الأعداد الأولية

تعريف : نقول عن عدد طبيعي n أنه أولي إذا و فقط إذا كان له قاسمين فقط هما 1 و n $(n \neq 1)$

خاصية : لإثبات أن عدد طبيعي n أولي نتبع الخطوات التالية :

1 ــ إذا كان $\sqrt{n}$ عدد طبيعي فإن n ليس أولي .

2 ــ إذا كان $\sqrt{n}$ ليس عدد طبيعي نبحث عن المجموعة A من كل الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$

3 ــ إذا كانت كل عناصر المجموعة A لا تقسم n فإن n أولي (ماعدا 1)

4 ــ إذا وجد عنصر من المجوعة A يقسم العدد n فإن n ليس أولي .

مثال : هل العدد 341 أولي ؟

1 ــ $\sqrt{341} = 18{,}4$ إذن : $\sqrt{341}$ ليس عدد طبيعي .

2 ــ $A = \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17\}$

3 ــ بما أن العدد 11 يقسم 341 لأن $341 = 31 \times 11$ فإن 341 ليس أولي .

نشاط : n عدد طبيعي أكبر تماما من 3 . نضع $a = n^2 - 2n - 8$

هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها a عددا أوليا

الحـــل : لاحظ أن : $n^2 - 2n - 8 = (n-4)(n+2)$ حيث $\begin{cases} (n-4) \text{ عدد طبيعي لأن } n \geq 4 \\ n+2 \text{ عدد طبيعي} \end{cases}$

إذن : العدد a يحلل إلى جداء عددين طبيعيين هما $(n+2)$ و $(n-4)$

إذن : حتى يكون a أولي يجب أن يكون $\begin{cases} n-4 = 1 \\ n+2 \text{ أولي} \end{cases}$

أي $\begin{cases} n = 5 \\ 7 \text{ أولي (محقق)} \end{cases}$

نتيجة : يكون a أولي إذا و فقط إذا كان $n = 5$

ملاحظة :

- ✓ العدد 0 ليس أولي
- ✓ 1 ليس أولي لأن العدد 1 له قاسم واحد فقط هو نفسه .
- ✓ العدد 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد .
- ✓ مجموعة الأعداد الطبيعية الأولية غير منتهية أصغر عنصر منها هو 2

و من بينها : .....23 ; 19 ; 17 ; 13 ; 11 ; 7 ; 5; 3 ; 2

مبرهنة : كل عدد طبيعي غير أولي n حيث $n \geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية بطريقة وحيدة .

مثال : 24 ليس أولي إذن يمكن تحليل 24 كمايلي $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

نتيجة مباشرة : a و b عددان طبيعيان حيث $a > 1$ و $b > 1$

يكون b قاسما لـــ a إذا و فقط إذا كانت كل العوامل الأولية في تحليل b توجد في تحليل العدد a بشرط أن يكون الأس في b أصغر أو يساوي الأس في a

مثلا : $72 = 2^3 \times 3^2$

$18 = 2 \times 3^2$

لاحظ أن كل عوامل تحليل 18 توجد في تحليل 72 بأس أصغر من الأس الذي يظهر في تحليل 72 إذن : 18 يقسم 72

نشاط : البحث عن قواسم عدد طبيعي إنطلاقا من تحليله إلى عوامل أولية

ليكن n عدد طبيعي يحلل إلى جداء عوامل أولية كمايلي :

$n = a_1^{b_1} \times a_2^{b_2} \times \ldots\ldots \times a_p^{b_p}$ حيث a_1 ، a_2 ، .... a_p أعداد طبيعية أولية متمايزة مثنى مثنى و b_1 ؛ b_2 ؛ .... ؛ b_p أسس طبيعية

عدد قواسم العدد n هو الجداء $(b_1 + 1)(b_2 + 1) \ldots\ldots (b_p + 1)$

مثال : $n = 735$

باجراء التحليل : $735 = 3 \times 5 \times 7^2$

إذن : عدد قواسم 735 هو $(1 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 12$

735	3
245	5
49	7
7	7
1	

البحث عنها :

3	5	7	الجداء
3^0	5^0	7^0	1
		7^1	7
		7^2	49
	5^1	7^0	5
		7^1	35
		7^2	245
3^1	5^0	7^0	3
		7^1	21
		7^2	147
	5^1	7^0	15
		7^1	105
		7^2	735

نتيجة : قواسم العدد 735 هي {735 ; 105 ; 15 ; 147 ; 21 ; 3 ; 245 ; 35 ; 5 ; 49 ; 7 ; 1} و عددها 12

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين غير معدومين

تعريف : a و b عددان طبيعيان غير معدومين . نسمي M_a مجموعة مضاعفات العدد a

و M_b مجموعة مضاعفات العدد b

$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b .

أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b

و نرمز له بـــ PPCM(a ; b)

ملاحظات : الرمز PPCM يعني plus petit commun multiple

PPCM(a ; a) = a

PPCM(1 ; a) = a

أمثلة : مضاعفات 6 هي {0 ; 6 ; 12 ; 18 ; 24 ; 30 ; 36 ; 42 ; .....}

مضاعفات 8 هي {0 ; 8 ; 16 ; 24 ; 32 ; 40 ; 48 ; .....}

المضاعفات المشتركة لـــ 6 و 8 هي {0 ; 24 ; 48 ; 72 ; .....}

إذن : PPCM(6 ; 8) = 24

تمديد : إذا كان a ، b عددان صحيحان فإن PPCM(a ; b) = PPCM(|a| ; |b|)

خاصية أساسية : a و b عددان طبيعيان غير معدومين

إذا كان k عدد صحيح غير معدوم فإن PPCM(k a ; k b) = |k| × PPCM(a ; b)

نشاط : عين العدد الطبيعي غير المعدوم a حيث PPCM(56 ; a) = 280

الحـــل : 280 مضاعف لـــ a إذن : a يقسم 280

لنبحث عن قواسم العدد 280 باستعمال التحليل :

280	2
140	2
70	2
35	5
7	7
1	

56	2
28	2
14	2
7	7
1	

إذن : $280 = 2^3 \times 5 \times 7$

إذن : a يكتب من الشكل $2^x \times 5^y \times 7^z$ حيث $x \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ ؛

$y \in \{0 ; 1\}$ ، $z \in \{0 ; 1\}$

بما أن $PPCM(56 ; a) \neq 56$ فإن a لا يقسم 56

إذن : $y = 1$ لأن 5 لا يقسم 56

منه : القيم الممكنة لـــ a هي كمايلي :

{280 ; 40 ; 140 ; 20 ; 70 ; 10 ; 35 ; 5}

2	7	5	A
2^0	7^0	5^1	5
	7^1	5^1	35
2^1	7^0	5^1	10
	7^1	5^1	70
2^2	7^0	5^1	20
	7^1	5^1	140
2^3	7^0	5^1	40
	7^1	5^1	280

تمرين : n عدد طبيعي غير معدوم .

a و b عددان طبيعيان حيث : $a = 3^n(11^{n+2} - 11^n)$ و $b = 11^n(3^{n+1} - 3^n)$

عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b

الحـــل : $a = 3^n(11^{n+2} - 11^n) = 3^n \times 11^n(11^2 - 1) = (3 \times 11)^n \times 120$

$b = 11^n(3^{n+1} - 3^n) = 11^n \times 3^n(3 - 1) = (3 \times 11)^n \times 2$

منه : $ppcm(a ; b) = ppcm(33^n \times 120 ; 33^n \times 2) = 33^n \times ppcm(120 ; 2)$

إذن : $ppcm(a ; b) = 120 \times 33^n$ لأن $ppcm(120 ; 2) = 120$

القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر :

للبحث عن القاسم المشترك الاكبر أو المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b نتبع الطريقة التالية :

1 ــ نحلل العددين a و b إلى جداء عوامل أولية بأسس طبيعية

2 ــ القاسم المشترك الأكبر لـ a و b هو جداء العوامل المشتركة فقط مأخوذة بأصغر أس .

3 ــ المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b هو جداء كل العوامل مأخوذة بأكبر أس .

560	2
280	2
140	2
70	2
35	5
7	7
1	

288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

أمثلة : $a = 560$ ؛ $b = 288$

إذن : $560 = 2^4 \times 5 \times 7$

$288 = 2^5 \times 3^2$

يوجد عامل مشترك واحد فقط هو 2 و أسه الأصغر هو 4

$PGCD(560 ; 288) = 2^4 = 16$

العوامل التي تظهر في تحليل العددين هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7

و أسسها الكبرى على الترتيب 5 ، 2 ، 1 ، 1

إذن : $ppcm(560 ; 288) = 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7$

خاصية أساسية :

a و b عددان طبيعيان حيث $a > 1$ و $b > 1$

$pgcd(a ; b) \times ppcm(a ; b) = a \times b$

مثال : عين كل الثنائيات (a ; b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق $\begin{cases} a\,b = 18000 \\ ppcm(a ; b) = 600 \end{cases}$

الحـــل : $a\,b = pgcd(a ; b) \times ppcm(a ; b)$

إذن : $pgcd(a ; b) = \dfrac{a\,b}{ppcm(a ; b)}$

أي $pgcd(a ; b) = \dfrac{18000}{600} = 30$

نضع $a = 30\,x$ و $b = 30\,y$ حيث x و y أوليان فيما بينهما .

إذن : $a\,b = 18000$ تكافئ $30\,x \times 30\,y = 18000$

تكافئ $x\,y = 20$

تكافئ $(x ; y) \in \{(1 ; 20) ; (4 ; 5) ; (5 ; 4) ; (20 ; 1)\}$

نتيجة : $(a ; b) \in \{(30 ; 600) ; (120 ; 150) ; (150 ; 120) ; (600 ; 30)\}$

مبرهنة بيزو

يكون عددان صحيحان a و b أوليان فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان α و β حيث $a\alpha + b\beta = 1$

مثال : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$5(4\,n - 3) - 4(5\,n - 4) = 20\,n - 15 - 20\,n + 16 = 1$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha ; \beta) = (5 ; -4)$ من الأعداد الصحيحة تحقق $\alpha(4n-3) + \beta(5n-4) = 1$
منه : العددان $(5n-4)$ و $(4n-3)$ أوليان فيما بينهما .

خواص أساسية :

1 ــ كل عدد أولي a هو أولي مع كل الأعداد ماعدا مضاعفاته

2 ــ إذا كان $pgcd(a ; b) = d$ فإن توجد ثنائية $(\alpha ; \beta)$ من $Z \times Z$ تحقق : $\alpha a + \beta b = d$

3 ــ إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع الجداء bc

مبرهنة غوص :

a ، b ، c أعداد صحيحة غير معدومة

إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أولي مع b فإن a يقسم c

تطبيق المبرهنة :

1 ــ تحقق أن الثنائية $(2 ; 4)$ هي حل للمعادلة ذات المجهولين x ، y التالية :

$9x - 16y = 4$ .....(E)

2 ــ إستنتج كل حلول المعادلة (E) في المجموعة $Z \times Z$

الحـل :

1 ــ من أجل $(x ; y) = (2 ; 4)$ نحصل على : $9(4) - 16(2) = 36 - 32 = 4$

إذن : فعلا الثنائية $(2 ; 4)$ هي حل للمعادلة (E)

2 ــ لتكن الثنائية $(x ; y)$ حلا للمعادلة (E) إذن : $9x - 16y = 4$

لكن : $9(4) - 16(2) = 4$

إذن : $9x - 16y = 9(4) - 16(2)$

منه : $9(x) - 9(4) = 16y - 16(2)$

أي : $9(x-4) = 16(y-2)$

إذن : 16 يقسم الجداء $9(x-4)$

بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم $(x-4)$

أي : $x - 4 = 16k$ حيث $k \in Z$

منه : $x = 16k + 4$

نعوض x بـ $16k+4$ في المعادلة (E) : $9(16k+4) - 16y = 4$

أي : $9 \times 16k + 36 - 16y - 4 = 0$

أي : $9 \times 16k + 32 = 16y$

أي : $y = 9k + 2$

نتيجة : حلول المعادلة (E) في المجموعة $Z \times Z$ هي الثنائيات $(x ; y)$ **حيث** .

$x = 16k + 4$ و $y = 9k + 2$ حيث k عدد صحيح

خواص : a ، b ، c أعداد طبيعية غير معدومة

1 ــ إذا كان p عدد طبيعي أولي يقسم الجداء ab فإن p يقسم a أو p يقسم b

2 ــ إذا كان { a مضاعف b ، a مضاعف c } فإن a مضاعف للجداء bc

b و c أوليان فيما بينهما

تطبيق : n عدد طبيعي . نضع $A = n(5n+1)(13n+1)$

برهن أن A يقبل القسمة على 6

الحـل : يمكن إثبات أن A مضاعف 6 كمايلي : { (1) نثبت أن A مضاعف 2 ، (2) نثبت أن A مضاعف 3 }

نتيجة : بما أن 2 و 3 أوليان فيما بينهما فإن A مضاعف 2×3

هل A مضاعف 2 ؟

إذا كان n زوجي فإن A مضاعف 2 لأن $A = n(5n+1)(13n+1)$

إذا كان n فردي فإن $(5n+1)$ زوجي إذن : A مضاعف 2

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن A مضاعف 2

هل A مضاعف 3 ؟

إذا كان n مضاعف 3 فإن A مضاعف 3 لأن $A = n(5n+1)(13n+1)$

إذا كان $n = 3k + 1$ فإن $5n + 1 = 15k + 6 = 3(5k + 2)$ إذن : $5n + 1$ مضاعف 3
إذا كان $n = 3k + 2$ فإن $13n + 1 = 39k + 27 = 3(13k + 9)$ إذن : $13n + 1$ مضاعف 3
نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن A مضاعف 3

خلاصة :
- A مضاعف 2
- A مضاعف 3 إذن : A مضاعف 6
- 2 و 3 أوليان فيما بينهما

حلول تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ــ 1

عين قائمة الأعداد الأولية المحصورة بين 1 و 100

الحـــل ــ 1

لتكن A مجموعة الأعداد الأولية المحصورة بين 1 و 100

$A = \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97\}$

التمرين ــ 2

1 ــ ما هو عدد عمليات القسمة التي يمكن إجراؤها على الأعداد الأولية المتتابعة لمعرفة ما إذا كان العدد 1429 أوليا أم لا ؟

2 ــ بين أن العدد 1429 أولي

الحـــل ــ 2

1 ــ لدينا $\sqrt{1429} \approx 37,8$

قائمة الأعداد الأولية الأصغر من 38 هي $\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37\}$

إذن : عدد عمليات القسمة التي يمكن إجراؤها هو 12 (عدد الأعداد الأولية الأصغر من 38)

2 ــ بإجراء القسمة الإقليدية للعدد 1429 على كل من الأعداد الأولية الأصغر من 38 لا نجد أي قاسم له إذن : 1429 أولي

التمرين ــ 3

أثبت أن العدد 853 أولي

الحـــل ــ 3

$\sqrt{853} \approx 29,2$ منه جدول بواقي قسمة 853 على الأعداد الأولية الأصغر من 30

n	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
$853 \equiv ?[n]$	1	1	3	6	6	8	3	17	2	12

نتيجة : كل الأعداد الأولية الأصغر من 30 لا تقسم 853 إذن : 853 أولي

التمرين ــ 4

في كل حالة من الحالات التالية أذكر إذ كان العدد أوليا أم لا

251 341 1023

الحـــل ــ 4

$\sqrt{251} \approx 15,84$

n	2	3	5	7	11	13
$251 \equiv ?[n]$	1	2	1	6	9	4

إذن : العدد 251 أولي

$\sqrt{341} \approx 18,4$

n	2	3	5	7	11	13	17
$341 \equiv ?[n]$	1	2	1	5	0	3	1

$341 \equiv 0[11]$ إذن : 341 ليس أولي .

$\sqrt{1023} \approx 31,98$

n	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$1023 \equiv ?[n]$	1	0	نتوقف						

$1023 \equiv 0[3]$ إذن : 1023 ليس أولي

التمرين ــ5

تعرف على الأعداد الأولية من بين الأعداد التالية :

937 ، 3705 ، 1933 ، 3411 ، 1549 ، 4163

الحـــل ــ 5

$\sqrt{937} = 30,61$ ، $\sqrt{1933} = 43,9$ ، $\sqrt{3411} = 58,4$ ، $\sqrt{1549} = 39,35$ ، $\sqrt{4163} = 64,52$

منه الجدول التالي :

n	937	1933	3411	1549	4163
2	1	1	1	1	1
3	1	1	0	1	2
5	2	3	توقف	4	3
7	6	1		2	5
11	2	8		9	5
13	1	9		2	3
17	2	12		2	15
19	6	14		10	2
23	17	1		8	0
29	9	19		12	توقف
31		11		30	
37		9		32	
41		6			
43		41			

نتيجة :

االأعداد الأولية هي :

937 ، 1933 ، 1549

3411 ليس أولي لأنه مضاعف 3

4163 ليس أولي لأنه مضاعف 23

3705 ليس أولي لأنه مضاعف 5

التمرين ــ 6

n عدد طبيعي أصغر من 150 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الستة الأولى

هل العدد n أولي ؟

الحـــل ــ 6

$\sqrt{150} = 12,2$ إذن : $\sqrt{n} \leq 12,2$

الأعداد الأولية الأصغر من 12 هي $\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11\}$

بما أن n لا يقبل القسمة على هذه الأعداد فإن n أولي .

التمرين ــ 7

برهن أن إذا كان n عددا طبيعيا أوليا فإن (n + 7) ليس أولي .

الحـــل ــ 7

n عدد طبيعي أولي إذن : إما $n = 2$ أو n فردي كمايلي :

الحالة الأولى : $n = 2$ إذن : $n + 7 = 9$ منه (n+7) ليس أولي .

الحالة الثانية : n فردي إذن : $n = 2k + 1$ منه $n + 7 = 2k + 1 + 7$ حيث $k \in IN^*$

أي : $n + 7 = 2(k + 4)$

منه : 2 يقسم (n + 7)

إذن : (n + 7) ليس أولي .

التمرين ــ 8

n عدد طبيعي أولي أكبر تماما من 3

1 ــ برهن أن n يكتب من الشكل $3k+1$ أو $3k-1$ مع $k \in IN^*$

2 ــ هل العكس صحيح ؟

الحـــل ــ 8

1 ــ n عدد طبيعي أولي و $n > 3$ إذن : n لا يقبل القسمة على 3

منه : إما $n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv 2[3]$

أي : إما $n = 3k+1$ أو $n = 3k+2$ حيث $k \in IN^*$

إذا كان $n = 3k+2$ فإن $n = 3k+2-3+3$

أي $n = 3(k+1) - 1$

أي $n = 3k' - 1$ حيث $k' = k+1$

خلاصة : إما $n = 3k+1$ أو $n = 3k-1$

2 ــ العكس ليس صحيح . مثال : $22 = 3(7) + 1$ لكن 22 ليس أولي .

$32 = 3(11) - 1$ لكن 32 ليس أولي .

التمرين ــ 9

ليكن n عدد طبيعي أولي أكبر تماما من 6

1 ــ برهن أن n يكتب على أحد الأشكال التالية : $n = 12k+1$ أو $n = 12k+5$

أو $n = 12k-5$ أو $n = 12k-1$ حيث $k \in IN$

2 ــ ليكن $p = n^2 + 11$. باستعمال البرهان بفصل الحالات عين باقي قسمة p على 24

الحـــل ــ 9

1 ــ n أولي إذن : n لا يقبل القسمة على 12 منه n يكتب على أحد الأشكال التالية :

$n = 12k+1$

$n = 12k+2$ أي $n = 2(6k+1)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+3$ أي $n = 3(4k+1)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+4$ أي $n = 4(3k+1)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+5$

$n = 12k+6$ أي $n = 6(2k+1)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+7$ أي $n = 12(k+1) - 5$ أي $n = 12k' - 5$ حيث $k' = k+1$

$n = 12k+8$ أي $n = 4(3k+2)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+9$ أي $n = 3(4k+3)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+10$ أي $n = 2(6k+5)$ مرفوض لأن n لا يقبل تحليل

$n = 12k+11$ أي $n = 12(k+1) - 1$ أي $n = 12k' - 1$ حيث $k' = k+1$

نتيجة : n يكتب على أحد الأشكال التالية : $n = 12k+1$ ؛ $n = 12k+5$ ؛ $n = 12k-5$ ؛

$n = 12k-1$ حيث $k \in IN$

2 ــ لندرس الحالات الأربعة الممكنة للعدد الأولي n كمايلي :

الحالة الأولى : $n = 12k+1$ إذن : $n^2 = 144k^2 + 24k + 1$

منه : $p = n^2 + 11 = 144k^2 + 24k + 12$

لدينا $\begin{cases} 144k^2 \equiv 0[24] \\ 24k \equiv 0[24] \\ 12 \equiv 12[24] \end{cases}$

منه : $144k^2 + 24k + 12 \equiv 12[24]$

إذن : $p \equiv 12[24]$

الحالة الثانية : $n = 12k+5$ منه $n^2 = 144k^2 + 120k + 25$

إذن : $p = 144k^2 + 120k + 36$

منه : $p \equiv 36[24]$

أي $p \equiv 12[24]$

الحالة الثالثة : $n = 12k-5$ منه $n^2 = 144k^2 - 120k + 25$

إذن : $p = 144k^2 - 120k + 36$

منه : $p \equiv 36[24]$

أي $p \equiv 12[24]$

الحالة الرابعة : $n = 12k - 1$ إذن : $n^2 = 144k^2 - 24k + 1$

منه : $p = 144k^2 - 24k + 12$

إذن : $p \equiv 12[24]$

نتيجة : من أجل كل قيمة للعدد الأولي n فإن باقي قسمة p على 24 هو 12

التمرين ــ 10

n عدد طبيعي اولي أكبر تماما من 3

1 ــ برهن أن $8n - 1$ يوافق 0 أو 1 بترديد 3

2 ــ إستنتج أن إذا كان العدد $8n - 1$ أولي فإن العدد $8n + 1$ ليس أولي .

الحـــل ــ 10

1 ــ n عدد أولي إذن : لا قبل القسمة على 3 منه $\begin{cases} \text{إما } n \equiv 1[3] \\ \text{أو } n \equiv 2[3] \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \text{إما } 8n \equiv 8[3] \\ \text{أو } 8n \equiv 16[3] \end{cases}$

أي $\begin{cases} \text{إما } 8n \equiv 2[3] \\ \text{أو } 8n \equiv 1[3] \end{cases}$

منه $\begin{cases} \text{إما } 8n - 1 \equiv 1[3] \\ \text{أو } 8n - 1 \equiv 0[3] \end{cases}$

2 ــ حسب السؤال (1) فإن إذا كان $8n - 1$ أولي فإن $8n - 1 \equiv 1[3]$ (لا يقبل القسمة على 3)

منه $8n - 1 + 2 \equiv 1 + 2[3]$

أي $8n + 1 \equiv 0[3]$

إذن : $8n + 1$ ليس أولي لأنه يقبل القسمة على 3

التمرين ــ 11

ليكن p عدد طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 5

برهن أن إذا كان $p + 2$ عدد أولي فإن $p + 1$ يقبل القسمة على 6

الحـــل ــ 11

p أولي و $p \geq 5$ إذن : $\begin{cases} p \text{ لا يقبل القسمة على } 2 \\ p \text{ لا يقبل القسمة على } 3 \end{cases}$

منه p لا يقبل القسمة على 6

أي $\begin{cases} \text{إما } p = 6k + 1 \\ \text{أو } p = 6k + 5 \end{cases}$

أي $\begin{cases} \text{إما } p + 2 = 6k + 3 \\ \text{أو } p + 2 = 6k + 7 \end{cases}$

أي $\begin{cases} \text{إما } p + 2 = 3(2k + 1) \text{ مرفوض لأن } p + 2 \text{ أولي} \\ \text{أو } p + 2 = 6k' + 1 \text{ حيث } k' = k + 1 \end{cases}$

نتيجة : إذا كان $\begin{cases} p \text{ أولي} \\ p + 2 \text{ أولي} \end{cases}$ فإن $p + 2 = 6k + 1$

إذن : $p + 1 = 6k$

منه : $p + 1$ يقبل القسمة على 6

التمرين ــ 12

n عدد طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 3

برهن أن $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 8

الحـــل ــ 12

لندرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد $n^2 - 1$ على 8 كمايلي :

$n \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \equiv ?[8]$	0	1	4	1	0	1	4	1
$n^2 - 1 \equiv ?[8]$	7	0	3	0	7	0	3	0

نتيجة : إذا كان n فردي فإن $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 8

بما أن n أولي و $n \geq 3$ فإن n فردي إذن : $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 8

التمرين ــ 13

n عدد طبيعي حيث $n \geq 5$

1 ــ برهن أن أحد من الأعداد التالية : $n+1$ ؛ $n+3$ ؛ $n+7$ ؛ $n+9$ ؛ $n+13$ ؛ $n+15$ يقبل القسمة على 5

2 ــ هل توجد قيم لـــ n حتى تكون كل الأعداد المقترحة أولية ؟

الحـــل ــ 13

1 ــ n عدد طبيعي و $n \geq 5$ إذن :

إما $n \equiv 0[5]$ منه $n+15 \equiv 0[5]$

أو $n \equiv 1[5]$ منه $n+9 \equiv 0[5]$

أو $n \equiv 2[5]$ منه $n+3 \equiv 0[5]$ و $n+13 \equiv 0[5]$

أو $n \equiv 3[5]$ منه $n+7 \equiv 0[5]$

أو $n \equiv 4[5]$ منه $n+1 \equiv 0[5]$

2 ــ لا توجد أي قيمة لـــ n تجعل كل الأعداد المقترحة أولية لأن من أجل كل قيمة للعدد الطبيعي n فإن أحد هذه الأعداد يقبل القسمة على 5 فإذن ليس أولي .

التمرين ــ 14

n عدد طبيعي . نضع $a = n^2 + 3n + 2$

هل توجد قيم للعدد الطبيعي r حتى يكون a أولي ؟

الحـــل ــ14

لاحظ أن : $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$

إذن : العدد a يقبل دائما تحليلا من الشكل $a = (n+1)(n+2)$

منه : يكون a أولي إذا و فقط إذا كان

$n+1 = 1$ و $n+2$ أولي

أو

$n+2 = 1$ و $n+1$ أولي

أي

$n = 0$ و 2 أولي

$n = -1$ و 0 أولي مرفوض

نتيجة : توجد قيمة وحيدة لـــ n تجعل العدد a أولي و هي $n = 0$ منه $a = 2$

التمرين ــ 15

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $n^2 + 8n + 15$ ليس أولي .

الحـــل ــ 15

ليكن n عدد طبيعي . $n^2 + 8n + 15 = (n+3)(n+5)$

بما أن $n+5 > 1$ و $n+3 > 1$ فإن العدد $n^2 + 8n + 15$ ليس أولي لأنه يقبل تحليل على الأقل من الشكل $(n+3)(n+5)$

التمرين ــ 16

n عدد طبيعي غير معدوم . نضع $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times n$

ليكن b عدد طبيعي حيث $2 \leq b \leq 2007$. نضع $a = 2007! + b$

1 ــ برهن أن العدد a ليس أولي .

2 ــ إستنتج قائمة لـــ 2006 عددا طبيعيا متتابعا ليس أوليا

الحـــل ــ 16

1 ــ $2007! = 1 \times 2 \times \ldots\ldots \times b \times \ldots\ldots \times 2007$ لأن $2 \leq b \leq 2007$

إذن :

b يقسم $2007!$

b يقسم b

منه b يقسم $2007! + b$

أي b يقسم a

منه a ليس أولي

2 ــ من أجل القيم 2 ، 3 ، 4 ، .... 2007 للعدد b نحصل على القائمة التالية :
$2+2007!$ ؛ $3+2007!$ ؛ $4+2007!$ ؛ ..... $2007+2007!$ و هي قائمة من 2006 عدد طبيعي متتابع ليس أولي .

التمرين ــ 17

1 ــ تحقق أن العدد 173 أولي .
2 ــ عين كل الثنائيات $(x\,;\,y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2-y^2=173$
3 ــ p عدد طبيعي اولي فردي . عين كل الثنائيات $(x\,;\,y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2-y^2=p$

الحـــل ــ 17

1 ــ $\sqrt{173}=13{,}1$

n	2	3	5	7	11	13
$173\equiv ?[n]$	1	2	3	5	8	4

نتيجة : 173 لا يقبل أي قاسم أولي أصغر من 13 إذن : 173 عدد أولي

2 ــ $x^2-y^2=173$ يكافئ $(x-y)(x+y)=173$

يكافئ $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=173 \end{cases}$ لأن التحليل الوحيد الممكن للعدد 173 هو 1×173 و $x-y<x+y$

يكافئ $\begin{cases} 2x=174 \\ y=x-1 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x=87 \\ y=86 \end{cases}$

3 ــ p أولي إذن : التحليل الوحيد الممكن للعدد p هو $p=1\times p$
منه : $x^2-y^2=p$ تكافئ $(x-y)(x+y)=p$

تكافئ $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=p \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 2x=p+1 \\ y=x-1 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x=\dfrac{p+1}{2} \quad (p \text{ فردي إذن } p+1 \text{ زوجي}) \\ y=\dfrac{p+1}{2}-1 \end{cases}$

إذن : الثنائية الوحيدة التي تحقق $x^2-y^2=p$ هي $\left(\dfrac{p+1}{2}\,;\,\dfrac{p+1}{2}-1\right)$
حذار ! نبحث عن الأعداد x و y في IN فقط .

التمرين ــ 18

b عدد طبيعي
1 ــ أنشر الجداء $(b^2-b+1)(b^2+b+1)$
2 ــ ليكن a عدد صحيح . هل يمكن أن يكون العدد a^4+a^2+1 أولي ؟

الحـــل ــ 18

1 ــ $(b^2-b+1)(b^2+b+1)=b^4+b^3+b^2-b^3-b^2-b+b^2+b+1$
$=b^4+b^2+1$

2 ــ حسب السؤال (1) فإن العدد a^4+a^2+1 يحلل إلى $(a^2-a+1)(a^2+a+1)$
إذن : يكون a^4+a^2+1 أولي في إحدى الحالتين التاليتين فقط :

الحالة الأولى : $\begin{cases} a^2-a+1=1 \\ a^2+a+1 \text{ أولي} \end{cases}$

أي $\begin{cases} a^2-a=0 \\ a^2+a+1 \text{ أولي} \end{cases}$

أي $\begin{cases} a=0 \text{ أو } a=1 \\ a^2+a+1 \text{ أولي} \end{cases}$

أي { $a = 0$ و 1 أولي مرفوض
أو
$a = 1$ و $(1 + 1 + 1)$ أولي (محقق) }

الحالة الثانية : { $a^2 + a + 1 = 1$
$a^2 - a + 1$ أولي }

أي { $a^2 + a = 0$
$a^2 - a + 1$ أولي }

أي { $a = 0$ أو $a = -1$
$a^2 - a + 1$ أولي }

أي { $a = 0$ و 1 أولي مرفوض
أو
$a = -1$ و $(1 + 1 + 1)$ أولي (محقق) }

نتيجة : يكون العدد $a^4 + a^2 + 1$ أوليا إذا و فقط إذا كان $a = 1$ أو $a = -1$

التمرين ــ 19

عين كل القواسم الموجبة للأعداد التالية :

360 400 1980 121

الحـل ــ 19

360	2
180	2
90	2
45	5
9	3
3	3
1	

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

1980	2
990	2
495	3
165	3
55	5
11	11
1	

121	11
11	11
1	

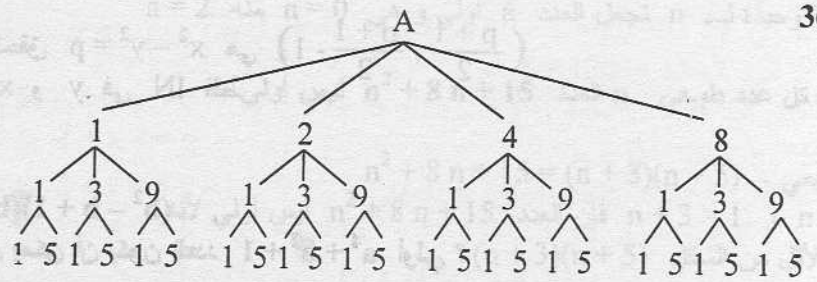
منه : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ إذن : عدد قواسم 360 هو $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$

$400 = 2^4 \times 5^2$ إذن : عدد قواسم 400 هو $(4 + 1)(2 + 1) = 15$

$1980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$ إذن : عدد قواسم 1980 هو $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 36$

$121 = 11^2$ إذن : عدد قواسم 121 هو $(2 + 1) = 3$

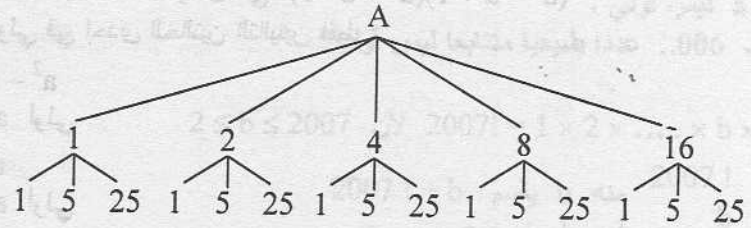
تعيين قواسم 360



منه قواسم 360 هي : {1 ; 5 ; 3 ; 15 ; 9 ; 45 ; 2 ; 10 ; 6 ; 30 ;18 ; 90 ;4 ; 20 ; 12 ; 60 ; 36 ; 180 ; 8 ; 40 ; 24 ; 120 ; 72 ; 360}

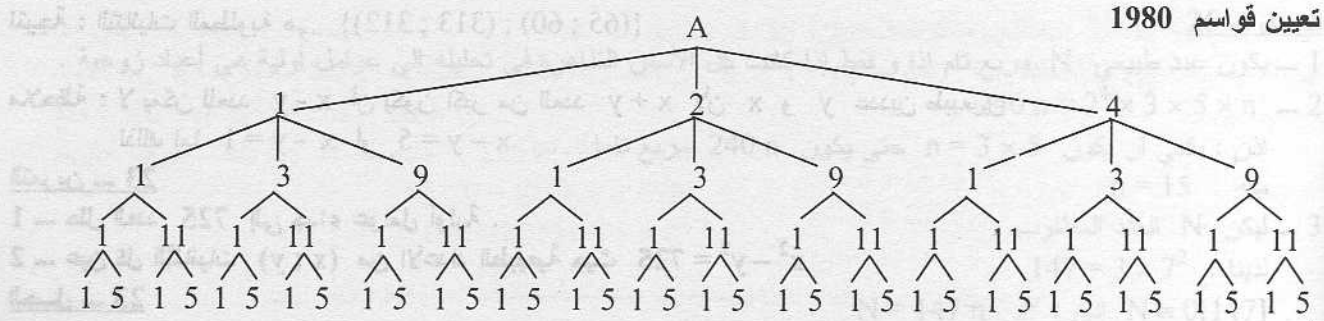
ملاحظة : للحصول على القواسم نقوم بالصعود من أوراق الشجرة المرسومة إلى الجذر A و ذلك بإجراء عملية الجداء

تعيين قواسم 400



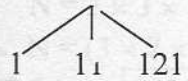
منه قواسم 400 هي : {1 ; 5 ; 25 ; 2 ; 10 ; 4 ; 50 ; 20 ; 100 ; 8 ; 40 ; 200 ; 16 : 80 ; 400}

تعيين قواسم 1980



منه قواسم 1980 هي : {1 ; 5 ; 11 ; 55 ; 3 ; 15 ; 33 ; 165 ; 9 ; 45 ; 495 ; 2 ; 110 ; 6 ; 30 ; 330 ; 18 ; 90 ; 198 ; 990 ; 4 ; 20 ; 44 ; 220 ; 12 ; 60 ; 132 ; 660 ; 36 ; 180 ; 396 ; 10 ; 22 ; 1980 ; 66 ; 99}

تعيين قواسم 121



إذن : قواسم 121 هي {1 ; 11 ; 121}

التمرين ــ 20

ليكن العددين : $a = 2^4 \times 3^5 \times 5 \times 7^2 \times 11$ ؛ $b = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11$

برر أن العدد a يقبل القسمة على b ثم عين حاصل هذه القسمة .

الحـل ــ20

كل العوامل الأولية التي تظهر في تحليل b تظهر أيضا في تحليل a و أسس كل هذه العوامل أكبر منها في تحليل a عن تحليل b إذن : العدد a يقبل القسمة على العدد b و حاصل هذه القسمة هو كمايلي :

$$a = 2^4 \times 3^5 \times 5 \times 7^2 \times 11 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11(2 \times 3^3 \times 7 \times 5)$$
$$= b \times (2 \times 3^3 \times 7 \times 5)$$

إذن : $a/b = 2 \times 3^3 \times 7 \times 5$

التمرين ــ 21

ما هي قواسم مربع عدد طبيعي أولي .

الحـل ــ 21

ليكن n عدد طبيعي أولي .

إذن : n^2 يقبل ثلاث قواسم ـ هي $\{1 ; n ; n^2\}$

التمرين ــ 22

1 ــ حلل العدد 625 إلى جداء عوامل أولية . ثم إستنتج كل قواسمه الموجبة .

2 ــ عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $x^2 - y^2 = 625$

الحـل ــ 22

1 ــ

625	5
125	5
25	5
5	5
1	

إذن : قواسم 625 هي $\{1 ; 5 ; 25 ; 125 ; 725\}$

2 ــ $x^2 - y^2 = 625$ تكافئ $(x - y)(x + y) = 625$

تكافئ
$$\begin{cases} x - y = 1 \text{ و } x + y = 625 \\ \text{أو} \\ x - y = 5 \text{ و } x + y = 125 \end{cases}$$

تكافئ
$$\begin{cases} 2x = 626 \text{ و } y = x - 1 \\ \text{أو} \\ 2x = 130 \text{ و } y = x - 1 \end{cases}$$

تكافئ
$$\begin{cases} x = 313 \text{ و } y = 312 \\ \text{أو} \\ x = 65 \text{ و } y = 64 \end{cases}$$

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي $\{(312 ; 313) ; (60 ; 65)\}$

ملاحظة : لا يمكن للعدد $x - y$ أن يكون أكبر من العدد $x + y$ لأن x و y عددين طبيعيين
لذلك إما $x - y = 1$ أو $x - y = 5$

التمرين ــ 23

1 ــ حلل العدد 725 إلى جداء عوامل أولية .

2 ــ عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = 725$

الحـــل ــ 23

1 ــ

725	5
145	5
29	29
1	

2 ــ $x^2 - y^2 = 725$ تكافئ $(x - y)(x + y) = 725$

تكافئ
$x - y = 1$ و $x + y = 725$
أو
$x - y = 5$ و $x + y = 145$
أو
$x - y = 25$ و $x + y = 29$

تكافئ
$2x = 726$ و $y = x - 1$
أو
$2x = 150$ و $y = x - 5$
أو
$2x = 54$ و $y = x - 25$

تكافئ
$x = 363$ و $y = 362$
أو
$x = 75$ و $y = 70$
أو
$x = 27$ و $y = 2$

نتيجة : الثنائيات هي $\{(2 ; 27) ; (70 ; 75) ; (362 ; 363)\}$

التمرين ــ 24

ليكن a عدد طبيعي . برهن أن إذا كان 2 قاسما للعدد a^2 فإن 2 يقسم العدد a

الحـــل ــ 24

لدينا : $a^2 = a \times a$

إذن : إذا كان 2 يقسم a^2 فإن إما 2 يقسم a أو 2 يقسم a (لأن 2 أولي)

أي : 2 يقسم a

التمرين ــ 25

p عدد طبيعي أولي و a عدد طبيعي .

برهن أن إذا كان p يقسم a^2 فإن p يقسم a

الحـــل ــ 25

p يقسم a^2 إذن p يقسم $a \times a$

إذن : p يقسم a أو p يقسم a (لأن p أولي)

منه p يقسم a

التمرين ــ 26

1 ــ كيف يمكن معرفة أن عددا طبيعيا N هو مربع تام من خلال تحليله إلى جداء عوامل أولية ؟

2 ــ عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n حتى يكون العدد 240 n مربعا تاما .

3 ــ أوجد عددا طبيعيا مكونا من أربعة أرقام حيث رقمه الأخير (رقم الآلاف) 9 و هو مربع تام و يقبل القسمة على 147

الحـــل ــ 26

1 ــ يكون عدد طبيعي N مربع تام إذا و فقط إذا كانت كل الأسس الظاهرة في تحليله إلى عوامل أولية هي أعداد زوجية .

2 ــ $240\,n = 2^4 \times 3 \times 5 \times n$

إذن : يكفي أن يكون $n = 3 \times 5$ حتى يكون $240\,n$ مربع تاما

منه $n = 15$

3 ــ ليكن N العدد المطلوب .

لدينا : $147 = 3 \times 7^2$

إذن : $N \equiv 0[147]$ $\quad N = 147\,n$

أي : $N = 3 \times 7^2 \times n$ حيث $n \in N$

لكن N مربع تام إذن $n = 3\,k^2$ حيث $k \in N$

منه : $N = 3 \times 3 \times 7^2 \times k^2$

أي $N = (3 \times 7 \times k)^2$ حيث $k \in N$

لدينا $\sqrt{9000} \approx 94,3$ و $\sqrt{9999} \approx 98,9$

إذن : يكفي أن نأخذ $94 < 3 \times 7 \times k < 98$

أي $94 < 21\,k < 98$ منه $\frac{94}{21} < k < \frac{98}{21}$ أي $4,4 < k < 4,6$

منه : لا توجد أي قيمة لـــ k تجعل $94 < 21\,k < 98$

نتيجة : لا يوجد أي عدد طبيعي N مكون من 4 أرقام حيث رقمه الأخير الآلاف هو 9 و N يقبل القسمة على 147

التمرين ــ 27

1 ــ حلل العدد $a = 4312$ إلى جداء عوامل أولية .

2 ــ عين أصغر عدد طبيعي n حيث $a\,n$ يكون مربع تام

3 ــ عين أصغر عدد طبيعي p حيث $a\,p$ يكون مضاعف للعدد 1000

الحـــل ــ27

1 ــ

4312	2
2156	2
1078	2
539	7
77	7
11	11
1	

إذن : $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$

2 ــ أصغر عدد طبيعي n حيث $a\,n$ مربع تام هو $n = 2 \times 11 = 22$

3 ــ نحلل العدد 1000 كمايلي :

1000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

إذن : $1000 = 2^3 \times 5^3$

إذن : أصغر عدد طبيعي p حتى يكون $a\,p$ مضاعف 1000 هو $p = 5^3 = 125$

التمرين ــ 28

1 ــ حلل العدد 4032 إلى جداء عوامل أولية .

2 ــ عين العدد الطبيعي n حتى يكون : $n(n+1) = 4032$

الحـــل ــ 28

1 ــ

4032	2
2016	2
1008	2
504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$4032 = 2^6 \times 3^2 \times 7$

2 ــ إذا وجد عدد طبيعي n حيث $n(n+1) = 4032$ فإن كل من n و $n+1$ هما قاسمين للعدد 4032 إذن : يكفي أن نبحث عن قواسم العدد 4032 ثم البحث عن قاسمين متتاليين (n و $n+1$) و هما 2^6 و $3^2 \times 7$ أي 64 و 63

منه : $n = 63$ أي : $63 \times 64 = 4032$

طريقة أخرى : نحل في N المعادلة $n(n+1) = 4032$

أي $n^2 + n - 4032 = 0$

$\Delta = 1 + 16128 = 16129 = (127)^2$

إذن : إما $n = \frac{-1-127}{2} = -64$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى N

أو $n = \frac{-1+127}{2} = 63$ مقبول

نتيجة : $n = 63$

التمرين ــ 29

1 ــ عين ppcm(230 ; 128)

2 ــ عين ppcm(- 15 ; 18)

الحـل ــ 29

1 ــ

128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$128 = 2^7$

230	2
115	5
23	23
1	

$230 = 2 \times 5 \times 23$

نتيجة : $ppcm(128 ; 230) = 2^7 \times 5 \times 23$

2 ــ $ppcm(-15 ; 18) = ppcm(15 ; 18)$

$15 = 3 \times 5$ ؛ $18 = 2 \times 3^2$

إذن : $ppcm(15 ; 18) = 3^2 \times 2 \times 5 = 90$

نتيجة : $ppcm(-15 ; 18) = 90$

التمرين ــ30

عين العدد الطبيعي غير المعدوم a حيث ppcm(18 ; a) = 630

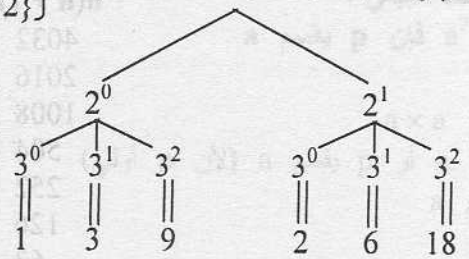
الحـل ــ 30

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

إذن : $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$18 = 2 \times 3^2$

$ppcm(a ; 18) = 630$ إذن : $a = 2^n \times 3^p \times 5 \times 7$ حيث $n \in \{0 ; 1\}$ و $p \in \{0 ; 1 ; 2\}$



نتيجة : $a \in \{35 ; 35 \times 3 ; 35 \times 9 ; 35 \times 2 ; 35 \times 6 ; 18 \times 35\}$

التمرين ــ 31

n عدد طبيعي . يوافق 3 بترديد 28 و بترديد 35

1 ــ برهن أن $n - 3$ مضاعف مشترك للعددين 35 و 28

2 ــ ما هي أصغر قيمة للعدد n

الحـل ــ 31

1 ــ $\left.\begin{matrix} n \equiv 3[35] \\ n \equiv 3[28] \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} n - 3 \equiv 0[35] \\ n - 3 \equiv 0[28] \end{matrix}\right\}$

أي $\left.\begin{matrix} n - 3 \text{ مضاعف لـ } 35 \\ n - 3 \text{ مضاعف لـ } 28 \end{matrix}\right\}$

إذن : $n - 3$ مضاعف مشترك للعددين 35 و 28

2 ــ يكون n أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كان $n - 3$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين 35 و 28

لدينا : $\left.\begin{matrix} 35 = 7 \times 5 \\ 28 = 7 \times 4 \end{matrix}\right\}$ إذن : $\text{ppcm}(35 ; 28) = 7 \times 5 \times 4 = 140$

منه : $n - 3 = 140$

إذن : $n = 143$

التمرين ــ 32

عين أصغر عدد طبيعي غير معدوم n حيث باقي قسمة n على كل من العددين 52 و 64 هو 7

الحـل ــ 32

$\left.\begin{matrix} n \equiv 7[52] \\ n \equiv 7[64] \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} n - 7 \equiv 0[52] \\ n - 7 \equiv 0[64] \end{matrix}\right\}$

إذن : $(n - 7)$ مضاعف مشترك للعددين 52 و 64

نتيجة : يكون n أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كان $n - 7 = \text{ppcm}(52 ; 64)$

لدينا : $\left.\begin{matrix} 52 = 2^2 \times 13 \\ 64 = 2^6 \end{matrix}\right\}$

إذن : $\text{ppcm}(52 ; 64) = 2^6 \times 13 = 832$

منه : $n - 7 = 832$

أي : $n = 839$

التمرين ــ33

n عدد طبيعي غير معدوم . أحسب $\text{ppcm}(n ; 2n + 1)$

الحـل ــ 33

$(2n + 1) - 2(n) = 1$ إذن : توجد ثنائية من الأعداد الصحيحة $(\alpha ; \beta) = (1 ; -2)$

تحقق $\alpha(2n + 1) + \beta n = 1$

منه حسب مبرهنة بيزو فإن العددين n و $2n + 1$ أوليان فيما بينهما .

نتيجة : $\text{ppcm}(n ; 2n + 1) = n(2n + 1)$

التمرين ــ 34

n عدد طبيعي غير معدوم . أحسب $\text{ppcm}(2n + 2 ; 4n + 2)$

الحـل ــ 34

$\text{ppcm}(2n + 2 ; 4n + 2) = 2 \times \text{ppcm}(n + 1 ; 2n + 1)$

لكن $2n + 1$ و $n + 1$ أوليان فيما بينهما لأن $2(n + 1) - (2n + 1) = 1$

منه $\text{ppcm}(n + 1 ; 2n + 1) = (n + 1)(2n + 1)$

نتيجة : $\text{ppcm}(2n + 2 ; 4n + 2) = 2(n + 1)(2n + 1)$

التمرين ــ 35

n عدد طبيعي غير معدوم

نضع $a = (3^{2n} - 1)(7^{2n} - 1)$ ؛ $b = (3^n + 1)(7^n + 1)$

عين $\text{ppcm}(a ; b)$

الحـل ــ 35

$a = (3^{2n} - 1)(7^{2n} - 1) = (3^n - 1)(3^n + 1)(7^n - 1)(7^n + 1)$

إذن : $a = b \times (3^n - 1)(7^n - 1)$

أي : a مضاعف b

إذن : $ppcm(a ; b) = a$

التمرين ــ 36

n عدد طبيعي أكبر تماما من 3

نضع $a = (6n^2 - 24)(n^2 - 9)$ ؛ $b = (3n^2 + 3n - 18)(n^2 - n - 6)$

برهن أن : $ppcm(a ; b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9) \times ppcm(6 ; 3)$

الحـــل ــ 36

$a = (6n^2 - 24)(n^2 - 9) = 6(n^2 - 4)(n^2 - 9)$

$3n^2 + 3n - 18 = 3(n - 2)(n + 3)$

$n^2 - n - 6 = (n + 2)(n - 3)$

إذن : $b = 3(n - 2)(n + 3)(n + 2)(n - 3)$

أي $b = 3(n^2 - 4)(n^2 - 9)$

منه : $ppcm(a ; b) = ppcm(6(n^2 - 4)(n^2 - 9) ; 3(n^2 - 4)(n^2 - 9))$

$= (n^2 - 4)(n^2 - 9) \times ppcm(6 ; 3)$

التمرين ــ 37

d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

ما هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a^2 و ab

الحـــل ــ 37

$ppcm(a^2 ; ab) = a \times ppcm(a ; b)$

$= a\left(\frac{ab}{d}\right) = \frac{a^2 b}{d}$

التمرين ــ 38

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الجملة $\begin{cases} a + b = 60 \\ ppcm(a ; b) = 40 \end{cases}$

الحـــل ــ 38

لنبحث عن قواسم 40 : $40 = 2^3 \times 5$

إذن : قواسم 40 هي $\{40 ; 8 ; 20 ; 4 ; 10 ; 2 ; 5 ; 1\}$.

منه : a و b ينتميان إلى المجموعة $\{40 ; 8 ; 20 ; 4 ; 10 ; 2 ; 5 ; 1\}$

إذن : إما $(a = 20$ و $b = 40)$ أو $(a = 40$ و $b = 20)$

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي $\{(20 ; 40) ; (40 ; 20)\}$

التمرين ــ 39

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق العلاقة :

$ppcm(a ; b) = 21 \times pgcd(a ; b)$

الحـــل ــ 39

ليكن $\alpha = pgcd(a ; b)$

نضع $\begin{cases} a = \alpha x \\ b = \alpha y \end{cases}$ حيث $pgcd(x ; y) = 1$

إذن : $ppcm(a ; b) = ppcm(\alpha x ; \alpha y)$

$= \alpha \times ppcm(x ; y)$

$= \alpha \times xy$ لأن x و y أوليان فيما بينهما .

نتيجة : يكون $ppcm(a ; b) = 21 \times pgcd(a ; b)$ إذا و فقط إذا كان $xy = 21$ و $pgcd(x ; y) = 1$

منه $(x ; y) \in \{(1 ; 21) ; (21 ; 1) ; (3 ; 7) ; (7 ; 3)\}$

أي $(a ; b) \in \{(\alpha ; 21\alpha) ; (21\alpha ; \alpha) ; (3\alpha ; 7\alpha) ; (7\alpha ; 3\alpha)\}$

التمرين ــ 40

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $ppcm(a ; b) - pgcd(a ; b) = 187$

الحـــل ــ 40

ليكن $\begin{cases} a = x \times pgcd(a ; b) \\ b = y \times pgcd(a ; b) \end{cases}$ إذن : x و y أوليان فيما بينهما

أي $ppcm(x ; y) = xy$

$ppcm(a ; b) - pgcd(a ; b) = 187$ يكافئ $xy \times pgcd(a ; b) - pgcd(a ; b) = 187$

إذن : $\text{pgcd}(a ; b)[x y - 1] = 187$

منه : $\text{pgcd}(a ; b)$ قاسم للعدد 187

أي : $\text{pgcd}(a ; b) \in \{1 ; 11 ; 17 ; 187\}$

إذن : نميز الحالات التالية :

أولا : $\text{pgcd}(a ; b) = 1$ إذن : $x y - 1 = 187$

منه : $x y = 188$

لدينا : $188 = 2^2 \times 47$

إذن : $(x ; y) \in \{(1 ; 188) ; (4 ; 47) ; (188 ; 1) ; (47 ; 4)\}$

منه : $(a ; b) \in \{(1 ; 188) ; (4 ; 47) ; (188 ; 1) ; (47 ; 4)\}$

ثانيا : $\text{pgcd}(a ; b) = 11$ إذن : $x y - 1 = 17$

منه : $x y = 18$

لدينا : $18 = 2 \times 3^2$

إذن : $(x ; y) \in \{(1 ; 18) ; (2 ; 9) ; (9 ; 2) ; (18 ; 1)\}$

منه : $(a ; b) \in \{(11 ; 198) ; (22 ; 99) ; (99 ; 22) ; (198 ; 11)\}$

ثالثا : $\text{pgcd}(a ; b) = 17$ إذن : $x y - 1 = 11$

منه : $x y = 12$

لدينا : $12 = 2^2 \times 3$

إذن : $(x ; y) \in \{(1 ; 12) ; (4 ; 3) ; (3 ; 4) ; (12 ; 1)\}$

أي $(a ; b) \in \{(17 ; 204) ; (68 ; 51) ; (51 ; 68) ; (204 ; 17)\}$

رابعا : $\text{pgcd}(a ; b) = 187$ إذن : $x y - 1 = 1$

منه : $x y = 2$

إذن : $(x ; y) \in \{(1 ; 2) ; (2 ; 1)\}$

منه : $(a ; b) \in \{(187 ; 374) ; (374 ; 187)\}$

خلاصة : الثنائيات المطلوبة هي : $\{(198 ; 11) ; (204 ; 17) ; (68 ; 51) ; (51 ; 68) ; (17 ; 204)$
$(22 ; 99) ; (99 ; 22) ; (198 ; 11) ; (1 ; 188) ; (4 ; 47) ; (188 ; 1) ; (47 ; 4) ; (187 ; 374) ; (374 ; 187)\}$

التمرين ــ 41

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $\text{ppcm}(a ; b) = \text{pgcd}(a ; b)$

الحـــل ــ 41

ليكن $\text{pgcd}(a ; b) = \alpha$

نضع $a = \alpha x$ و $b = \alpha y$ إذن : $\text{ppcm}(x ; y) = x y$

منه : $\text{ppcm}(a ; b) = \text{pgcd}(a ; b)$ يكافئ $\text{ppcm}(\alpha x ; \alpha y) = \alpha$

يكافئ $\alpha \times \text{ppcm}(x ; y) = \alpha$

يكافئ $\alpha x y = \alpha$

يكافئ $x y = 1$

يكافئ $x = y = 1$

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي $\{(a ; a)\}$ حيث $a \in IN^*$

التمرين ــ 42

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $\text{ppcm}(a ; b) + 11\ \text{pgcd}(a ; b) = 20$ ..... (1)

الحـــل ــ 42

ليكن $\alpha = \text{pgcd}(a ; b)$

نضع $a = \alpha x$ و $b = \alpha y$ إذن : $\text{ppcm}(a ; b) = \text{ppcm}(\alpha x ; \alpha y) = \alpha x y$

منه : الشرط (1) يكافئ $\alpha x y + 11 \alpha = 20$

يكافئ $11 \alpha = 20 - \alpha x y$

بما أن $\left\{ \begin{array}{l} \alpha x y > 0 \\ 11 \alpha > 0 \end{array} \right.$ فإن $0 \leq 20 - \alpha x y \leq 20$ إذن : $0 \leq 11 \alpha \leq 20$

لكن $\alpha \neq 0$ إذن : $\alpha = 1$

منه : $20 - x\,y = 11$

أي : $x\,y = 9$

منه $(x\,;\,y) \in \{(1\,;\,9)\,;\,(9\,;\,1)\}$

أي : الثنائيات المطلوبة هي : $(a\,;\,b) \in \{(1\,;\,9)\,;\,(9\,;\,1)\}$

التمرين ــ 43

عين كل الثنائيات $(a\,;\,b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرط

$a \geq b$ مع (1)..... $ppcm(a\,;\,b) - 9\,pgcd(a\,;\,b) = 13$

الحـــل ــ 43

ليكن $\alpha = pgcd(a\,;\,b)$

نضع $a = \alpha\,x$ و $b = \alpha y$

إذن : $p.cm(a\,;\,b) = \alpha\,x\,y$ حيث x و y أوليان فيما بينهما

منه الشرط (1) يكافئ $\alpha\,x\,y - 9\,\alpha = 13$

يكافئ $\alpha(x\,y - 9) = 13$

يكافئ $\begin{cases} \alpha = 1 \text{ و } x\,y - 9 = 13 \\ \text{أو} \\ \alpha = 13 \text{ و } x\,y - 9 = 1 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \alpha = 1 \text{ و } x\,y = 22 \\ \text{أو} \\ \alpha = 13 \text{ و } x\,y = 10 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \alpha = 1 \text{ و } (x\,;\,y) \in \{(1\,;\,22)\,;\,(2\,;\,11)\,;\,(11\,;\,2)\,;\,(22\,;\,1)\} \\ \text{أو} \\ \alpha = 13 \text{ و } (x\,;\,y) \in \{(1\,;\,10)(2\,;\,5)(5\,;\,2)(10\,;\,1)\} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} (a\,;\,b) \in \{(1\,;\,22)\,;\,(2\,;\,11)\,;\,(11\,;\,2)\,;\,(22\,;\,1)\} \\ \text{أو } (a\,;\,b) \in \{(13\,;\,130)(26\,;\,65)(65\,;\,26)(130\,;\,13)\} \end{cases}$

يكافئ $(a\,;\,b) \in \{(11\,;\,2)\,;\,(22\,;\,1)\,;\,(65\,;\,26)\,;\,(130\,;\,13)\}$ لأن $a \geq b$

التمرين ــ 44

عين كل الثنائيات $(a\,;\,b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرط : $pgcd(a\,;\,b) = 7$ و $ppcm(a\,;b) = 84$

الحـــل ــ44

ليكن $a = 7\,x$ و $b = 7\,y$ حيث x و y أوليان فيما بينهما .

إذن : $ppcm(a\,;b) = 7\,x\,y$

نتيجة : $7\,x\,y = 84$ يكافئ $x\,y = 12$

يكافئ $(x\,;\,y) \in \{(1\,;\,12)\,;\,(3\,;\,4)\,;\,(4\,;\,3)\,;\,(12\,;1)\}$

منه الثنائيات المطلوبة هي : $(a\,;\,b) \in \{(7\,;\,84)\,;\,(21\,;\,28)\,;\,(28\,;\,21)\,;\,(84\,;7)\}$

التمرين ــ 45

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 6

نضع $a = 3\,n + 2$ ؛ $b = n - 5$

1 ــ أحسب $a - 3\,b$

2 ــ إستنتج أن $pgcd(a\,;\,b) \in \{1\,;\,17\}$

3 ــ عين قيم n التي يكون من أجلها $pgcd(a\,;\,b) = 17$ و $ppcm(a\,;\,b) \leq 150$

الحـــل ــ 45

1 ــ $a - 3\,b = 3\,n + 2 - 3\,(n - 5) = 3\,n + 2 - 3\,n + 15 = 17$

2 ــ ليكن $pgcd(a\,;b) = \alpha$

إذن : $\begin{cases} \alpha \mid a \\ \alpha \mid b \end{cases}$ منه $\begin{cases} \alpha \mid a \\ \alpha \mid 3\,b \end{cases}$ منه : $\alpha \mid a - 3\,b$ أي $\alpha \mid 17$

نتيجة : $pgcd\,a\,;\,b) \in \{1\,;\,17\}$

3 ــ ليكن $pgcd(a\,;\,b) = 17$

نضع $a = 17\,x$ و $b = 17\,y$ حيث x و y أوليان فيما بينهما .

إذن : $ppcm(a\,;b) = 17\,x\,y$

لدينا $ppcm(a ; b) \leq 150$ إذن : $17 \times y \leq 150$

منه : $xy \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$

إذن : $(x ; y) \in \{(1 ; 1) ; (1 ; 2) ; (2 ; 1) ; (1 ; 3) ; (3 ; 1) ; (1 ; 4) ; (4 ; 1) ; (1 ; 5) ; (5 ; 1) ; (1 ; 6) ; (6 ; 1) ; (2 ; 3) ; (3 ; 2) ; (1 ; 7) ; (7 ; 1) ; (1 ; 8) ; (8 ; 1)\}$

أي : $(a ; b) \in \{(17 ; 17) ; (17 ; 34) ; (34 ; 17) ; (17 ; 51) ; (51 ; 17) ; (17 ; 68) ; (68 ; 17) ; (17 ; 85) ; (85 ; 17) ; (17 ; 102) ; (102 ; 17) ; (34 ; 51) ; (51 ; 34) ; (17 ; 119) ; (119 ; 17) ; (17 ; 136) ; (136 ; 17)\}$

لكن $a - 3b = 17$ أي $a = 3b + 17$

منه الثنائيات المطلوبة هي $\{(17 ; 68)\}$

أي $\begin{cases} 3n + 2 = 68 \\ n - 5 = 17 \end{cases}$ نه $\begin{cases} 3n = 66 \\ n = 17 + 5 \end{cases}$ أي $n = 22$

نتيجة : توجد قيمة وحيدة لـ n تحقق الشرط المطلوب و هي $n = 22$

التمرين ــ 46

n عدد طبيعي . أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما في كل من الحالات التالية :

1 ــ $a = n$ ؛ $b = 2n+1$

2 ــ $a = 2n+3$ ؛ $b = 3n + 5$

الحـــل ــ46

1 ــ $\begin{cases} a = n \\ b = 2n + 1 \end{cases}$ إذن : $b - 2a = 2n + 1 - 2n = 1$

منه : حسب بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

1 ــ $\begin{cases} a = 2n + 3 \\ b = 3n + 5 \end{cases}$ إذن : $2b - 3a = 2(3n + 5) - 3(2n + 3) = 6n + 10 - 6n - 9 = 1$

منه : حسب بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

التمرين ــ 47

n عدد طبيعي .

1 ــ أثبت أن $pgcd(11n + 3 ; 7n + 2) = 1$

2 ــ أثبت أن $pgcd(n ; n^2 + 1) = 1$

الحـــل ــ 47

1 ــ ليكن $pgcd(11n + 3 \cdot 7n + 2) = \alpha$

$\begin{cases} \alpha | 11n + 3 \\ \alpha | 7n + 2 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \alpha | 7(11n + 3) \\ \alpha | 11(7n + 2) \end{cases}$

منه : $\alpha | 11(7n + 2) - 7(11n + 3)$

أي $\alpha | 77n + 22 - 77n - 21$

أي $\alpha | 1$

منه : $\alpha = 1$

2 ــ ليكن $pgcd(n ; n^2 + 1) = \alpha$

$\begin{cases} \alpha | n \\ \alpha | n^2 + 1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} \alpha | n^2 \\ \alpha | n^2 + 1 \end{cases}$

منه : $\alpha | n^2 + 1 - n^2$

أي $\alpha | 1$

منه $\alpha = 1$

التمرين ــ 48

n عدد طبيعي غير معدوم .

باستعمال مبرهنة بيزو برهن أن العددين $a = 2n^2 + 4n + 1$ و $b = n + 2$ أوليان فيما بينهما .

الحـــل ــ 48

$a - 2nb = 2n^2 + 4n + 1 - 2n(n+2) = 1$

إذن : حسب بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

التمرين ــ 49

n عدد طبيعي غير معدوم

1 ــ تحقق أن : $(n^3+1)^2 = n^2(n^4+2n) + 1$

2 ــ إستنتج أن العددين n^3+1 و n^4+2n أوليان فيما بينهما .

الحـــل ــ 49

1 ــ $(n^3+1)^2 = n^6 + 2n^3 + 1 = n^2(n^4+2n) + 1$

2 ــ حسب السؤال (1) فإن : $(n^3+1)^2 = n^2(n^4+2n) + 1$

إذن : $(n^3+1)(n^3+1) - n^2(n^4+2n) = 1$

منه : حسب مبرهنة بيزو فإن العددان n^3+1 و n^4+2n أوليان فيما بينهما لأن توجد ثنائية $(\alpha ; \beta)$ من الأعداد الصحيحة تحقق $\alpha(n^3+1) + \beta(n^4+2n) = 1$

و هي $(\alpha ; \beta) = (n^3+1 ; -n^2)$

التمرين ــ 50

n عدد طبيعي غير معدوم .

1 ــ حلل العدد $n(2n+1) - 1$

2 ــ أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين $(n+1)$ و $n(2n+1)$

الحـــل ــ 50

1 ــ $n(2n+1) - 1 = 2n^2 + n - 1$

لنحلل كثير الحدود p المتغير الحقيقي x حيث $p(x) = 2x^2 + x - 1$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$ ؛ $x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$

منه : $p(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)$

أي : $2x^2 + x - 1 = (2x-1)(x+1)$

نتيجة : العدد $n(2n+1) - 1$ يحلل إلى $(2n-1)(n+1)$

2 ــ حسب السؤال (1) : $n(2n+1) - 1 = (2n-1)(n+1)$

منه : $n(2n+1) - (2n-1)(n+1) =$

إذن : حسب بيزو فإن العددان $(n+1)$ و $n(2n+1)$ أوليان فيما بينهما

منه : $pgcd(n(2n+1) ; n+1) = 1$

التمرين ــ 51

باستعمال خوارزمية إقليدس عين ثنائية $(x ; y)$ من Z^2 تحقق $12x + 35y = 1$

الحـــل ــ 51

12	11
1	1

35	12
11	2

لنكتب البواقي المتتالية في خوارزمية إقليدس كمايلي :

$11 = 35 - 12(2)$ ..... (1)

$1 = 12 - 11(1)$ ..... (2)

بتعويض (1) في (2) نحصل على : $1 = 12 - [35 - 12(2)]$

أي : $1 = 12 - 35 + 12(2)$

أي : $1 = 12(3) - 35$

منه : يكفي أخذ $x = 3$ و $y = -1$ حتى يكون $12x + 35y = 1$

أي : $(x ; y) = (3 ; -1)$

التمرين ــ 52

باستعمال خزارزمية إقليدس عين ثنائية $(x ; y)$ من Z^2 حيث : $257x + 45y = pgcd(257 ; 45)$

الحـل ــ 52

لنبحث عن $pgcd(257 ; 45)$ باستعمال خوارزمية إقليدس كمايلي :

257	45	45	32	32	13	13	6
225	5	32	1	26	2	[1]	2
[32]		[13]		[6]			

إذن : $pgcd(257 ; 45) = 1$

لنكتب البواقي المتسلسلة كمايلي :

$1 = 13 - 6(2)$ ..... (1)

$6 = 32 - 13(2)$ ..... (2)

$13 = 45 - 32(1)$ ..... (3)

$32 = 257 - 45(5)$ ..... (4)

نعوض (2) في (1) : $1 = 13 - 2[32 - 13(2)]$

أي : $1 = 13 - 32(2) + 13(4)$

أي : $1 = 13(5) - 32(2)$ ..... (5)

نعوض (3) في (5) : $1 = 5[45 - 32(1)] - 32(2)$

أي : $1 = 45(5) - 32(5) - 32(2)$

أي : $1 = 45(5) - 32(7)$ ..... (6)

نعوض (4) في (6) : $1 = 45(5) - 7[257 - 45(5)]$

أي : $1 = 45(5) - 257(7) + 45(35)$

أي : $1 = 257(-7) + 45(40)$

إذن : يكفي أخذ $(x ; y) = (40 ; -7)$ حيث $257x + 45y = 1$

تحقيق : $257 \times 7 = 1799$ و $45 \times 40 = 1800$

$-7(257) + 45(40) = -1799 + 1800 = 1$

التمرين ــ 53

1 ــ عين $pgcd(168 ; 20)$

2 ــ هل المعادلة $168x + 20y = 6$ تقبل حلا في Z^2

3 ــ هل المعادلة $168x + 20y = 4$ تقبل حلا في Z^2

الحـل ــ 53

1 ــ $\left.\begin{matrix} 20 = 4 \times 5 \\ 168 = 4 \times 42 \end{matrix}\right\}$ إذن : $pgcd(168 ; 20) = 4$

2 ــ لدينا $\left\{\begin{matrix} 4 \mid 20 \\ 4 \mid 168 \end{matrix}\right.$ إذن : $\left\{\begin{matrix} 4 \mid 20y \\ 4 \mid 168x \end{matrix}\right.$

منه : $4 \mid 168x + 20y$

أي $4 \mid 6$ تناقض

إذن : لا يوجد أي ثنائية $(x ; y)$ من Z^2 تحقق $168x + 20y = 6$

3 ــ $168x + 20y = 4$ تكافئ $42x + 5y = 1$

إذن : المعادلة تقبل حل في Z^2 لأن العددان 5 و 42 أوليان فيما بينهما

فإذن حسب بيزو توجد ثنائية $(x ; y)$ من Z^2 تحقق $42x + 5y = 1$

التمرين ــ 54

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق $5a = 7b$

الحـل ــ 54

$5a = 7b$ إذن : 7 يقسم $5a$

لكن 7 أولي مع 5 إذن : حسب غوص فإن 7 يقسم a

منه : $a = 7k$ حيث $k \in Z$

إذن : $\left.\begin{matrix} 5a = 7b \\ a = 7k \end{matrix}\right\}$ يكافئ $\left.\begin{matrix} 5(7k) = 7b \\ a = 7k \end{matrix}\right\}$ يكافئ $\left.\begin{matrix} b = 5k \\ a = 7k \end{matrix}\right\}$

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي $\{(7k ; 5k)\}$ حيث $k \in Z$

التمرين ــ55

عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من Z^2 حلول المعادلة $55x = 16y$

الحـــل ــ55

$55x = 16y$ إذن : 16 يقسم x (لأن 16 أولي مع 55)

منه : $x = 16k$ حيث $k \in Z$

إذن $55(16k) = 16y$

منه $y = 55k$

نتيجة : حلول المعادلة $55x = 16y$ في Z^2 هي الثنائيات $\{(16k ; 55k)\}$ حيث $k \in Z$

التمرين ــ 56

عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الصحيحة التي تكون حلول للمعادلة $21(x - 3) = 12(y + 4)$ ..... (1)

الحـــل ــ 56

المعادلة (1) تكافئ $7(x - 3) = 4(y + 4)$ ..... (2)

إذن : 4 يقسم $(x - 3)$ لأن 4 أولي مع 7

منه $x - 3 = 4k$ حيث $k \in Z$ ..... (α)

إذن المساواة (2) تصبح : $7(4k) = 4(y + 4)$

أي : $7k = y + 4$

منه : $y = 7k - 4$

من المساواة (α) نستنتج أن $x = 4k + 3$

نتيجة : حلول المعادلة (1) في Z^2 هي الثنائيات $\{(4k + 3 ; 7k - 4)\}$ حيث $k \in Z$

التمرين ــ57

1 ــ حل في Z^2 المعادلة $3x - 13y = 1$ ..... (1)

2 ــ إستنتج مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث $3x \equiv 1[13]$

الحـــل ــ 57

1 ــ الثنائية $(-1 ; -4)$ هي حل خاص للمعادلة لأن $3(-4) - 13(-1) = -12 + 13 = 1$

إذن : المعادلة (1) تكافئ $3x - 13y = 3(-4) - 13(-1)$

تكافئ $3x - 3(-4) = 13y - 13(-1)$

تكافئ $3(x + 4) = 13(y + 1)$

منه : 13 يقسم $(x + 4)$ لأن 13 أولي مع 3

إذن : $x + 4 = 13k$ حيث $k \in Z$

منه : $3(13k) = 13(y + 1)$

أي : $y + 1 = 3k$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} x + 4 = 13k \\ y + 1 = 3k \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} x = 13k - 4 \\ y = 3k - 1 \end{matrix}\right\}$

منه حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $\{(13k - 4 ; 3k - 1)\}$ حيث $k \in Z$

2 ــ $3x \equiv 1[13]$ إذن : $3x = 13y + 1$ حيث $y \in Z$

منه : $3x - 13y = 1$

إذن : x هو حل المعادلة (1)

منه : $x = 13k - 4$ حيث $k \in Z$

تحقيق : $3x = 3(13k - 4) = 39k - 12$

إذن : $3x \equiv -12[13]$

أي $3x \equiv 1[13]$

التمرين ــ 58

لتكن في Z^2 المعادلة $2045x - 64y = 1$ ..... (1)

1 ــ عين pgcd(2045 ; 64)

2 ــ إستنتج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في Z^2

3 ــ أوجد حلا خاصا للمعادلة (1)

4 ــ عين كل حلول المعادلة (1) في Z^2

الحـــل ــ 58

1 ــ $\left.\begin{matrix} 64 = 2^6 \\ 2045 = 5 \times 409 \end{matrix}\right\}$ إذن : $\text{pgcd}(64 ; 2045) = 1$

2 ــ 64 و 2045 أوليان فيما بينهما إذن : حسب بيزو توجد ثنائية $(x ; y)$ من Z^2 تحقق $2045x + 64y = 1$

إذن : المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .

3 ــ لنبحث عن الحل الخاص باستعمال خوارزمية إقليدس كمايلي :

2045	64
192	31
125	
64	
61	

64	61
61	1
3	

61	3
60	20
1	

$1 = 61 - 3(20)$ ..... (1)

$3 = 64 - 61(1)$ ..... (2)

$61 = 2045 - 64(31)$ .... (3)

نعوض (2) في (1) : $1 = 61 - 20[64 - 61(1)]$

أي : $1 = 61 - 64(20) + 61(20)$

أي : $1 = 61(21) - 64(20)$ ..... (4)

نعوض (3) في (4) : $1 = 21[2045 - 64(31)] - 64(20)$

أي : $1 = 2045(21) - 64(21 \times 31) - 64(20)$

أي $1 = 2045(21) - 64(21 \times 31 + 20)$

أي : $1 = 2045(21) - 64(671)$

إذن : الحل الخاص هو $(x ; y) = (21 ; 671)$

4 ــ حل المعادلة (1) في Z^2

$2045x - 64y = 1$ تكافئ $2045x - 64y = 2045(21) - 64(671)$

تكافئ $2045x - 2045(21) = 64y - 64(671)$

تكافئ $2045(x - 21) = 64(y - 671)$

إذن : 64 يقسم $(x - 21)$ لأن 64 و 2045 أوليان فيما بينهما

منه $x - 21 = 64k$ حيث $k \in Z$

إذن : $2045(64k) = 64(y - 671)$

أي $2045k = y - 671$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} x - 21 = 64k \\ y - 671 = 2045k \end{matrix}\right\}$ منه $\left.\begin{matrix} x = 64k + 21 \\ y = 2045k + 671 \end{matrix}\right\}$ حيث $k \in Z$

إذن : حلول المعادلة (1) في Z^2 هي الثنائيات $(64k + 21 ; 2045k + 671)$ حيث $k \in Z$

التمرين ــ 59

نعتبر في Z^2 المعادلة : $11x - 5y = 14$ ..... (1)

1 ــ تحقق أن الثنائية (39 ; 19) حل للمعادلة (1) ثم إستنتج كل حلولها

2 ــ بين أن توجد ثنائية وحيدة $(\alpha ; \beta)$ حل للمعادلة (1) حيث $0 < \alpha < 5$

الحـــل ــ 59

1 ــ $11(19) - 5(39) = 209 - 195 = 14$

إذن : فعلا الثنائية (39 ; 19) حل للمعادلة (1)

منه : المعادلة (1) تكافئ $11x - 5y = 11(19) - 5(39)$

تكافئ $11x - 11(19) = 5y - 5(39)$

تكافئ $11(x-19)=5(y-39)$

إذن : 5 يقسم $x-19$ لأن 5 و 11 أوليان فيما بينهما

أي $x-19=5k$ حيث $k\in Z$

منه : $11(5k)=5(y-39)$

أي $y-39=11k$

نتيجة : $\begin{cases} x-19=5k \\ y-39=11k \end{cases}$ منه $\begin{cases} x=5k+19 \\ y=11k+39 \end{cases}$ و هي حلول المعادلة (1) في Z^2

2 ــ ليكن $\begin{cases} \alpha=5k+19 \\ \beta=11k+39 \end{cases}$ حل للمعادلة (1)

$0<\alpha<5$ يكافئ $0<5k+19<5$

يكافئ $-19<5k<-14$

يكافئ $-19/5<k<-14/5$

يكافئ $-3,8<k<-2.8$

يكافئ $k=-3$ لأن $k\in Z$

منه : $\begin{cases} \alpha=5(-3)+19=4 \\ \beta=11(-3)+39=6 \end{cases}$

نتيجة : الحل المطلوب هو $(\alpha\,;\beta)=(4\,;6)$

التمرين ــ 60

في المستوي المنسوب إلى معلم نعتبر المستقيم (Δ) ذو المعادلة $21x-31y-2=0$

1 ــ تحقق أن النقطة $A(6\,;4)$ تنتمي إلى (Δ)

2 ــ إستنتج كل نقاط المستقيم (Δ) و التي إحداثياها أعداد صحيحة .

الحـــل ــ 60

1 ــ $21(6)-31(4)-2=126-124-2=0$

إذن : النقطة $A(6\,;4)$ تنتمي إلى (Δ)

2 ــ تكون النقطة $N(x\,;y)$ حيث $(x\,;y)\in Z^2$ نقطة من (Δ) إذا و فقط إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ حلا للمعادلة $21x-31y=2$ في Z^2

لدينا حسب السؤال (1) الثنائية $(6\,;4)$ حل خاص

إذن : المعادلة تكافئ $21x-31y=21(6)-31(4)$

تكافئ $21x-21(6)=31y-31(4)$

تكافئ $21(x-6)=31(y-4)$

إذن : 31 يقسم $x-6$ لأن 31 و 21 أوليان فيما بينهما

منه $x-6=31k$ حيث $k\in Z$

إذن : $21(31k)=31(y-4)$

منه : $y-4=21k$

نتيجة : $\begin{cases} x-6=31k \\ y-4=21k \end{cases}$ منه $\begin{cases} x=31k+6 \\ y=21k+4 \end{cases}$

إذن : النقط المطلوبة هي $N(31k+6\,;21k+4)$ حيث $k\in Z$

التمرين ــ61

n عدد طبيعي

برهن أن العدد $n(n^2+5)$ يقبل القسمة على 6

الحـــل ــ 61

$n\equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$n^2\equiv ?[6]$	0	1	4	3	4	1
$n^2+5\equiv ?[6]$	5	0	3	2	3	0
$n(n^2+5)\equiv ?[6]$	0	0	0	0	0	0

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n(n^2+5)$ يقبل القسمة على 6

التمرين ــ 62

n عدد طبيعي أكبر تماما من 2 . نضع $a = n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$

1 ــ أكتب a على شكل جداء خمسة أعداد طبيعية متتابعة

2 ــ برهن أن العدد a يقبل القسمة على كل من 3 و 5

3 ــ برهن أن العدد a يقبل القسمة على 8

4 ــ إستنتج أن العدد a يقبل القسمة على 120

الحـل ــ62

1 ــ $a = n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$

$= n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2)$

$= (n - 2)(n - 1)\, n(n + 1)(n \div 2)$

نضع $n - 2 = b$ إذن : $a = b(b + 1)(b + 2)(b + 3)(b + 4)$ و هو المطلوب

2 ــ حسب السؤال (1) فإن $a = b(b + 1)(b + 2)(b + 3)(b + 4)$ حيث $b \in IN^*$ لأن $n > 2$ أي $n - 2 > 0$

إذا كان $b \equiv 0[3]$ فإن $a \equiv 0[3]$

إذا كان $b \equiv 1[3]$ فإن $b + 2 \equiv 0[3]$ إذن : $a \equiv 0[3]$

إذا كان $b \equiv 2[3]$ فإن $b + 1 \equiv 0[3]$ إذن : $a \equiv 0[3]$

نتيجة : a يقبل دائما القسمة على 3

إذا كان $b \equiv 0[5]$ فإن $a \equiv 0[5]$

إذا كان $b \equiv 1[5]$ فإن $b + 4 \equiv 0[5]$ أي $a \equiv 0[5]$

إذا كان $b \equiv 2[5]$ فإن $b + 3 \equiv 0[5]$ أي $a \equiv 0[5]$

إذا كان $b \equiv 3[5]$ فإن $b + 2 \equiv 0[5]$ أي $a \equiv 0[5]$

إذا كان $b \equiv 4[5]$ فإن $b + 1 \equiv 0[5]$ أي $a \equiv 0[5]$

نتيجة : a يقبل دائما القسمة على 5

3 ــ لدينا : $a = b(b + 1)(b + 2)(b + 3)(b + 4)$

إذا كان b زوجي فإن { $b + 2$ زوجي ; $b + 4$ زوجي }

إذن : $b(b + 2)(b + 4)$ يقبل القسمة على 8

منه : a يقبل القسمة على 8

إذا كان b فردي فإن { $b + 1$ زوجي ; $b + 3$ زوجي } حيث $b = 2k + 1$

منه : { $b + 1 = 2k + 2$; $b + 3 = 2k + 4$ }

إذن : $(b + 1)(b + 3) = (2k + 2)(2k + 4)$

أي : $(b + 1)(b + 3) = 2(k + 1) \times 2(k + 2)$

أي $(b + 1)(b + 3) = 4(k + 1)(k + 2)$

بما أن $k + 1$ و $k + 2$ عددين طبيعيين متتابعين فإن أحدهما زوجي

منه : $(b + 1)(b + 3)$ مضاعف 8

إذن : a يقبل القسمة على 8

نتيجة : العدد a دائما يقبل القسمة على 8

4 ــ { a مضاعف 3 ; a مضاعف 5 ; a مضاعف 8 } إذن : a مضاعف $8 \times 5 \times 3$ (لأن الأعداد 3 ، 5 و 8 أولية فيما بينها مثنى مثنى)

أي a مضاعف 120

التمرين ــ 63

عين باقي قسمة العددين 7^{10} و 7^{2521} على 11

الحـل ــ 63

لندرس بواقي قسمة 7^n على 11

$7^0 \equiv 1[11]$
$7^1 \equiv 7[11]$
$7^2 \equiv 5[11]$
$7^3 \equiv 2[11]$
$7^4 \equiv 3[11]$
$7^5 \equiv 10[11]$
$7^6 \equiv 4[11]$
$7^7 \equiv 6[11]$
$7^8 \equiv 9[11]$
$7^9 \equiv 8[11]$
$7^{10} \equiv 1[11]$

نتيجة : باقي قسمة 7^{10} على 11 هو 1

$7^{2521} = 7^{10(252)+1} = 7 \times (7^{10})^{252}$ إذن : $7^{2521} \equiv 7[11]$ لأن $(7^{10})^{252} \equiv 1[11]$

أي باقي قسمة 7^{2521} على 11 هو 7

التمرين ــ64

1 ــ برهن أن العدد 331 أولي .

n عدد طبيعي يكتب في النظ م العشري على شكل 330 رقما كلها مساوية إلى 9

2 ــ أحسب $n + 1$

الحــل ــ 64

1 ــ $\sqrt{331} = 18,1$

n	2	3	5	7	11	13	17
$331 \equiv ?[n]$	1	1	1	2	1	6	8

نتيجة : 331 لا يقبل القسمة على كل الأعداد الأولية n حيث $n \leq \sqrt{331}$ إذن : 331 أولي .

2 ــ $n = 9 \times 10^{329} + 9 \times 10^{328} + \ldots\ldots + 9 \times 10 + 9$

$= 9[10^{329} + 10^{328} + \ldots + 10 + 1]$

$= 9\left[\frac{10^{330} - 1}{10 - 1}\right]$

$= 10^{330} - 1$

نتيجة : $n + 1 = 10^{330} - 1 + 1$ أي $n + 1 = 10^{330}$

التمرين ــ 65

n عدد طبيعي

عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها : $n^4 + n^3 + 2n^2 + 2n + 1 \equiv 0[3]$

الحــل ــ 65

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$n^2 \equiv ?[3]$	0	1	1
$n^3 \equiv ?[3]$	0	1	2
$n^4 \equiv ?[3]$	0	1	1
$2n^2 \equiv ?[3]$	0	2	2
$2n \equiv ?[3]$	0	2	1
$n^4 + n^3 + 2n^2 + 2n + 1 \equiv ?[3]$	1	1	1

نتيجة : لا توجد أي قيمة للعدد الطبيعي n حيث $n^4 + n^3 + 2n^2 + 2n + 1 \equiv 0[3]$

التمرين ــ 66

1 ــ برهن أن من أجل كل عدد صحيح x فإن $x^3 \equiv x[3]$

2 ــ ما هي قيم العدد الصحيح x حيث $x^3 \equiv x[4]$

3 ــ إستنتج قيم x حيث $x^3 \equiv x[12]$

الحـــل ــ 66

ــ 1

$x \equiv ?[3]$	0	1	2
$x^3 \equiv ?[3]$	0	1	2

نتيجة : من أجل كل عدد صحيح x فإن $x^3 \equiv x[3]$

ــ 2

$x \equiv ?[4]$	0	1	2	3
$x^3 \equiv ?[4]$	0	1	0	3

إذن : $x^3 \equiv x[4]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 0[4]$ أو $x \equiv 1[4]$ أو $x \equiv 3[4]$

ــ 3 $x^3 \equiv x[12]$ يكافئ $x^3 - x \equiv 0[12]$

يكافئ $\begin{cases} x^3 - x \equiv 0[3] \\ x^3 - x \equiv 0[4] \end{cases}$ (لأن 4 و 3 أوليان فيما بينهما)

يكافئ $\begin{cases} x^3 \equiv x[3] \\ x^3 \equiv x[4] \end{cases}$

يكافئ $x^3 \equiv x[4]$ لأن الشرط $x^3 \equiv x[3]$ محقق دائما .

يكافئ $x \equiv 0[4]$ أو $x \equiv 1[4]$ أو $x \equiv 3[4]$

التمرين ــ 67

a عدد صحيح .

1 ــ ما هي البواقي الممكنة لقسمة a^4 على 5

2 ــ إستنتج ان المعادلة $x^4 + 781 = 3y^4$ لا تقبل حلولا في Z^2

الحـــل ــ 67

ــ 1

$a \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$a^4 \equiv ?[5]$	0	1	1	1	1

إذن : البواقي الممكنة لقسمة a^4 على 5 هي $\{0 ; 1\}$

2 ــ إذا وجدت ثنائية $(x ; y)$ من $Z \times Z$ حلا للمعادلة $x^4 + 781 = 3y^4$

فإن : $x^4 + 781 \equiv 3y^4[5]$

أي : $x^4 + 1 \equiv 3y^4[5]$ ..... (1)

الحالة الأولى : $\begin{cases} x^4 \equiv 0[5] \\ y^4 \equiv 0[5] \end{cases}$ إذن : (1) تكافئ $1 \equiv 0[5]$ تناقض

الحالة الثانية : $\begin{cases} x^4 \equiv 0[5] \\ y^4 \equiv 1[5] \end{cases}$ إذن : (1) تكافئ $1 \equiv 3[5]$ تناقض

الحالة الثالثة : $\begin{cases} x^4 \equiv 1[5] \\ y^4 \equiv 0[5] \end{cases}$ إذن : (1) تكافئ $2 \equiv 0[5]$ تناقض

الحالة الرابعة : $\begin{cases} x^4 \equiv 1[5] \\ y^4 \equiv 1[5] \end{cases}$ إذن : (1) تكافئ $2 \equiv 3[5]$ تناقض

نتيجة : لا توجد أي ثنائية $(x ; y)$ من Z^2 تحقق $x^4 + 781 \equiv 3y^4[5]$ و خاصة تحقق المعادلة $x^4 + 781 = 3y^4$

ملاحظة : في كل التمارين الموالية نعتبر A مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من أو تساوي 27 و نرفق كل عنصر من A حرفا أبجديا كمايلي :

أ	ب	ت	ث	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض	ط	ظ	ع	غ	ف	ق
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

ك	ل	م	ن	هـ	و	ي
21	22	23	24	25	26	27

التمرين ــ 68

نقوم بعملية تشفير الكلمات باستعمال التحويل $x \longmapsto y$ حيث y هو باقي قسمة $x + 3$ على 28

مثلا : لتشفير الحرف ق لدينا $x = 20$

إذن : y هو باقي قسمة $(3 + 20)$ على 28

منه : $y = 23$

أي تشفير الحرف ق هو م

1 ــ شفر الكلمة (الجزائر)

2 ــ حل تشفير الكلمات التالية : تبضل ؛ لثغوا ثهصاشثث ؛ وذوز

الحـل ــ 68

1 ــ

	ر	أ	ا	ز	ج	ل	أ
x	9	0	0	10	4	22	0
$y = x + 3$	12	3	3	13	7	25	3
التشفير	ش	ث	ث	س	د	ه	ث

منه : تشفير كلمة الجزائر هو الكلمة : ثهدصثثش

2 ــ لحل تشفير كلمة لدينا : $y[28] = x + 3$ منه $x = y - 3 [28]$ كما يلي :

	ل	ض	ب	ت
y	22	14	1	2
$x = y - 3$	19	11	26	27
فك التشفير	ف	س	و	ي

ملاحظة : إذا كان x سالب نضيف له 28

لأن $28 \equiv 0[28]$

منه : الكلمة تبضل هي تشفير الكلمة "يوسف"

	ث	ث	ش	ا	ص	ه	ث	ا	و	غ	ث	ل
y	3	3	12	0	13	25	3	0	26	18	3	22
$x = y - 3$	0	0	9	25	10	22	0	25	23	15	0	19
فك التشفير	ء	ا	ر	ه	ز	ل	ا	ه	م	ط	ا	ف

إذن : الكلمة لثغوا ثهصاشثث هو تشفير الكلمة فاطمة الزهراء

	ز	و	ذ	و
y	10	26	8	26
$x = y - 3$	7	23	5	23
فك التشفير	د	م	ح	م

إذن : الكلمة وذوز هي تشفير لكلمة محمد

التمرين ــ 69

لتكن f دالة للمجموعة A في نفسها ترفق كل عنصر x بباقي قسمة $3 + x 14$ على 28

شفر الكلمة سكر . ما هو المشكل المطروح ؟

الحـل ــ 69

	ر	ك	س
x	9	21	11
باقي قسمة $3 + x 14$ على 28	17	17	17
التشفير	ع	ع	ع

$14(11) + 3 = 157$

$14(21) + 3 = 297$

$14(9) + 3 = 129$

نتيجة : كل من الحروف س ، ك ، ر لهم نفس التشفير .

إذن : لا يمكن إجراء عملية التشفير باستعمال الدالة f المعطاة لأنها ليست تقابل من A نحو A

أي يمكن أن يكون $a \neq b$ و لكن $f(a) = f(b)$

التمرين ــ 70

نعرف طريقة للتشفير وفقا للدالة f حيث f(x) هو باقي قسمة $6 + x 11$ على 28

1 ــ شفر كلمة "تلمسان"

2 ــ حل المعادلة $11 x \equiv 1[28]$ (لاحظ أن $11 \times 5 = 55$)

3 ــ بين أن إذا كان $y = f(x)$ فإن $x \equiv 23 y + 2[28]$

4 ــ بين أن كل حرفين مختلفين يحولان إلى حرفين مختلفين .

5 ــ حل تشفير الكلمتين : شبكخا ، هغخعب .

الحـل ــ 70

1 ــ

ت	ل	م	س	ا	ن	
2	22	23	11	0	24	x
28	248	259	127	6	270	11 x + 6
0	24	7	15	6	18	باقي قسمة 11 x + 6 على 28
أ	ن	د	ط	خ	غ	التشفير

إذن : الكلمة تلمسان تشفر إلى كلمة أند طخغ

3 ــ $11\,x \equiv 1[28]$ إذن : $5 \times 11\,x \equiv 5 \times 1[28]$

أي $55\,x \equiv 5[28]$

أي $-x \equiv 5[28]$ لأن $55 = 2(28) - 1$

منه $x \equiv -5[28]$

أي $x \equiv 23[28]$

منه : $x = 28\,k + 23$ حيث $k \in IN$

تحقيق : إذا كان $x = 28\,k + 23$ فإن : $11\,x = 11(28\,k + 23)$

أي : $11\,x = 28(11\,k) + 253$

منه : $11\,x \equiv 253[28]$

أي : $11\,x \equiv 1[28]$ محقق .

3 ــ $y = f(x)$ إذن : $11\,x + 6 \equiv y[28]$

منه $23(11\,x + 6) \equiv 23\,y[28]$

منه $253\,x + 138 \equiv 23\,y[28]$

منه $x + 26 \equiv 23\,y[28]$ لأن $\begin{cases} 253 \equiv 1[28] \\ 138 \equiv 26[28] \end{cases}$

منه $x \equiv 23\,y - 26[28]$

منه $x \equiv 23\,y + 2[28]$ لأن $-26 \equiv 2[28]$

4 ــ ليكن x ، x' ، y ، y' أربعة عناصر من المجموعة A حيث $y' = y$ و $y' = f(x')$ و $y = f(x)$

إذن : $\begin{cases} x' \equiv 23\,y' + 2[28] \\ x \equiv 23\,y' + 2[28] \end{cases}$

منه $x' - x \equiv 0[28]$

أي $x' \equiv x[28]$

لكن $\begin{cases} 0 \leq x' \leq 27 \\ 0 \leq x \leq 27 \end{cases}$

إذن : $x' = x$

نتيجة : كل عددين مختلفين x' و x لهما صورتين مختلفتين بالدالة f

إذن : كل حرفين مختلفين يحولان إلى حرفين مختلفين .

5 ــ حل تشفير كلمة شيكخا

ش	ي	ك	خ	ا	
12	27	21	6	0	y
278	623	485	140	2	23 y + 2
26	7	9	0	2	باقي قسمة 23 y + 2 على 28
و	د	ر	ا	ت	فك التشفير

إذن : الكلمة شيكخا هي تشفير لكلمة "ودرات"

ب	ع	خ	غ	هـ
1	17	6	18	25
25	393	140	416	575
25	1	0	24	17
هـ	ب	ا	ن	ع

y	
23 y + 2	
باقي قسمة 23 y + 2 على 28	
فك التشفير	

نتيجة : الكلمة هغخعب هي تشفير لكلمة " عنابه "

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ــ 1

k عدد طبيعي . نضع $n = 2310\,k + 2100$

1 ــ برهن أن إذا غيرنا أحد أرقام العدد n دون تغيير رقم آحاده يكون دائما غير أولي

2 ــ برهن أن $n + 1 \equiv 0[11]$ ؛ $n \equiv 0[3]$ ؛ $n \equiv 0[5]$ ؛ $n \equiv 0[7]$

3 ــ إستنتج أن n يكون غير أولي مهما غيرنا أي رقم من أرقامه

4 ــ هل توجد أعداد أخرى تحقق هذه الخاصية ؟

الحـل ــ 1

1 ــ من أجل كل عدد طبيعي k فإن رقم آحاد العدد $2310\,k$ هو 0

إذن : رقم آحاد العدد $n = 2310\,k + 2100$ هو 0 إذن n مضاعف 10

منه : مهما غيرنا أحد أرقام العدد n بإستثناء رقم آحاده المعدوم فإن n يبقى مضاعف 10 إذن : n غير أولي

2 ــ
$\left.\begin{array}{l} 2310 \equiv 0[11] \\ 2100 \equiv 10[11] \\ 1 \equiv 1[11] \end{array}\right\}$ منه : $2310\,k + 2100 + 1 \equiv 0 + 10 + 1[11]$ أي : $n + 1 \equiv 0[11]$

$\left.\begin{array}{l} 2310 \equiv 0[3] \\ 2100 \equiv 0[3] \end{array}\right\}$ منه : $2310\,k + 2100 \equiv 0[3]$ أي : $n \equiv 0[3]$

$\left.\begin{array}{l} 2310 \equiv 0[5] \\ 2100 \equiv 0[5] \end{array}\right\}$ إذن : $2310\,k + 2100 \equiv 0[5]$ أي $n \equiv 0[5]$

$\left.\begin{array}{l} 2310 \equiv 0[7] \\ 2100 \equiv 0[7] \end{array}\right\}$ إذن : $2310\,k + 2100 \equiv 0[7]$ أي $n \equiv 0[7]$

3 ــ لدينا رقم آحاد العدد n يساوي 0 منه إذا غيرنا رقم آحاده فإن العدد n يكون مساويا إلى أحد القيم التالية :

$n + 1$: لكن $n + 1 \equiv 0[11]$

$n + 2$: لكن $n + 2$ زوجي لأن n زوجي

$n + 3$: لكن $n + 3$ مضاعف 3 لأن n مضاعف 3

$n + 4$: لكن $n + 4$ زوجي لأن n زوجي

$n + 5$: لكن $n + 5$ مضاعف 5 لأن $n \equiv 0[5]$

$n + 6$: لكن $n + 6$ زوجي لأن n زوجي

$n + 7$: لكن $n + 7$ مضاعف 7 لأن $n \equiv 0[7]$

$n + 8$: لكن $n + 8$ زوجي لأن n زوجي

$n + 9$: لكن $n + 9$ مضاعف 3 لأن $n \equiv 0[3]$

نتيجة : مهما غيرنا رقم آحاد العدد n فإن n يبقى ليس أولي .

إذن : مهما غيرنا أي رقم من أرقام العدد n فإن n ليس أولي .

4 ــ يكفي أن نضرب العدد r في قوة للعدد 10 حتى نحصل على أعداد طبيعية تحقق أن مهما غيرنا أحد أرقامها فإنها ليست أولية أي كل الأعداد الطبيعية التي تكتب من الشكل $n = 10^p(2310\,k + 2100)$ حيث $p \in IN$ تحقق هذه الخاصية

التمرين ــ 2

1 ــ برهن أن كل عدد طبيعي غير أولي n أكبر من أو يساوي 6 هو قاسم للعدد $(n-1)\,!$

حيث $(n-1)\,! = 1 \times 2 \times \ldots\ldots \times (n-1)$

2 ــ هل هذه الخاصية صحيحة من أجل n عدد أولي ؟

الحـــل ــ 2

1 ــ ليكن n عدد غير أولي حيث $n \geq 6$

إذن : n يقبل تحليل إلى جداء أعداد من الشكل $a_1 \times a_2 \times \ldots\ldots \times a_p$

حيث $2 \leq a_i \leq n/2$ (هي قواسم العدد n)

منه : من أجل كل i فإن $2 \leq a_i < (n-1)$

إذن : $a_1 \times a_2 \times \ldots\ldots \times a_p$ يقسم $2 \times 3 \times \ldots\ldots \times (n-1)$

أي n يقسم $(n-1)\,!$

2 ــ إذا كان n أولي فإن الخاصية ليست صحيحة لأن العدد n لا يقسم أي عامل من العوامل التي تظهر في $(n-1)\,!$ فإذن لا يمكن أن يقسم جداؤها لأنه لا يقبل تحليل

التمرين ــ 3

ليكن p عدد أولي أكبر تماما من 3 . نضع $n = 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots \times p$

برر أن الأعداد $n+2$ ؛ $n+3$ ؛ $n+4$ ؛ $n+p$ ليست أولية

الحـــل ــ 3

$n+2 = 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots \times p + 2 = 2(3 \times 4 \times \ldots\ldots \times p + 1)$ إذن : $n+2$ ليس أولي

$n+3 = 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots \times p + 3 = 3(2 \times 4 \times 5 \times \ldots \times p + 1)$ إذن : $n+3$ ليس أولي

$n+4 = 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots \times p + 4 = 4(2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p + 1)$ إذن : $n+4$ ليس أولي

$n+p = 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots \times p + p = p[2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (p-1) + 1]$ إذن : $n+p$ ليس أولي

التمرين ــ 4

a و b عددان طبيعيان أوليين حيث $2 < a < b$

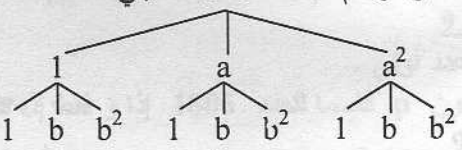
1 ــ عين كل الثنائيات $(x\,;\,y)$ من $Z^* \times Z^*$ التي تحقق $x^2 - y^2 = (a\,b)^2$

2 ــ عين هذه الثنائيات من أجل $(a\,;\,b) = (2\,;\,7)$

الحـــل ــ 4

1 ــ $x^2 - y^2 = (a\,b)^2$ يكافئ $(x-y)(x+y) = a^2\,b^2$

لنبحث عن قواسم العدد $a^2\,b^2$ كمايلي :



إذن : القواسم هي $\{1\,;\,b\,;\,b^2\,;\,a\,;\,a\,b\,;\,a\,b^2\,;\,a^2\,;\,a^2\,b\,;\,a^2\,b^2\}$

بما أن $x+y > x-y$ فإن نبحث عن تحليل لـ $a^2\,b^2$ إلى جداء عاملين $\alpha\,\beta$ حيث $\alpha < \beta$

كمايلي : $1 \times a^2\,b^2$ ؛ $b \times a^2\,b$ ؛ $a \times b^2\,a$ ؛ $a^2 \times b^2$

إذن : إما $\left.\begin{matrix} x-y=1 \\ x+y=a^2\,b^2 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x-y=b \\ x+y=a^2\,b \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x-y=a \\ x+y=a\,b^2 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} x-y=a^2 \\ x+y=b^2 \end{matrix}\right\}$

أي إما $\left.\begin{matrix} 2x=1+a^2\,b^2 \\ y=x-1 \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} 2x=b+a^2\,b \\ y=x-b \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} 2x=a+a\,b^2 \\ y=x-a \end{matrix}\right\}$ أو $\left.\begin{matrix} 2x=a^2+b^2 \\ y=x-a^2 \end{matrix}\right\}$

أي : $(x\,;\,y) \in \left\{\left(\frac{1+a^2\,b^2}{2}\,;\,\frac{1+a^2\,b^2}{2}-1\right)\,;\,\left(\frac{b+a^2\,b}{2}\,;\,\frac{b+a^2\,b}{2}-b\right)\,;\right.$

$\left.\left(\frac{a+a\,b^2}{2}\,;\,\frac{a+a\,b^2}{2}-a\right)\,;\,\left(\frac{a^2+b^2}{2}\,;\,\frac{a^2+b^2}{2}-a^2\right)\right\}$

2 ــ من أجل $(a ; b) = (3 ; 7)$ فإن : $(x ; y) \in \{(221 ; 220) ; (35 ; 28) ; (75 ; 72) ; (29 ; 20)\}$

التمرين ــ 5

1 ــ برهن أن كل مجموع 5 أعداد طبيعية فردية متتالية ليس أولي .

2 ــ في الحالة العامة ، من أجل $n \geq 2$ هل يمكن أن يكون مجموع n عدد طبيعي فردي متتابع أوليا ؟

الحـــل ــ 5

1 ــ ليكن k عدد طبيعي . نضع $n = 2k + 1$ إذن n عدد طبيعي فردي .

منه : $S = n + (n + 2) + (n + 4) + (n + 6) + (n + 8)$ هو مجموع 5 أعداد فردية متتابعة .

$$= 5n + 20$$
$$= 5(2k + 1) + 20$$
$$= 10k + 25$$
$$= 5(2k + 5)$$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي فردي n فإن 5 يقسم S

منه : مجموع 5 أعداد فردية متتابعة هو دائما ليس أولي

2 ــ نضع $p = 2k + 1$ و $S = p + (p + 2) + (p + 4) + \ldots + [p + 2(n - 1)]$

$$= np + [2 + 4 + 6 + \ldots + 2(n - 1)]$$
$$= np + 2[1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)]$$
$$= np + 2\left[\frac{1 + n - 1}{2}(n - 1)\right]$$
$$= np + n(n - 1)$$
$$= n[p + n - 1]$$

إذن : S يقبل تحليل من الشكل $n(p + n - 1)$

منه S ليس أولي .

نتيجة : مجموع n عدد طبيعي فردي متتابع لا يمكن أن يكون أولي $(n \geq 2)$

التمرين ــ 6

نسمي أعداد Mersenne لأعداد الطبيعية الأولية التي تكتب من الشكل $N = 2^p - 1$ حيث $p \in N$

a و b عددان طبيعيان غير معدومان و يختلفان عن 1

1 ــ بسط المجموع $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1}$

2 ــ برهن أن إذا كان $a^n - 1$ أوليا فإن $a = 2$

الحـــل ــ 6

1 ــ $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1}$ هو مجموع n حد متتابع لمتتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول 1

$$= 1 \times \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

إذن : $S = \frac{a^n - 1}{a - 1}$

2 ــ حسب السؤال (1) فإن $(a - 1)$ يقسم $a^n - 1$ لأن S عدد طبيعي .

لكن إذا كان $a^n - 1$ أوليا فإنه لا يقبل قواسم ماعدا 1 و نفسه

إذن : $a - 1 = 1$ أي $a = 2$

التمرين ــ 7

a و b عددان طبيعيان . نضع $n = a^4 + 4b^4$

1 ــ برهن أن : $n = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$

2 ــ برهن أن من أجل $b \geq 2$ فإن n لا يمكن أن يكون أولي

3 ــ من أجل $b = 1$ هل يمكن أن يكون n أولي ؟

4 ــ برهن أن العدد $1207^4 + 4^{1205}$ ليس أولي .

الحـــل ــ 7

1 ــ $(a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab) = a^4 + 2a^2b^2 - 2a^3b + 2a^2b^2 + 4b^4 - 4ab^3 + 2a^3b + 4ab^3 - 4a^2b^2$

$$= a^4 + 4b^4$$
$$= n$$

2 ــ $a^2 + 2b^2 - 2ab = a^2 + b^2 - 2ab + b^2$

$= (a-b)^2 + b^2$

بما أن $\begin{cases} b \geq 2 \\ (a-b)^2 \geq 0 \end{cases}$ فإن $(a-b)^2 + b^2 \geq 4$

أي $a^2 + 2b^2 - 2ab \geq 4$

من جهة أخرى : $a^2 + 2b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab + b^2$

$= (a+b)^2 + b^2$

بما أن $\begin{cases} b^2 \geq 4 \\ (a+b)^2 > 0 \end{cases}$ فإن $(a+b)^2 + b^2 > 4$

أي $a^2 + 2b^2 + 2ab > 4$

نتيجة : إذا كان $b \geq 2$ فإن n يحلل إلى جداء عاملين كل منهما يختلف عن 1 إذن لا يمكن أن يكون n أولي .

3 ــ من أجل $b = 1$ فإن : $n = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$

$= (a^2 + 2a + 2)[(a-1)^2 + 1]$

إذا كان $a = 1$ فإن : $n = (1 + 2 + 2)(0 + 1) = 5$

إذن : n أولي

إذا كان $a = 0$ فإن : $n = 2 \times 2 = 4$

إذن : n ليس أولي

إذا كان $a > 1$ فإن $\begin{cases} (a-1)^2 + 1 > 1 \\ a^2 + 2a + 2 > 1 \end{cases}$

إذن : n يحلل إلى جداء عاملين كل منهما أكبر من 1

منه : لا يمكن لـــ n أن يكون أولي . إلا من أجل $a = 1$

4 ــ $1207^4 + 4^{1205} = 1207^4 + 4 \times (4^{1204})$

$= 1207^4 + 4 \times (4^{301})^4$

نضع $\begin{cases} a = 1207 \\ b = 4^{301} \end{cases}$ إذن حسب السؤال (1) فإن $a^4 + 4b^4$ ليس اولي

أي $1207^4 + 4^{1205}$ ليس أولي

التمرين ــ 8

q عدد أولي عين المجموع S و الجداء P لكل القواسم الموجبة للعدد q^n حيث n عدد طبيعي غير معدوم

الحـــل ــ 8

عدد القواسم الموجبة للعدد q^n هو $(n+1)$ و هي : $\{q^n \ldots\ldots ; q^3 ; q^2 ; q ; 1\}$

منه : $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

$P = 1 \times q \times q^2 \times \ldots \times q^n = q^{1+2+\ldots+n} = q^{\frac{n(n+1)}{2}}$

التمرين ــ 9

ليكن p عدد أولي .

أثبت أن يكون p قاسما للعدد 1806 إذا و فقط إذا كان p - 1 قاسما للعدد 1806

الحـــل ــ 9

لنبحث عن قواسم العدد 1806 :

1806	2
903	3
301	7
43	43
1	

إذن : قواسم العدد 1806 هي حسب الجدول التالي :

1								2							
1				3				1				3			
1		7		1		7		1		7		1		7	
1	43	1	43	1	43	1	43	1	43	1	43	1	43	1	43

$\{1806 ; 42 ; 258 ; 6 ; 602 ; 14 ; 86 ; 2 ; 903 ; 21 ; 129 ; 3 ; 301 ; 7 ; 43 ; 1\}$

منه القواسم الأولية للعدد 1806 هي $\{2 ; 3 ; 7 ; 43\}$

لاحظ أن الأعداد 42 ; 6 ; 2 ; 1 هي قواسم للعدد 1806 و هي ناتجة عن طرح 1 من القواسم الأولية .

إذن : إذا كان p أولي و p يقسم 1806 فإن p - 1 يقسم 1806
هل : إذا كان p - 1 يقسم 1806 و p أولي فإن p يقسم 1806 ؟
الجواب نعم لأن كل من الأعداد {42 ; 6 ; 4 ; 3} تحقق هذه الشروط .
إذن : يكون p أولي قاسم لـ 1806 إذا و فقط إذا كان p - 1 قاسم لـ 1806

التمرين ــ 10

a و b عددان طبيعيان . نضع $n = 2^a \times 3^b$
1 ــ عين عدد القواسم الموجبة للعدد n
2 ــ عين n علما أن عدد قواسم العدد 2 n هو ضعف عدد قواسم العدد n

الحـل ــ 10

1 ــ $n = 2^a \times 3^b$ إذن : عدد قواسم n هو $(a + 1)(b + 1)$

2 ــ $2n = 2^{a+1} \times 3^b$ إذن : عدد قواسم 2 n هو $(a + 1 + 1)(b + 1) = (a + 2)(b + 1)$

يكون عدد قواسم 2 n هو ضعف عدد قواسم n إذا و فقط إذا كان :

$$(a + 2)(b + 1) = 2(a + 1)(b + 1)$$

أي : $a + 2 = 2(a + 1)$

أي : $a + 2 = 2a + 2$

أي : $a = 0$ منه : $n = 3^b$ حيث $b \in IN$

التمرين ــ 11

ليكن $n = 200$
1 ــ عين مجموعة القواسم الموجبة للعدد n
ليكن N عدد قواسم العدد n و p جداء كل هذه القواسم
2 ــ تحقق من صحة العلاقة : $n^N = p^2$ ..... (1)
ليكن $n = 2^a \times 5^b$ حيث a و b عددان طبيعيان .
3 ــ أحسب الجداء p لكل قواسم العدد n
4 ــ هل العلاقة (1) محققة ؟
5 ــ عين العدد n من الشكل $2^a \times 5^b$ علما أن $p = 20^{42}$

الحـل ــ 11

1 ــ $200 = 25 \times 8 = 2^3 \times 5^2$

منه قواسم 200 هي {200 ; 40 ; 8 ; 100 ; 20 ; 4 ; 50 ; 10 ; 2 ; 25 ; 5 ; 1}

2 ــ $N = 12$ (عدد قواسم 200)

$$p = 1 \times 5 \times 25 \times 2 \times 10 \times 50 \times 4 \times 20 \times 100 \times 8 \times 40 \times 200$$
$$= 5 \times 5^2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5^2 \times 2 \times 2^2 \times 2^2 \times 5 \times 5^2 \times 2^2 \times 2^3 \times 2^3 \times 5 \times 2^3 \times 5^2$$
$$= 2^{18} \times 5^{12}$$

إذن : $p = 2^{18} \times 5^{12}$ $\quad p^2 = 2^{36} \times 5^{24}$

إذن : $n^N = (2^3 \times 5^2)^{12}$ $\quad n^N = 2^{36} \times 5^{24}$

نتيجة : العلاقة $n^N = p^2$ محققة .

3 ــ $p = (2^0 \times 5^0 \times 2^0 \times 5^1 \times \ldots \times 2^0 \times 5^b) \times (2^1 \times 5^0 \times 2^1 \times 5^1 \times \ldots \times 2^1 \times 5^b) \times \ldots \times (2^a \times 5^0 \times 2^a \times 5^1 \times \ldots \times 2^a \times 5^b)$

$$= (2^{0(b+1)} \times 5^{0+1+\ldots+b}) \times (2^{1(b+1)} \times 5^{0+1+2\ldots+b}) \times \ldots \times (2^{a(b+1)} \times 5^{0+1+\ldots+b})$$

$$= \left(2^0 \times 5^{\frac{b(b+1)}{2}}\right) \times \left(2^{b+1} \times 5^{\frac{b(b+1)}{2}}\right) \times \ldots \times \left(2^{a(b+1)} \times 5^{\frac{b(b+1)}{2}}\right)$$

$$= 2^{0+(b+1)+2(b+1)+\ldots+a(b+1)} \times 5^{(a+1)\frac{b(b+1)}{2}}$$

$$= 2^{\frac{a(a+1)(b+1)}{2}} \times 5^{\frac{b(a+1)(b+1)}{2}}$$

4 ــ $p^2 = 2^{a(a+1)(b+1)} \times 5^{b(a+1)(b+1)}$

و

$$n^N = (2^a \times 5^b)^{(a+1)(b+1)}$$
$$= 2^{a(a+1)(b+1)} \times 5^{b(a+1)(b+1)}$$

إذن : العلاقة (1) محققة دائما .

5 ــ $p = 20^{42}$ إذن : $p^2 = 20^{84}$

أي : $p^2 = 4^{84} \times 5^{84}$

أي : $p^2 = 2^{168} \times 5^{84}$

منه : $\left.\begin{array}{l} a(a+1)(b+1) = 168 \quad \ldots\ldots (2) \\ b(a+1)(b+1) = 84 \quad \ldots\ldots (3) \end{array}\right\}$

من العلاقة (3) : $(a+1)(b+1) = 84/b$ (b قاسم لـــ 84)

إذن : العلاقة (2) تصبح : $a \times \frac{84}{b} = 168$

أي : $a/b = 2$

منه : $a = 2b$

المساواة (3) تصبح إذن : $b(2b+1)(b+1) = 84$

لنبحث عن تحليل العدد 84 إلى ثلاث عوامل من بينها عاملين متتابعين b و $b+1$

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

إذن : $84 = 3 \times 7 \times 4$

منه : $b = 3$ ؛ $2b+1 = 7$ ؛ $b+1 = 4$

إذن : $a = 2b = 6$

نتيجة : العدد المطلوب هو $n = 2^6 \times 5^3$

تحقيق : $n^N = (2^6 \times 5^3)^{28} = 2^{168} \times 5^{84} = 4^{84} \times 5^{84} = 20^{84}$ إذن : $p^2 = 20^{84}$

التمرين ــ 12

n عدد طبيعي غير معدوم حيث N هو عدد قواسمه الموجبة .

برهن أن إذا كان N فردي فإن n هو مربع تام .

الحـــل ــ 12

ليكن $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_i^{\alpha_i}$ حيث p_k : أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و α_k أسس طبيعية .

لدينا $N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_i + 1)$

إذن : إذا كان N فردي فإن كل من الأعداد $(\alpha_1 + 1)$ ، $(\alpha_2 + 1)$ ، ..... ، $(\alpha_i + 1)$ هي أعداد فردية .

و عليه فإن الأسس α_1 ، α_2 ، ..... α_i زوجية .

منه : العدد n هو مربع تام

التمرين ــ 13

x ، y عددان طبيعيان حيث $0 < x \leq y$

نضع $pgcd(x ; y) = d$ و $ppcm(x ; y) = m$

نريد تعيين x و y حيث $m^2 - 5d^2 = 2000$ .....(α)

1 ــ برهن أن إذا كانت الثنائية $(x ; y)$ تحقق المعادلة (α) فإن d^2 هو قاسم للعدد 2000

2 ــ حلل العدد 2000 إلى جداء عوامل أولية ثم إستنتج القواسم المربعة التامة له

3 ــ برهن أن 5 هو قاسم مشترك للعددين d و m . ما هي إذن القيم الممكنة لـــ d

4 ــ إستنتج القيم الممكنة للعددين x و y

الحـــل ــ 13

1 ــ $\left.\begin{array}{l} d \text{ يقسم } x \\ d \text{ يقسم } y \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} d^2 \text{ يقسم } x^2 \\ d^2 \text{ يقسم } y^2 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} x^2 \text{ يقسم } d^2 \\ 5y^2 \text{ يقسم } d^2 \end{array}\right\}$ إذن : d^2 يقسم $x^2 - 5y^2$

إذا كان $(x ; y)$ حل لمعادلة (α) فإن : $x^2 - 5y^2 = 2000$

إذن : d^2 يقسم 2000

2 ــ $2000 = 20 \times 100 = 4 \times 5 \times 4 \times 25 = 2^4 \times 5^3$

منه القواسم المربعة التامة للعدد 2000 هي :

$\{5^2 \times 2^4 ; 2^4 ; 5^2 \times 2^2 ; 2^2 ; 5^2 ; 1\}$ أي $\{(20)^2 ; (4)^2 ; (10)^2 ; (2)^2 ; (5)^2 ; 1\}$

3 ــ $m^2 - 5d^2 = 2000$ إذن : $m^2 = 5d^2 + 2000$

أي $m^2 = 5(d^2 + 400)$

منه : m^2 يقسم 5

لكن 5 أولي .

إذن 5 يقسم m

5 يقسم m إذن : $m = 5k$ حيث $k \in IN$

المعادلة (α) تصبح إذن : $(5k)^2 - 5d^2 = 2000$

أي $5d^2 = 25k^2 - 2000$

أي $d^2 = 5k^2 - 400$

أي $d^2 = 5(k^2 - 80)$

إذن : d^2 يقسم 5

بما أن 5 أولي فإن 5 يقسم d

نتيجة : 5 يقسم d و 5 يقسم m إذن : 5 قاسم مشترك لـ d و m

منه القيم الممكنة لـ d^2 هي $\{20^2 ; 10^2 ; 5^2\}$

أي القيم الممكنة لـ d هي $\{20 ; 10 ; 5\}$

4 ـ $m^2 - 5d^2 = 2000$ إذن : $m^2 = 2000 + 5d^2$

d	$m^2 = 2000 + 5d^2$	m
5	$m^2 = 2000 + 125 = 2125$ مرفوض لأنه ليس مربع تام	/
10	$m^2 = 2000 + 500 = (50)^2$	50
20	$m^2 = 2000 + 2000 = 4000$ مرفوض لأنه ليس مربع تام	/

نتيجة : الثنائية الوحيدة التي تحقق المعادلة هي $(d ; m) = (10 ; 50)$

إذن : $(x ; y) \in \{(10 ; 50) ; (50 ; 10)\}$ لكن $x < y$ إذن $(x ; y) = (10 ; 50)$

التمرين ـ 14

1 ـ حلل العددين 1995 و 105 إلى جداء عوامل أولية

α و β عددان طبيعيان حيث $\alpha < \beta$

2 ـ حل في المجموعة $N \times N$ المعادلة $\alpha\beta = 105$

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و غير أوليين فيما بينهما

نضع $pgcd(a ; b) = \lambda$ و $ppcm(a ; b) = \gamma$

3 ـ عين a و b حيث $\begin{cases} 95\lambda + 19\gamma = 1995 \\ \lambda < 7 \end{cases}$

الحـل ـ 14

1 ـ

1995	3
665	5
133	7
19	19
1	

$1995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19$

105	3
35	5
7	7
1	

$105 = 3 \times 5 \times 7$

2 ـ قواسم 105 هي $\{1 , 7 ; 5 ; 21 ; 3 ; 35 ; 5 ; 7 ; 1 , 105\}$

إذن : $\alpha\beta = 105$ تكافئ $(\alpha ; b) \in \{(1 ; 105) ; (7 ; 15) ; (5 ; 21) ; (35 ; 3) ; (3 ; 35) ; (21 ; 5) ; (15 ; 7) ; (105 ; 1)\}$

3 ـ λ يقسم γ إذن : $\begin{cases} \lambda \text{ يقسم } 95\lambda \\ \lambda \text{ يقسم } 19\gamma \end{cases}$ منه λ يقسم $95\lambda + 19\gamma$ أي λ يقسم 1995

a و b ليس أوليان فيما بينهما إذن : $1 < \lambda$

$\begin{cases} 1 < \lambda < 7 \\ \lambda \text{ يقسم } 1995 \end{cases}$ إذن : $\lambda \in \{3 ; 5\}$

لدينا : $95\lambda + 19\gamma = 1995$ إذن : $19\gamma = 1995 - 95\lambda$

λ	$19\gamma = 1995 - 95\lambda$	γ
3	$1995 - 285 = 1710$	$1710/19 = 90$
5	$1995 - 475 = 1520$	$1520/19 = 80$

نتيجة : $(\alpha ; \beta) \in \{(3 ; 4)\}$

2 ــ a ، b ، c ، d ، e حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها r

إذن : $b = a r$ ؛ $c = a r^2$ ؛ $d = a r^3$ ؛ $e = a r^4$

منه : $28 a^3 = e - b$ تكافئ $28 a^3 = a r^4 - a r$

تكافئ $28 a^3 = a r(r^3 - 1)$

تكافئ $28 a^2 = r(r^3 - 1)$ لأن $a \neq 0$

تكافئ $r = 4$ و $a = 3$ (حسب السؤال (1))

نتيجة : $a = 3$ ؛ $b = 12$ ؛ $c = 48$ ؛ $d = 192$ ؛ $e = 768$

تحقيق : $28 a^3 = 28 \times 27 = 756$

$e - b = 768 - 12 = 756$

التمرين ــ 16

1 ــ α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما حيث $\alpha > \beta$

عين α و β حيث $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35 \beta$

2 ــ (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها R حيث u_0 و R

عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $u_0 < R$

أوجد u_0 و R حتى يكون $35 u_0^2 + 19 u_1 - u_0 R^3 = 0$

3 ــ نضع $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$ أحسب S_n بدلالة n

4 ــ أوجد قيم n حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 30

الحـل ــ 16

1 ــ $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35 \beta$ إذن : α يقسم 35β

بما أن α و β أوليان فيما بينهما فإن α يقسم 35

منه : $\alpha \in \{1 ; 5 ; 7 ; 35\}$

لكن $\alpha > 1$ لأن $\beta \neq 0$

إذن : $\alpha \in \{5 ; 7 ; 35\}$

من أجل $\alpha = 5$: $5(25 - 19) = 35 \beta$

إذن : $25 - 19 = 7 \beta$

أي : $6 = 7 \beta$ مستحيل .

من أجل $\alpha = 7$: $7(49 - 19) = 35 \beta$

إذن : $49 - 19 = 5 \beta$

أي : $\beta = 6$

من أجل $\alpha = 35$: $35(35^2 - 19) = 35 \beta$

منه : $\beta = 1206$ مرفوض لأن $\alpha > \beta$

نتيجة : القيم الممكنة لـ α و β هي : $\alpha = 7$ و $\beta = 6$

2 ــ $35 u_0^2 + 19 u_1 - u_0 R^3 = 0$ يكافئ $35 u_0^2 = u_0 R^3 - 19 u_1$

يكافئ $35 u_0^2 = u_0 R^3 - 19 u_0 R$ لأن $u_1 = u_0 R$

يكافئ $35 u_0^2 = u_0 R(R^2 - 19)$

يكافئ $35 u_0 = R(R^2 - 19)$ لأن $u_0 \neq 0$

يكافئ $u_0 = 6$ و $R = 7$ (حسب السؤال (1))

3 ــ $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$$= u_0 \times \frac{R^{n+1} - 1}{R - 1}$$

$$= 6 \times \frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1}$$

$$= 7^{n+1} - 1$$

4 ــ يكون S_n قابلا للقسمة على 30 إذا و فقط إذا كان S_n مضاعفا لـ 5 و مضاعفا لـ 6

لدينا : $7 \equiv 1[6]$ إذن : $7^{n+1} \equiv 1[6]$

منه : $7^{n+1} - 1 \equiv 0[6]$

إذن : S_n مضاعف 6

لنعين إذن قيم n حتى يكون S_n مضاعفا لـ 5 كمايلي :

$7 \equiv 2[5]$ إذن : $7^n \equiv 2^n[5]$

منه : $7^{n+1} \equiv 2 \times 2^n[5]$

ندرس بواقي قسمة 2^n على 5

$n \equiv ?[4]$	0	1	2	3
$2^n \equiv ?[5]$	1	2	4	3
$2 \times 2^n \equiv ?[5]$	2	4	3	1
$2 \times 2^n - 1 \equiv ?[5]$	1	3	2	0

منه :
$2^0 \equiv 1[5]$
$2^1 \equiv 2[5]$
$2^2 \equiv 4[5]$
$2^3 \equiv 3[5]$
$2^4 \equiv 1[5]$

نتيجة : يكون $7^{n+1} - 1 \equiv 0[5]$ إذا و فقط إذا كان $n \equiv 3[4]$

أي يكون S_n قابلا للقسمة على 30 إذا و فقط إذا كان $n = 4k + 3$ حيث $k \in IN$ و هي قيم n المطلوبة .

التمرين ــ 17

1 ــ أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2490 ؛ 32785 ؛ 2905

2 ــ حل في $Z \times Z$ المعادلة $7x + 6y = 79$ باستعمال المساواة $79 = 7 + 72$

إشترى نادي كرة يد ملابس رياضية . إذا علمت أن ثمن بدلة لاعب هو 2905 DA و ثمن بدلة لاعبة هو 2490 DA و أن النادي قد دفع مبلغ 32735 DA في المجموع . فما هو عدد اللاعبين و اللاعبات ؟

الحـل ــ 17

1 ــ

2490	2
1245	3
415	5
83	83
1	

2905	5
581	7
83	83
1	

32785	5
6557	83
79	79
1	

نتيجة : القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2490 ؛ 2905 ؛ 32785 هو $415 = 5 \times 83$

2 ــ $79 = 7 + 72$ إذن : $79 = 7(1) + 6(12)$

إذن : المعادلة $7x + 6y = 79$ تكافئ $7x + 6y = 7(1) + 6(12)$

تكافئ $7x - 7(1) = 6(12) - 6y$

تكافئ $7(x - 1) = 6(12 - y)$

إذن : $x - 1$ يقسم 6

منه : $x - 1 = 6k$ حيث $k \in Z$

إذن : $7 \times 6k = 6(12 - y)$

إذن : $12 - y = 7k$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} x - 1 = 6k \\ 12 - y = 7k \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} x = 1 + 6k \\ y = 12 - 7k \end{matrix}\right\}$ حيث $k \in Z$

3 ــ ليكن x عدد اللاعبين و y عدد اللاعبات .

إذن : $2905x + 2490y = 32785$

أي : $7x + 6y = 79$ (بالقسمة على 415)

إذن : الثنائية $(x ; y)$ هي حل للمعادلة $7x + 6y = 79$

منه : $x = 1 + 6k$ و $y = 12 - 7k$ حيث $k \in Z$

لكن x و y أعداد طبيعية إذن $x \geq 0$ و $y \geq 0$

منه : $\left.\begin{matrix} 1 + 6k \geq 0 \\ 12 - 7k \geq 0 \end{matrix}\right\}$ أي $\left.\begin{matrix} k \geq -1/6 \\ k \leq 12/7 \end{matrix}\right\}$

أي $\left.\begin{matrix} k \in IN \\ k \leq 1 \end{matrix}\right\}$ لأن k عدد صحيح .

إذن : $k \in \{0 ; 1\}$

نتيجة : إما $(x ; y) = (1 ; 12)$: لاعب و 12 لاعبة .
أو $(x ; y) = (7 ; 5)$: 7 لاعبين و 5 لاعبات .

التمرين ــ 18

1 ــ عين القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ؛ 1497 ؛ 2994

لتكن المعادلة $1996\,x - 1497\,y = 2994$ .....(1) في $Z \times Z$

2 ــ اثبت أن إذا كان $(x ; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف 3 و y مضاعف 2 ثم إستنتج هذه الحلول

3 ــ عين حلول المعادلة (1) التي تحقق $x\,y = 1950$

الحـــل ــ 18

1 ــ

1996	2
998	2
499	499
1	

1497	3
499	499
1	

2994	2
1497	3
499	499
1	

إذن : القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 و 2994 هو 499

2 ــ ليكن $(x ; y)$ حل للمعادلة (1)

$1996\,x - 1497\,y = 2994$ إذن : $4\,x - 3\,y = 6$ (بالقسمة على 499)

منه $\begin{cases} 4\,x = 3\,y + 6 \\ 3\,y = 4\,x - 6 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 4\,x = 3(y + 2) \ldots\ldots (1) \\ 3\,y = 2(2\,x - 3) \ldots. (2) \end{cases}$

منه $\begin{cases} 3 \text{ يقسم } 4\,x \\ 2 \text{ يقسم } 3\,y \end{cases}$

أي $\begin{cases} 3 \text{ يقسم } x \text{ لأن } 3 \text{ أولي مع } 4 \\ 2 \text{ يقسم } y \text{ لأن } 2 \text{ أولي مع } 3 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x \text{ مضاعف } 3 \\ y \text{ مضاعف } 2 \end{cases}$

نضع $x = 3\,k$ حيث $k \in Z$ إذن المساواة (1) تصبح : $4 \times 3\,k = 3(y + 2)$

منه : $4\,k = y + 2$

أي : $y = 4\,k - 2$

نتيجة : حلول المعادلة (1) في $Z \times Z$ هي الثنائيات $\{(3\,k ; 4\,k - 2)\}$ حيث $k \in Z$

3 ــ لدينا $\begin{cases} x = 3\,k \\ y = 4\,k - 2 \end{cases}$ حيث $k \in Z$

$x\,y = 1950$ يكافئ $3\,k(4\,k - 2) = 1950$

يكافئ $6\,k(2\,k - 1) = 1950$

يكافئ $k(2\,k - 1) = 325$

يكافئ $2\,k^2 - k - 325 = 0$ معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الصحيح k

$\Delta = 1 + 8(325) = 2601 = (51)^2$

$\begin{cases} k_1 = \dfrac{1 - 51}{4} = \dfrac{-50}{4} = -\dfrac{25}{2} & \text{مرفوض} \\ k_2 = \dfrac{1 + 51}{4} = \dfrac{52}{4} = 13 & \text{مقبول} \end{cases}$

إذن : $k = 13$ $\begin{cases} x = 3 \times 13 = 39 \\ y = 4 \times 13 - 2 = 50 \end{cases}$

نتيجة : الثنائية المطلوبة هي $(x ; y) = (39 ; 50)$

تحقيق : $\begin{cases} 39 \times 50 = 1950 \\ 4(39) - 3(50) = 156 - 150 = 6 \end{cases}$

التمرين ــ 19

1 ــ حل في $Z \times Z$ المعادلة $9x' - 14y' = 13$ علما أن $(1 ; 3)$ حل لها .

لتكن في $Z \times Z$ المعادلة $45x - 28y = 130$ ..... (1)

2 ــ بين أن إذا كان $(x ; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف 2 و y مضاعف 5

ثم إستنتج حلول المعادلة (1)

N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\alpha 3}$ في نظام التعداد ذو الأساس 9 و يكتب $\overline{5\beta\beta 6}$ في نظام التعداد ذو الأساس 7

3 ــ عين α و β ثم أكتب N في النظام العشري

الحـــل ــ 19

1 ــ $\left.\begin{matrix} 9x' - 14y' = 13 \\ 9(3) - 14(1) = 13 \end{matrix}\right\}$ إذن : $9x' - 14y' = 9(3) - 14(1)$

منه $9x' - 9(3) = 14y' - 14(1)$

أي $9(x' - 3) = 14(y' - 1)$

منه 14 يقسم $x' - 3$

أي $x' - 3 = 14k$ حيث $k \in Z$

إذن : $9 \times 14k = 14(y' - 1)$

منه $9k = y' - 1$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} x' - 3 = 14k \\ y' - 1 = 9k \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} x' = 14k + 3 \\ y' = 9k + 1 \end{matrix}\right\}$ حيث $k \in Z$

2 ــ ليكن $(x ; y)$ حل للمعادلة (1) إذن $45x - 28y = 130$

منه $\left.\begin{matrix} 45x = 28y + 130 \\ 28y = 45x - 130 \end{matrix}\right\}$

أي $\left.\begin{matrix} 45x = 2(14y + 65) \\ 28y = 5(9x - 26) \end{matrix}\right\}$

إذن $\left.\begin{matrix} 2 \text{ يقسم } 45x \\ 5 \text{ يقسم } 28y \end{matrix}\right\}$

منه $\left.\begin{matrix} 2 \text{ يقسم } x \text{ لأن } 45 \text{ و } 2 \text{ أوليان فيما بينهما .} \\ 5 \text{ يقسم } y \text{ لأن } 5 \text{ و } 28 \text{ أوليان فيما بينهما .} \end{matrix}\right\}$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} 2 \text{ يقسم } x \\ 5 \text{ يقسم } y \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} x = 2x' \\ y = 5y' \end{matrix}\right\}$ حيث x' و y' أعداد صحيحة .

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على : $45(2x') - 28(5y') = 130$

أي : $2 \times 5(9x' - 14y') = 130$

أي $9x' - 14y' = 13$

منه حسب السؤال (1) $\left.\begin{matrix} x' = 14k + 3 \\ y' = 9k + 1 \end{matrix}\right\}$

منه : $\left.\begin{matrix} x = 2(14k + 3) \\ y = 5(9k + 1) \end{matrix}\right\}$ أي $\left.\begin{matrix} x = 28k + 6 \\ y = 45k + 5 \end{matrix}\right\}$ هي حلول المعادلة (1) حيث $k \in Z$

3 ــ $N = \overline{2\alpha\alpha 3}$ في النظم ذو الأساس 9 إذن : $\left.\begin{matrix} 0 \le \alpha \le 8 \\ 2 \times 9^3 + \alpha \times 9^2 + 9\alpha + 3 = N \end{matrix}\right\}$

$N = \overline{5\beta\beta 6}$ في النظام ذو الأساس 7 إذن : $\left.\begin{matrix} 0 \le \beta \le 6 \\ 5 \times 7^3 + \beta \times 7^2 + 7\beta + 6 = N \end{matrix}\right\}$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} 0 \le \alpha \le 8 \ ; \ 0 \le \beta \le 6 \\ 2 \times 9^3 + \alpha \times 9^2 + 9\alpha + 3 = 5 \times 7^3 + \beta \times 7^2 + 7\beta + 6 \end{matrix}\right\}$ .....(2)

المعادلة (2) تكافئ $1458 + 81\alpha + 9\alpha + 3 = 1715 + 49\beta + 7\beta + 6$

تكافئ $90\alpha + 1461 = 56\beta + 1721$

تكافئ $90\alpha - 56\beta = 260$

تكافئ $45\alpha - 28\beta = 130$

تكافئ $\begin{cases} \alpha = 28k + 6 \\ \beta = 45k + 5 \end{cases}$ حيث $k \in Z$ حسب السؤال (2)

لكن $\begin{cases} 0 \le \alpha \le 8 \\ 0 \le \beta \le 6 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 0 \le 28k + 6 \le 8 \\ 0 \le 45k + 5 \le 6 \end{cases}$

أي $\begin{cases} -6 \le 28k \le 2 \\ -5 \le 45k \le 1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} -6/28 \le 28k \le 2/28 \\ -5/45 \le 45k \le 1/45 \end{cases}$

منه : $k = 0$ (لأن $k \in Z$)

إذن : $\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 5 \end{cases}$

منه : $N = 1458 + 81(6) + 9(6) + 3$

$= 1458 + 486 + 54 + 3$

$= 2001$

التمرين ــ 20

1 ــ أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180

2 ــ حل في $Z \times Z$ المعادلة $225x - 180y = 90$ .....(1)

3 ــ عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x - y + 1| < 2$

4 ــ a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ و $\overline{252}$ في النظام ذو الأساس α و يكتبان $\overline{44}$ و $\overline{206}$ في النظام ذو الأساس β

عين α و β ثم إستنتج a و b

الحـــل ــ 20

1 ــ

225	5
45	5
9	3
3	3
1	

180	2
90	2
45	5
9	3
3	3
1	

نتيجة : $pgcd(225 ; 180) = 45$

2 ــ $225x - 180y = 90$ تكافئ $5x - 4y = 2$

تكافئ $5x - 4y = 5(2) - 4(2)$

تكافئ $5x - 5(2) = 4y - 4(2)$

تكافئ $5(x - 2) = 4(y - 2)$

إذن : $x - 2 = 4k$ حيث $k \in Z$

منه : $5 \times 4k = 4(y - 2)$

أي : $y - 2 = 5k$

نتيجة : $\begin{cases} x - 2 = 4k \\ y - 2 = 5k \end{cases}$ منه $\begin{cases} x = 4k + 2 \\ y = 5k + 2 \end{cases}$ حيث $k \in Z$

3 ــ $|x - y + 1| < 2$ تكافئ $-2 < x - y + 1 < 2$

تكافئ $-2 < (4k + 2) - (5k + 2) + 1 < 2$

تكافئ $-2 < 4k + 2 - 5k - 2 + 1 < 2$

تكافئ $-2 < -k + 1 < 2$

تكافئ $-3 < -k < 1$

تكافئ $-1 < k < 3$

تكافئ $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$

من أجل $k = 0$: $\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}\right.$

من أجل $k = 1$: $\left\{\begin{array}{l} x = 4 + 2 \\ y = 5 + 2 \end{array}\right.$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 7 \end{array}\right.$

من أجل $k = 2$: $\left\{\begin{array}{l} x = 8 + 2 \\ y = 10 + 2 \end{array}\right.$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 12 \end{array}\right.$

نتيجة : الثنائيات التي تحقق $|x - y + 1| < 2$ هي $\{(2 ; 2) ; (6 ; 7) ; (10 ; 12)\}$

4 ــ $5 < \alpha$ و $\left\{\begin{array}{l} a = 5\alpha + 2 \\ b = 2\alpha^2 + 5\alpha + 2 \end{array}\right.$

$6 < \beta$ و $\left\{\begin{array}{l} a = 4\beta + 4 \\ b = 2\beta^2 + 6 \end{array}\right.$

إذن : $\left\{\begin{array}{l} 5\alpha + 2 = 4\beta + 4 \\ 2\alpha^2 + 5\alpha + 2 = 2\beta^2 + 6 \end{array}\right.$

أي $\left\{\begin{array}{l} 5\alpha - 4\beta = 2 \\ 2\alpha^2 + 5\alpha - 2\beta^2 - 4 = 0 \end{array}\right.$

أي $\left\{\begin{array}{l} \alpha = 4k + 2 \text{ و } \beta = 5k + 2 \text{ حيث } k \in Z \text{ (حسب السؤال (2))} \\ 2\alpha^2 + 5\alpha - 2\beta^2 - 4 = 0 \ldots\ldots\ldots (2) \end{array}\right.$

نعوض α و β في المعادلة (2)

$2(4k + 2)^2 + 5(4k + 2) - 2(5k + 2)^2 - 4 = 0$

أي $2(16k^2 + 16k + 4) + 20k + 10 - 2(25k^2 + 20k + 4) - 4 = 0$

أي $32k^2 + 32k + 8 + 20k + 10 - 50k^2 - 40k - 8 - 4 = 0$

أي : $-18k^2 + 12k + 6 = 0$

أي : $3k^2 - 2k - 1 = 0$ معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الصحيح k

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$k_1 = \frac{2 + 4}{6} = 1$ ؛ $k_2 = \frac{2 - 4}{6} = \frac{-1}{3}$ مرفوض

نتيجة : $k = 1$ إذن : $\left\{\begin{array}{l} \alpha = 4 + 2 = 6 \text{ مقبول لأن } 5 < 6 \quad (5 < \alpha) \\ \beta = 5 + 2 = 7 \text{ مقبول لأن } 6 < 7 \quad (6 < \beta) \end{array}\right.$

إذن : $\left\{\begin{array}{l} a = \overline{52} \text{ في النظام ذو الأساس 6 منه } a = 5 \times 6 + 2 = 32 \\ b = \overline{252} \text{ في النظام ذو الأساس 6 منه } b = 2 \times 36 + 5 \times 6 + 2 = 104 \end{array}\right.$

التمرين ــ 21

لتكن المعادلة $43x - 13y = \lambda$ .....(*) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث λ عدد صحيح ثابت

1 ــ تحقق أن الثنائية $(-10\lambda - 19 ; -3\lambda - 3)$ هي حل للمعادلة (*)

2 ــ حل في $Z \times Z$ المعادلة (*)

3 ــ N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في النظام ذو الأساس 6 و يكتب $\overline{\beta 0\gamma\gamma\gamma}$ في النظام ذو الأساس 5

أ) بين أن $\gamma = 43\alpha - 13\beta$

ب) عين α ، β ، γ ثم أكتب N في النظام العشري

الحـل ــ 21

1 ــ $43(-3\lambda) - 13(-10\lambda) = -129\lambda + 130\lambda = \lambda$

إذن : الثنائية $(-10\lambda - 19 ; -3\lambda - 3)$ هي حل للمعادلة (*)

2 ــ $43x - 13y = \lambda$ تكافئ $43x - 13y = 43(-3\lambda) - 13(-10\lambda)$

تكافئ $43x - 43(-3\lambda) = 13y - 13(-10\lambda)$

تكافئ $43(x + 3\lambda) = 13(y + 10\lambda)$

إذن : $x + 3\lambda = 13k$ حيث $k \in Z$

منه $43 \times 13k = 13(y + 10\lambda)$

منه $y + 10\lambda = 43k$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} x + 3\lambda = 13k \\ y + 10\lambda = 43k \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} x = 13k - 3\lambda \\ y = 43k - 10\lambda \end{matrix}\right\}$ حيث $k \in Z$

3 ــ ليكن $0 \le \alpha \le 5$ و $0 \le \beta \le 4$ و $0 \le \gamma \le 4$

أ) في الأساس 6 :

$$N = \alpha \times 6^4 + \beta \times 6^3 + \alpha \times 6^2 + \beta \times 6 + \alpha$$
$$= 1296\alpha + 216\beta + 36\alpha + 6\beta + \alpha$$
$$= 1333\alpha + 222\beta$$

في الأساس 5 :

$$N = \beta \times 5^4 + \gamma \times 5^2 + \gamma \times 5 + \gamma$$
$$= 625\beta + 25\gamma + 6\gamma$$
$$= 625\beta + 31\gamma$$

نتيجة : $1333\alpha + 222\beta = 625\beta + 31\gamma$

إذن : $1333\alpha - 403\beta = 31\gamma$ (بالقسمة على 31)

منه : $43\alpha - 13\beta = \gamma$ و هو المطلوب

ب) لدينا $\gamma = 43\alpha - 13\beta$ إذن : $(\alpha ; \beta)$ هي حلول المعادلة $43x - 13y = \gamma$

منه حسب السؤال (1) فإن $\left.\begin{matrix} \alpha = 13k - 3\gamma \\ \beta = 43k - 10\gamma \end{matrix}\right\}$ حيث $k \in Z$

بما أن $0 \le \gamma \le 4$ و $0 \le \alpha \le 5$ و $0 \le \beta \le 4$ نميز الحالات التالية :

الحالة (1) $\gamma = 0$ إذن : $\left.\begin{matrix} \alpha = 13k \\ \beta = 43k \end{matrix}\right\}$

إذن : $\alpha = 0$ و $\beta = 0$ (لأن القيمة الوحيدة لـ k حيث $0 \le 13k \le 5$ هي $k = 0$)

إذن : $N = 0$

الحالة (2) $\gamma = 1$ إذن : $\left.\begin{matrix} \alpha = 13k - 3 \\ \beta = 43k - 10 \end{matrix}\right\}$

منه $\left.\begin{matrix} 0 \le 13k - 3 \le 5 \\ 0 \le 43k - 10 \le 4 \end{matrix}\right\}$

إذن $\left.\begin{matrix} 3 \le 13k \le 8 \\ 10 \le 43k \le 14 \end{matrix}\right\}$

أي $\left.\begin{matrix} 3/13 \le k \le 8/13 \\ 10/43 \le k \le 14/43 \end{matrix}\right\}$

إذن : لا يوجد قيمة لـ k

الحالة (3) $\gamma = 2$ إذن $\left.\begin{matrix} 0 \le 13k - 6 \le 5 \\ 0 \le 43k - 20 \le 4 \end{matrix}\right\}$

أي $\left.\begin{matrix} 6/13 \le k \le 11/13 \\ 20/43 \le k \le 24/43 \end{matrix}\right\}$

إذن : لا يوجد قيمة لـ k

الحالة (4) $\gamma = 3$ إذن $\left.\begin{matrix} 0 \le 13k - 9 \le 5 \\ 0 \le 43k - 30 \le 4 \end{matrix}\right\}$

إذن $\left.\begin{matrix} 9/13 \le k \le 14/13 \\ 30/43 \le k \le 34/43 \end{matrix}\right\}$

إذن : لا يوجد قيمة لـ k

الحالة (5) $\gamma = 4$ إذن $\left.\begin{matrix} 0 \le 13k - 12 \le 5 \\ 0 \le 43k - 40 \le 4 \end{matrix}\right\}$

إذن $\left.\begin{matrix} 12/13 \le k \le 17/13 \\ 40/43 \le k \le 44/43 \end{matrix}\right\}$

منه $k = 1$

إذن $\begin{cases} \alpha = 13 - 12 = 1 \\ \beta = 43 - 40 = 3 \end{cases}$

نتيجة : $\alpha = 1$ ؛ $\beta = 3$ ؛ $\gamma = 4$ أو $\alpha = \beta = \gamma = 0$

إذن : $N = 3 \times 625 + 4 \times 25 + 4 \times 5 + 4 = 1999$ أو $N = 0$

التمرين ــ 22

1 ــ عين pgcd(2505 ; 3006)

لتكن في $Z \times Z$ المعادلة $2505\,x - 3006\,y = \alpha$ .....(*) حيث $\alpha \in Z$

2 ــ عين شرط على α حتى تقبل المعادلة (1) حلولا في $Z \times Z$

3 ــ عين هذه الحلول من أجل $\alpha = 2004$

الحـــل ــ 22

1 ــ

2505	3
835	5
167	167
1	

3006	2
1503	3
501	3
167	167
1	

إذن : $\text{pgcd}(2505 ; 3006) = 3 \times 167 = 501$

2 ــ إذا كان $(x ; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $2505\,x - 3006\,y = \alpha$

لدينا $\begin{cases} 501 \text{ يقسم } 2505 \\ 501 \text{ يقسم } 3006 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 501 \text{ يقسم } 2505\,x \\ 501 \text{ يقسم } 3006\,y \end{cases}$

منه 501 يقسم $2505\,x - 3006\,y$

أي 501 يقسم α

نتيجة : حتى تقبل المعادلة (1) حلولا في $Z \times Z$ يكفي و يلزم أن يكون α مضاعف للعدد 501

3 ــ $\alpha = 2004$

لدينا $2004 = 4 \times 501$ إذن : المعادلة (1) تقبل حلولا في $Z \times Z$

$2505\,x - 3006\,y = 2004$ تكافئ $5\,x - 6\,y = 4$

تكافئ $5\,x - 6\,y = 5(2) - 6(1)$

تكافئ $5\,x - 5(2) = 6\,y - 6(1)$

تكافئ $5(x - 2) = 6(y - 1)$

إذن : $x - 2 = 6\,k$ حيث $k \in Z$

منه : $5 \times 6\,k = 6(y - 1)$

أي $y - 1 = 5\,k$

نتيجة : $\begin{cases} x - 2 = 6\,k \\ y - 1 = 5\,k \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x = 6\,k + 2 \\ y = 5\,k + 1 \end{cases}$ حيث $k \in Z$

التمرين ــ 23

لتكن المعادلة $78\,x^3 + u\,x^2 + v\,x - 14 = 0$ ..... (1) ذات المجهول x في مجموعة الأعداد الناطقة .

(u و v عددين صحيحين)

الجزء I

نفرض أن $x = \frac{14}{39}$ هو حل للمعادلة (1)

1 ــ بين أن العددين u و v يحققان العلاقة $14\,u + 39\,v = 1129$

2 ــ باستعمال خوارزمية إقليدس أوجد الثنائية $(x ; y)$ من $Z \times Z$ و التي تحقق المعادلة $14\,u + 39\,v = 1$

3 ــ تحقق أن الثنائية $(9 ; -25)$ هي حل للمعادلة $14\,u + 39\,v = 1$

4 ــ إستنتج ثنائية $(x_0 ; y_0)$ حلا خاصا للمعادلة $14\,u + 39\,v = 1129$ ثم أعط الحل العام لهذه المعادلة

5 ــ من بين حلول المعادلة $14\,u + 39\,v = 1129$ عين الحل الذي يكون فيه u أصغر عدد طبيعي ممكن .

الجزء II

1 ــ حلل إلى جداء عوامل أولية كل من العددين 78 و 14 ثم إستنتج مجموعة قواسم كل منهما .

2 ــ ليكن $x = \frac{P}{Q}$ حل ناطق للمعادلة (1)

برهن أن إذا كان P و Q أوليان فيما بينهما فإن P يقسم 14 و Q يقسم 78

3 ــ إستنتج عدد الأعداد الناطقة غير الصحيحة التي يمكن أن تكون حلولا للمعادلة (1) ثم أكتب من بين هذه الحلول الموجبة منها .

الحـــل ــ 23

1 ــ $x = \frac{14}{39}$ حل للمعادلة (1) إذن : $78\left(\frac{14}{39}\right)^2 + u\left(\frac{14}{39}\right)^2 + v\left(\frac{14}{39}\right) - 14 = 0$

منه : $78(14^3) + 14^2 \times 39\,u + 14 \times 39^2\,v - 14 \times 39^3 = 0$

أي : $78 \times 14^2 + 14 \times 39\,u + 39^2 v - 39^3 = 0$

أي : $2 \times 14^2 + 14\,u + 39\,v - 39^2 = 0$

أي $14\,u + 39\,v = 39^2 - 2 \times 14^2$

منه : $14\,u + 39\,v = 1129$

2 ــ

$39 \mid 14$	$14 \mid 11$	$11 \mid 3$	$3 \mid 2$
$28 \mid 2$	$11 \mid 1$	$9 \mid 3$	$1 \mid 1$
11	3	2	

$11 = 39 - 14(2)$

$3 = 14 - 11(1)$

$2 = 11 - 3(3)$

$1 = 3 - 2(1)$ إذن : $1 = 14 - 11(1) - 11 + 3(3)$

أي $1 = 14 - 11(2) + 3(3)$

منه $1 = 14 - 2[39 - 14(2)] + 3[14 - 11(1)]$

أي $1 = 14 - 39(2) + 14(4) + 14(3) - 11(3)$

أي $1 = 14(8) - 39(2) - 3[39 - 14(2)]$

منه $1 = 14(8) - 39(2) - 39(3) + 14(6)$

أي $1 = 14(14) + 39(-5)$

منه : الثنائية المطلوبة هي $(x ; y) = (14 ; -5)$

3 ــ $14(-25) + 39(9) = -350 + 351 = 1$

إذن : فعلا الثنائية $(9 ; -25)$ حل للمعادلة $14\,u + 39\,v = 1$

نتيجة : $14(-25) + 39(9) = 1$ إذن : $14(-25 \times 1129) + 39(9 \times 1129) = 1129$

إذن : $14\,u + 39\,v = 14(-25 \times 1129) + 39(9 \times 1129)$

أي $14(u + 25 \times 1129) = 39(9 \times 1129 - v)$

منه : 39 يقسم $(u + 25 \times 1129)$ لأن 39 أولي مع 14

إذن : $u + 25 \times 1129 = 39\,k$ حيث $k \in Z$

منه : $14 \times 39\,k = 39(9 \times 1129 - v)$

أي $9 \times 1129 - v = 14\,k$

نتيجة : $\left.\begin{matrix} u + 25 \times 1129 = 39\,k \\ 9 \times 1129 - v = 14\,k \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} u = 39\,k - 25 \times 1129 \\ v = 9 \times 1129 - 14\,k \end{matrix}\right\}$

5 ــ u عدد طبيعي إذا و فقط إذا كان $u \geq 0$ لأن $u \in Z$

إذن : $39\,k - 25 \times 1129 \geq 0$

أي $k \geq \frac{25 \times 1129}{39}$

أي $k \geq 723{,}71$

منه : $k \geq 724$ لأن k عدد صحيح .

إذن : يكون u أصغر ما يمكن إذا و فقط إذا كان $k = 724$

في هذه الحالة : $\begin{cases} u = 39(724) - 25 \times 1129 = 11 \\ v = 9 \times 1129 - 14(724) = 25 \end{cases}$ منه : $(u : v) = (11 : 25)$

الجزء II

1 –

78	2
39	3
13	13
1	

14	2
7	7
1	

قواسم 78 هي $\{1 : 13 : 3 : 39 : 2 : 26 : 6 : 78\}$

قواسم 17 هي $\{1 : 2 : 7 : 14\}$

2 – $\frac{P}{Q}$ حل للمعادلة (1) إذن : $78\left(\frac{P}{Q}\right)^3 + u\left(\frac{P}{Q}\right)^2 + v\left(\frac{P}{Q}\right) - 14 = 0$

منه $78 \times P^3 + u \times P^2 \times Q + v \times P \times Q^2 - 14\,Q^3 = 0$

منه : $u \times P^2 \times Q + v \times P \times Q^2 = 14\,Q^3 - 78\,P^3$

منه $P\,Q(u\,P + v\,Q) = 14\,Q^3 - 78\,p^3$

إذن $u\,P + v\,Q = \frac{14\,Q^3 - 78\,P^3}{P\,Q}$

أي $u\,P + v\,Q = \frac{14}{P}\,Q^2 - \frac{78}{Q}\,P^2$

بما أن $u\,P + v\,Q$ عدد صحيح فإن $\frac{14}{P}\,Q^2 - \frac{78}{Q}\,P^2$ عدد صحيح .

أي Q يقسم 78 و P يقسم 14 و هو المطلوب . (لأن P و Q أوليان فيما بينهما)

3 – Q يقسم 78 و عدد قواسم 78 الموجبة هو 8

P يقسم 14 و عدد قواسم 14 الموجبة هو 4

إذن : يمكن إختيار العدد P Q بـ 20 طريقة مختلفة حيث P و Q أوليان فيما بينهما . و باعتبار الأعداد الناطقة السالبة يكفي ضرب هذه الأعداد في (1 -)

إذن : عدد الأعداد الناطقة غير الصحيحة التي يمكن أن تكون حلا للمعادلة (1) هو 40

و الموجبة منها هي : $\left\{\frac{1}{13}, \frac{1}{3}, \frac{1}{39}, \frac{1}{2}, \frac{1}{26}, \frac{1}{6}, \frac{1}{78}, \frac{1}{13}, \frac{2}{39}, \frac{2}{3}, \frac{2}{13}, \frac{7}{3}, \frac{7}{39}, \frac{7}{2}, \frac{7}{26}\right.$

$\left.\frac{14}{39}, \frac{14}{3}, \frac{14}{13}, \frac{7}{78}, \frac{7}{6}\right\}$

التمرين – 24

1 – أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن العددان $14\,n + 3$ و $5\,n + 1$ أوليان فيما بينهما .

2 – إستنتج أن 87 و 31 أوليان فيما بينهما .

3 – عين حلا $(u ; v)$ للمعادلة $87\,u + 31\,v = 1$ ثم إستنتج حلا $(x ; y)$ للمعادلة $87\,x + 31\,y = 2$

الحـل – 24

1 – من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$5(14\,n + 3) - 14(5\,n + 1) = 70\,n + 15 - 70\,n - 14 = 1$

إذن : حسب بيزو فإن العددان $14\,n + 3$ و $5\,n + 1$ أوليان فيما بينهما

2 – من أجل $n = 6$ لدينا $\begin{cases} 14\,n + 3 = 84 + 3 = 87 \\ 5\,n + 1 = 30 + 1 = 31 \end{cases}$

إذن : 87 و 31 أوليان فيما بينهما .

3 – لدينا : $87(5) - 31(-14) = 435 - 434 = 1$

إذن : الثنائية $(14 - ; 5)$ هي حل للمعادلة $87\,u - 31\,v = 1$

4 – $87(5) - 31(-14) = 1$ إذن : $87(10) - 31(-28) = 2$

منه : الثنائية $(28 - ; 10)$ هي حل للمعادلة $87\,x + 31\,y = 2$

ملاحظة : يمكن البحث عن حل خاص للمعادلة $87\,u - 31\,v = 1$ باستعمال خوارزمية إقليدس كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 25 & 6 \\ \hline \boxed{1} & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 31 & 25 \\ \hline 25 & 1 \\ \hline 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 87 & 31 \\ \hline 62 & 2 \\ \hline 25 & \end{array}$$

(1) ..... $25 = 87 - 31(2)$

(2) ..... $6 = 31 - 25(1)$

(3) ..... $1 = 25 - 6(4)$

نعوض (1) و (2) في (3) فنحصل على :

$$1 = 87 - 31(2) - 4[31 - 25(1)]$$

أي : $1 = 87 - 31(6) + 25(4)$ ..... (4)

نعوض (1) في (4) $1 = 87 - 31(6) + 4[87 - 31(2)]$

أي : $1 = 87(5) + 31(-14)$

نتيجة : الثنائية $(-14 ; 5)$ حل خاص للمعادلة $87u + 31v = 1$

الفهرس

المحـــور	الصفحـــة
المحـــور 1 : **الأعداد المركبة**	**1**
حلول تمـــاريـــن الكتاب المدرسي	**11**
حلول لتمـــاريـــن نماذج للبكلوريا	**55**
المحـــور 2 : **التشابه المباشر**	**83**
حلول تمـــاريـــن الكتاب المدرسي	**86**
حلول لتمـــاريـــن نماذج للبكلوريا	**106**
المحـــور 3 : **المقاطع المستوية للسطوح**	**131**
حلول تمـــاريـــن الكتاب المدرسي	**137**
المحـــور 4 : **الأعداد الأولية**	**162**
حلول تمـــاريـــن الكتاب المدرسي	**166**
حلول لتمـــاريـــن نماذج للبكلوريا	**192**

سلسلة هبـــاج

TEL : 0773 26 52 81