ $P(\overline{F} \cap \overline{L}) = \dfrac{12}{100} \times \dfrac{20}{100} = \dfrac{3}{25} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{125}$

3 ــ $P(F \cap \overline{L}) = \dfrac{88}{100} \times \dfrac{8}{100} = \dfrac{22}{25} \times \dfrac{2}{25} = \dfrac{44}{625}$

4 ــ $P(\overline{L}) = P(F \cap \overline{L}) + P(\overline{F} \cap \overline{L}) = \dfrac{3}{125} + \dfrac{44}{625} = \dfrac{15+44}{625} = \dfrac{59}{625}$

5 ــ $P_{\overline{L}}(\overline{F}) = \dfrac{P(\overline{F} \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \dfrac{\frac{3}{125}}{\frac{59}{625}} = \dfrac{3}{125} \times \dfrac{625}{59} = \dfrac{15}{59}$

6 ــ $P(F \cap L) = \dfrac{88}{100} \times \dfrac{92}{100} = \dfrac{8096}{10000} = 0{,}8096$ و هو المطلوب .

.

التمرين ــ 12

I) (u_n) متتالية معرفة على IN^* بــ
$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = \dfrac{2}{5}\,u_{n-1} + \dfrac{1}{5} \quad \text{من أجل كل } n \in IN - \{0\,;\,1\} \end{cases}$$

1 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \in [0\,;\,1]$

2 ــ (v_n) متتالية معرفة على IN^* بــ $v_n = u_n - \alpha$ حيث $\alpha \in IR$

عين العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

3 ــ أحسب u_n بدلالة n ثم استنتج أن u_n متقاربة و عين نهايتها

II) A و B كيسان يحتويان على كرات موزعة كمايلي :

الكيس A : 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

الكيس B : 8 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء

نختار عشوائيا كيسا واحدا و نسحب منه كرة واحدة ثم نعيدها إلى نفس الكيس إذا كانت هذه الكرة بيضاء نسحب مرة أخرى من نفس الكيس أما إذا كانت سوداء فنسحب من الكيس الآخر و نعيد هذه التجربة n مرة .

ليكن u_n احتمال أن تكون السحبة رقم n من الكيس A

1 ــ أحسب u_1 ؛ u_2 ؛ u_3

2 ــ برهن أن من أجل كل $n \in IN - \{0\,;\,1\}$: $u_n = \dfrac{2}{5}\,u_{n-1} + \dfrac{1}{5}$

3 ــ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

الحـل ــ 12

I) 1 ــ البرهان بالتراجع : لتكن الخاصية $u_n \in [0\,;\,1]$

من أجل $n = 1$: $u_1 = \dfrac{1}{2}$ إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

من أجل $n = 2$: $u_2 = \frac{2}{5}u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

نفرض أن $u_n \in [0 ; 1]$ من أجل $n > 2$

هل $u_{n+1} \in [0 ; 1]$ ؟

حسب فرضية التراجع : $u_n \in [0 ; 1]$ يكافئ $0 \le u_n \le 1$

يكافئ $0 \le \frac{2}{5} u_n \le \frac{2}{5}$

يكافئ $\frac{1}{5} \le \frac{2}{5} u_n + \frac{1}{5} \le \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$

يكافئ $\frac{1}{5} \le u_{n+1} \le \frac{3}{5}$

و خاصة $0 \le u_{n+1} \le 1$

منه : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \in [0 ; 1]$

2 ــ

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha$$
$$= \frac{2}{5} u_n + \frac{1}{5} - \alpha$$
$$= \frac{2}{5} \left(u_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha\right)$$

نتيجة : تكون (v_n) هندسية إذا و فقط إذا كان $v_n = u_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha$

أي $u_n - \alpha = u_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha$

منه : $-\alpha = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha$

أي : $\frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2}$

منه : $\alpha = 1/3$

أخيرا $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ منه $v_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

خلاصة : (v_n) متتالية هندسية أساسها $2/5$ و حدها الأول $v_1 = 1/6$

إذن : $v_n = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

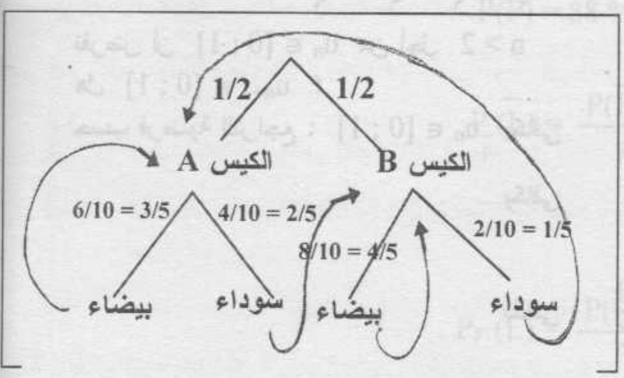
3 ــ لدينا : $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ منه $u_n = v_n + \frac{1}{3}$

أي : $v_n = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$

منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$

أي : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{3}$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$

II) لنمثل شجرة السحب كما يلي :



1 – $u_1 = \frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{3+1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$u_3 = u_2 \times \frac{6}{10} + (1 - u_2) \times \frac{2}{10}$

$= \frac{3}{5}\, u_2 - \frac{1}{5}\, u_2 + \frac{1}{5}$

$= \frac{2}{5}\, u_2 + \frac{1}{5}$

$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$

$= \frac{4+5}{25}$

$= \frac{9}{25}$

2 – u_n هو احتمال السحب من الكيس A في السحبة رقم n

البرهان بالتراجع : لتكن الخاصية $u_n = \frac{2}{5}\, u_{n-1} + \frac{1}{5}$ من أجل $n \in IN - \{0 ; 1\}$

من أجل $n = 2$ لدينا $u_2 = \frac{2}{5}$

و $\frac{2}{5}\, u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 2$

نفرض أن $u_n = \frac{2}{5}\, u_{n-1} + \frac{1}{5}$ من أجل $n > 2$

هل $u_{n+1} = \frac{2}{5}\, u_n + \frac{1}{5}$ ؟

نميز حالتين كمايلي :

السحب رقم n من الكيس A إذن : احتمال أن يكون السحب $(n+1)$ في الكيس A هو $\frac{6}{10}\, u_n = \frac{3}{5}\, u_n$

السحب رقم n من الكيس B إذن : احتمال أن يكون السحب $(n+1)$ في الكيس A هو $\frac{2}{10}(1 - u_n) = \frac{1}{5}(1 - u_n)$

منه : $u_{n+1} = \frac{3}{5}\, u_n + \frac{1}{5}(1 - u_n)$

$= \frac{3}{5}\, u_n - \frac{1}{5}\, u_n + \frac{1}{5}$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$ $= \frac{2}{5}\, u_n + \frac{1}{5}$

خلاصة : من أجل كل $n \in IN - \{0 ; 1\}$: $u_n = \frac{2}{5}\, u_{n-1} + \frac{1}{5}$

3 – $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1/3$ (حسب السؤال (3) من الجزء I)

لأن (u_n) هي المتتالية المعرفة في الجزء I من التمرين .

التمرين ــ 13

A و B لاعبان يتباريان في اللعبة التالية :
في البداية يدفع كل من اللاعبين مبلغ 1 DA و يرمي كل منهما قطعة نقدية غير مزيفة تحتوي على وجه F و ظهر P
إذا حصل A على الوجه و B على الظهر تتوقف اللعبة بفوز A الذي يأخذ المبلغ المدفوع $(1 + 1)$
إذا حصل A على الظهر و B على الوجه تتوقف اللعبة بفوز B الذي يأخذ المبلغ المدفوع $(1 + 1)$
في الحالات الأخرى يعتبر تعادلا و عليه يدفع اللاعبان مبلغ 1 DA ثم يبدآن من جديد رمي القطعة النقدية و هكذا تستمر اللعبة حتى يفوز أحد اللاعبين أو يحدث التعادل في المرة العشرين حيث كل لاعب يستعيد المبلغ الذي دفعه
من أجل كل عدد طبيعي n حيث $1 \leq n \leq 20$ نعرف الحوادث التالية :
A_n : اللعبة تنتهي في المحاولة n بفوز A
B_n : اللعبة تنتهي في المحاولة n بفوز B
I_n : المحاولة n هي تعادل
نضع $X_n = P(A_n)$ ؛ $Y_n = P(B_n)$ ؛ $Z_n = P(I_n)$
1 ــ أحسب X_1 ، Y_1 ، Z_1

2 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $1 \leq n \leq 19$:
$$\begin{cases} X_{n+1} = \dfrac{1}{4} Z_n \\ Y_{n+1} = \dfrac{1}{4} Z_n \\ Z_{n+1} = \dfrac{1}{2} Z_n \end{cases}$$

3 ــ استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $1 \leq n \leq 20$:
$$\begin{cases} X_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \\ Y_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \\ Z_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} \end{cases}$$

4 ــ ليكن T المتغير العشوائي الذي يعبر عن مبلغ اللعب أثناء المحاولة التي تنهي اللعبة أي المبلغ الذي يحصل عليه الفائز أو المبلغ الذي يتقاسمه اللاعبان في حالة انتهاء اللعبة بتعادل .
إذا توقفت اللعبة في المحاولة k يكون عندها $T = 2k$
1 ــ ما هي أكبر قيمة ممكنة لــ T ؟
2 ــ أحسب $P(T = 40)$
3 ــ أحسب $P(T = 2k)$ بدلالة k حيث k عدد طبيعي و $1 \leq k \leq 19$ ثم عين قانون احتمال المتغير T

الحــل ــ 13

1 ــ عند رمي اللاعبين A و B القطعة النقدية لدينا النتائج الممكنة كمايلي :

A	B	التفسير	الاحتمال
F	F	تعادل	1/4
F	P	فوز A	1/4
P	F	فوز B	1/4
P	P	تعادل	1/4

منه النتائج التالية :

$$X_1 = P(A_1) = \frac{1}{4}$$

$$Y_1 = P(B_1) = \frac{1}{4}$$

$$Z_1 = P(I_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ (حالتين للتعادل حسب الجدول)

2 ــ لتكن الخاصية :
$$\begin{cases} X_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n \\ Y_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n \\ Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n \end{cases}$$ من أجل $1 \le n \le 19$

البرهان بالتراجع :

لدينا :
$$\begin{cases} X_2 = \frac{1}{4} P(I_1) \\ Y_2 = \frac{1}{4} P(I_1) \\ Z_2 = \frac{1}{2} P(I_1) \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} X_2 = \frac{1}{4} Z_1 \\ Y_2 = \frac{1}{4} Z_1 \\ Z_2 = \frac{1}{2} Z_1 \end{cases}$$

منه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن $X_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n$ و $Y_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n$ و $Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n$ من أجل $1 \le n \le 18$

هل $X_{n+2} = \frac{1}{4} Z_{n+1}$ ، $Y_{n+2} = \frac{1}{4} Z_{n+1}$ ، $Z_{n+2} = \frac{1}{2} Z_{n+1}$ ؟

لدينا :
$$\begin{cases} X_{n+2} = \frac{1}{4} P(I_{n+1}) \\ Y_{n+2} = \frac{1}{4} P(I_{n+1}) \\ Z_{n+2} = \frac{1}{2} P(I_{n+1}) \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} X_{n+2} = \frac{1}{4} Z_{n+1} \\ Y_{n+2} = \frac{1}{4} Z_{n+1} \\ Z_{n+2} = \frac{1}{2} Z_{n+1} \end{cases}$$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n حيث $1 \le n \le 19$:
$$\begin{cases} X_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n \\ Y_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n \\ Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n \end{cases}$$

3 ــ $Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n$ إذن : (Z_n) متتالية هندسية أساسها $1/2$ و حدها الأول $Z_1 = 1/2$ منه $Z_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

أي $Z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

نتيجة :
$$\begin{cases} X_n = \frac{1}{4} Z_{n-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ Y_n = \frac{1}{4} Z_{n-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{cases}$$

II) 1 ــ يكون T أكبر ما يمكن إذا و فقط إذا انتهت اللعبة بالتعادل بعد 20 محاولة أي $k = 20$ منه $T = 40$

2 ــ يكون $T = 40$ (قيمة عظمى) إذا و فقط إذا كانت نتيجة الرمية 19 هو تعادل أي $P(T = 40) = Z_{19} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$

3 ــ من أجل $1 \le k \le 19$ يكون $T = 2k$ إذا و فقط إذا كانت اللعبة قد انتهت بعد k محاولة
أي إما فوز A أو فوز B

منه : $P(T = 2k) = X_k + Y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

نتيجة : القيم الممكنة لــ T هي $2 ; 4 ; 6 ; .... ; 2k ; .... 38 ; 40$

منه قانون الاحتمال للمتغير العشوائي T هو كمايلي :

T_i	2	4	6	....	2 k	....	38	40
$P(T = T_i)$	1/2	$(1/2)^2$	$(1/2)^3$		$(1/2)^k$		$(1/2)^{19}$	$(1/2)^{19}$

تحقيق :

حتى تكون هذه النتائج صحيحة يلزم و يكفي أن يكون المجموع

$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$ يساوي 1

لدينا : $$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

منه : $$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 1$$

حذار ! $P(T = 40)$ هو احتمال أن يكون التعادل في الرمية 19 مهما كانت النتيجة في الرمية 20

التمرين ــ 14

عشرة قريصات مرقمة من 1 إلى 10 . نسحب منها 3 قريصات في آن واحد

هل عدد الحالات الممكنة للحصول على رقم زوجي واحد على الأقل هو :

a) 180 b) 330 c) 110

الحــل ــ 14

عدد الأرقام الزوجية هو 5 و هي $\{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10\}$

الحصول على رقم زوجي على الأقل هي الحادثة العكسية للحادثة كل الأرقام فردية منه عدد الحالات الممكنة هو

$$C_{10}^3 - C_5^3 = 120 - 10 = 110$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو c) 110

التمرين ــ 15

A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث :

$P(A) = 0,4$ ؛ $P(B) = 0,5$ ؛ $P(\overline{A \cup B}) = 0,35$

هل قيمة الاحتمال $P(A \cap B)$ هي :

a) 0,1 b) 0,25 c) المعطيات غير كافية للجواب

الحــل ــ 15

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$ منه : $0,35 = 1 - P(A \cup B)$

أي : $P(A \cup B) = 1 - 0,35$

أي $P(A \cup B) = 0,65$

من جهة أخرى : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

أي : $0,65 = 0,4 + 0,5 - P(A \cap B)$

منه : $P(A \cap B) = 0,9 - 0,65$

أي : $P(A \cap B) = 0,25$

نتيجة : الجواب الصحيح هو b) 0,25

التمرين ــ 16

A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث $P(A \cap B) = 1/6$ و $P_A(B) = 1/4$. هل $P(A)$ يساوي :

a) 2/3 b) 1/24 c) 1/12

الحــل ــ 16

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ منه : $$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)}$$

أي $$P(A) = \frac{1/6}{1/4}$$

أي $$P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{1}$$

أي $$P(A) = \frac{2}{3}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو a) 2/3

التمرين ــ 17

X متغير عشوائي قانون احتماله كمايلي :

X_i	1	2	4
$P(X = X_i)$	1/2	1/4	1/4

هل الانحراف المعياري لــ X هو : a) $\frac{3}{2}$ b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ c) 2

الحــل ــ 17

$$E(X) = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$$

$$Var(X) = \frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{1}{4}(2-2)^2 + \frac{1}{4}(4-2)^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$