تمارين للتعمق :

4- نهاية دالة مركبة – النهايات بالمقارنة :

حل التمرين 91 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال نهاية مركب دالتين :

(1 $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{x-1}{2x-4}}\right]$:

نضع $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{2x-4}}$ ، وَ $X=\frac{x-1}{2x-4}$ ، و منه $f(x)=\sqrt{X}$

إذن لدينا $\lim_{x\to+\infty} X=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{2x}\right]=\frac{1}{2}$ ، ومنه $\lim_{X\to\frac{1}{2}} f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{x-1}{2x-4}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(2 $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}\right]$:

نضع $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$ ، وَ $X=\frac{x}{x^2-1}$ ، و منه $f(x)=\sqrt{X}$

إذن لدينا $\lim_{x\to+\infty} X=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$ ، ومنه $\lim_{X\to0} f(x)=\sqrt{0}=0$

إذن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}\right]=0$.

(3 $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{9x^2-x+3}\right]$:

نضع $f(x)=\sqrt{9x^2-x+3}$ ، وَ $X=9x^2-x+3$ ، و منه $f(x)=\sqrt{X}$

إذن لدينا $\lim_{x\to-\infty} X=\lim_{x\to-\infty}\left[9x^2\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\right]=+\infty$ ، ومنه $\lim_{X\to+\infty} f(x)=\sqrt{+\infty}=+\infty$

إذن: $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{9x^2-x+3}\right]=+\infty$.

(4 $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]$:

نضع $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ، وَ $X=\sqrt{x}$ ، و منه $f(x)=\frac{1+X}{X}$

إذن لدينا $\lim_{x\to+\infty} X=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\right]=\sqrt{+\infty}=+\infty$ ، ومنه $\lim_{X\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to+\infty}\left[\frac{1+X}{X}\right]=\lim_{X\to+\infty}\left[\frac{X}{X}\right]=1$

إذن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]=1$.

حل التمرين 92 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال نهاية مركب دالتين :

1) $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$:

نضع $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ، وَ $g(x)=\frac{1}{x}$ ، و منه $f(x)=\cos(g(x))$

إذن لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\cos 0=1$

إذن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]=1$.

2) $\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\right]$:

نضع $f(x)=\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$ ، وَ $g(x)=x-\pi$ ، و منه $f(x)=\frac{\sin(g(x))}{g(x)}$

نعلم أنّ $\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin(g(x))}{g(x)}\right]=1$ ، ومنه $\lim_{x\to\pi} f(x)=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\right]=1$

إذن: $\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\right]=1$.

3) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right)\right]$:

نضع $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right)$ ، وَ $g(x)=\frac{\pi x+3}{1+x}$ ، و منه $f(x)=\sin(g(x))$

إذن لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\pi x}{x}\right]=\pi$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sin\pi=0$

إذن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right)\right]=0$.

4) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi x+1}{2x}\right)\right]$:

نضع $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x+1}{2x}\right)$ ، وَ $g(x)=\frac{\pi x+1}{2x}$ ، و منه $f(x)=\sin(g(x))$

إذن لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\pi x}{2x}\right]=\frac{\pi}{2}$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

إذن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi x+1}{2x}\right)\right]=1$.

5) $\lim_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\tan x}{\tan^2 x+1}\right]$:

نضع $f(x)=\frac{\tan x}{\tan^2 x+1}$ ، وَ $g(x)=\tan x$ ، و منه $f(x)=\frac{g(x)}{(g(x))^2+1}$

إذن لدينا $\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = +\infty$ ، ومنه

$$\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[\frac{g(x)}{(g(x))^2+1}\right] = \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{g(x)}\right] = \frac{1}{+\infty} = 0$$

إذن: $\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\tan x}{\tan^2 x+1}\right] = 0$.

6) $\lim_{x \to 0} \left[\cos\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \times 2\pi\right)\right]$:

نضع $f(x) = \cos\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \times 2\pi\right)$ ، و $g(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} \times 2\pi$ ، و منه $f(x) = \cos(g(x))$

إذن لدينا $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1-\cos x}{x^2} \times 2\pi\right] = 0$ ، ومنه $\lim_{x \to 0} f(x) = \cos 0 = 1$

إذن: $\lim_{x \to 0} \left[\cos\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \times 2\pi\right)\right] = 1$.

حل التمرين 93 ص34 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$:

1) إثبات أنه إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{1}{\sqrt{2x}} > \frac{1}{\sqrt{x+1}}$:

لدينا $x > 1$ ، ومنه و بإضافة x إلى طرفي المتباينة نجد $2x > x+1$ ، وبجذر الطرفين نجد $\sqrt{2x} > \sqrt{x+1}$ ، وبقلب المتباينة نجد $\frac{1}{\sqrt{x+1}} < \frac{1}{\sqrt{2x}}$ ، أي أن $\frac{1}{\sqrt{2x}} > \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

إذن: لمّا $x > 1$ فإن $\frac{1}{\sqrt{2x}} > \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

2) استنتاج $\lim_{x \to +\infty} f(x)$:

لدينا من أجل $x > 1$ فإن $\frac{1}{\sqrt{2x}} > \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ، وبضرب طرفي المتباينة في العدد $2x$ نجد :

$\frac{2x}{\sqrt{2x}} > \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$ ، أي أنّ $f(x) > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$ لمّا $x > 1$.

لدينا $\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{2x}\right] = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x\sqrt{2x}}{2x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x}{\sqrt{2x}} \times \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x}{\sqrt{2x}}\right]$.

ومنه و حسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

حل التمرين 94 ص34 ج1 :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ فإن $0 \le \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

لدينا $\sqrt{x+1} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \frac{2(\sqrt{x})^2-1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، ومنه $\sqrt{x+1} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x}} \ge 0$

من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$

أي أنّ $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\geq 0$ ومنه $0\leq\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) استنتاج $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$:

لدينا من أجل كل $x>0$ ، $0\leq\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]=0$.

ومنه و حسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=0$.

حل التمرين 95 ص34 ج1 :

- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $-2\leq\cos x+\sin x\leq 2$:

نعلم أن $\begin{cases}-1\leq\sin x\leq 1..............(1)\\-1\leq\cos x\leq 1..............(2)\end{cases}$ ، وبجمع (1) وَ (2) نجد $-1-1\leq\cos x+\sin x\leq 1+1$

إذن: $-2\leq\cos x+\sin x\leq 2$

- استنتاج $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos x+\sin x}{x^2}\right]$:

لدينا $-2\leq\cos x+\sin x\leq 2$ ، بضرب أطراف المتباينة في $\frac{1}{x^2}$ نجد $\frac{-2}{x^2}\leq\frac{\cos x+\sin x}{x^2}\leq\frac{2}{x^2}$

- بما أنّ $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x^2}\right]=0$ فإنه حسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos x+\sin x}{x^2}\right]=0$.

حل التمرين 96 ص35 ج1 :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ فإن $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$:

لدينا $x\geq 1$ هذا معناه $\left.\begin{matrix}x-1\geq 0\\x+1>0\end{matrix}\right\}$ ، و لدينا $\frac{x-1}{2(x+1)}=\frac{2x-x-1}{2(x+1)}=\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}$ ، ومنه $\frac{x-1}{2(x+1)}\geq 0$

أي أنّ $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\geq 0$ ومنه $\frac{x}{x+1}\geq\frac{1}{2}$...................$(1)$.

ولدينا كذلك $\frac{-1}{x+1}=\frac{x-x-1}{x+1}=\frac{x}{x+1}-1$ وَ $x+1>0$ ، أي أنّ $\frac{-1}{x+1}<0$ ومنه $\frac{-1}{x+1}<1$........(2)

من (1) وَ (2) نستنتج أنّ $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$.

2) استنتاج النهايتين التاليتين :

أ) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\right]$:

لدينا $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد $\sqrt{x}$ نجد $\frac{\sqrt{x}}{2}\leq\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\leq\sqrt{x}$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\right]=+\infty$ ، ومنه و حسب نظرية الحصر فإن

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\right]=+\infty$.

ب) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}\right]$:

لدينا $\frac{1}{2}\le\frac{x}{x+1}\le 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد $\frac{1}{\sqrt{x}}$ نجد $\frac{1}{2\sqrt{x}}\le\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]=0$ ، ومنه و حسب نظرية الحصر فإن

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}\right]=0$.

حل التمرين 97 ص35 ج1 :

حساب النهايتين التاليتين باستعمال نهاية حصر دالتين :

- $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2+4(-1)^x}{x}\right]$:

لدينا $|1|=(-1)^x$ ، ومنه $(-1)^x\ge-1$ ، وبضرب طرفي المتباينة في العدد 4 نجد $4(-1)^x\ge-4$

وبإضافة 2 إلى طرفي المتباينة نجد $2+4(-1)^x\ge-2$ ، وبضربها مرة أخرى في العدد $\frac{1}{x}$ نجد

$$\frac{2+4(-1)^x}{x}\ge\frac{-2}{x}$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2}{x}\right]=0$ ، ومنه وحسب نظرية الحصر فإن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2+4(-1)^x}{x}\right]=0$.

- $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x+\cos x}{x-1}\right]$:

نعلم أن $-1\le\cos x\le 1$ ، بإضافة $3x$ إلى أطراف المتباينة نجد $3x-1\le 3x+\cos x\le 1+3x$ ،

وبضرب أطراف المتباينة في العدد $\frac{1}{x-1}$ نجد $\frac{3x-1}{x-1}\le\frac{3x+\cos x}{x-1}\le\frac{1+3x}{x-1}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+3x}{x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x-1}{x-1}\right]=3$ ، ومنه وحسب نظرية الحصر فإن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x+\cos x}{x-1}\right]=3$.

حل التمرين 98 ص35 ج1 :

- المقارنة بين $\sqrt{4x^2+5}$ وَ $2x$ من أجل كل $x>0$:

لدينا من أجل كل $x>0$ ، $\sqrt{4x^2+5}-2x>0$ ، وبإضافة العدد $2x$ إلى طرفي المتباينة نجد

$\sqrt{4x^2+5}-2x+2x>2x$ ، ومنه $\sqrt{4x^2+5}>2x$.

إذن : $\sqrt{4x^2+5}$ أكبر تمامًا من $2x$.

- استنتاج $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+5}-x\right]$:

لدينا $\sqrt{4x^2+5}>2x$ ، ومنه وبإضافة العدد $-x$ إلى طرفي المتباينة نجد $\sqrt{4x^2+5}-x>x$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}[x]=+\infty$ ، ومنه وحسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+5}-x\right]=+\infty$.

حل التمرين 99 ص35 ج1 :

- المقارنة بين $\sqrt{2x^2-1}$ وَ $2x$ من أجل كل $x>1$:

لدينا من أجل كل $x>1$ ، $\sqrt{2x^2-1}-2x<0$ ، وبإضافة العدد $2x$ إلى طرفي المتباينة نجد $\sqrt{2x^2-1}-2x+2x<2x$ ، ومنه $\sqrt{2x^2-1}<2x$.

إذن : $\sqrt{2x^2-1}$ أصغر تمامًا من $2x$.

- استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2-1}-3x\right]$:

لدينا $\sqrt{2x^2-1}<2x$ ، ومنه وبإضافة العدد $-3x$ إلى طرفي المتباينة نجد $\sqrt{2x^2-1}-3x<-x$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[-x]=-\infty$ ، ومنه وحسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2-1}-3x\right]=-\infty$.

حل التمرين 100 ص35 ج1 :

- المقارنة بين $\sqrt{2x^2+x+1}$ وَ $x\sqrt{2}$ من أجل كل $x>0$:

لدينا من أجل كل $x>0$ ، $\sqrt{2x^2+x+1}-x\sqrt{2}>0$ ، وبإضافة العدد $x\sqrt{2}$ إلى طرفي المتباينة نجد $\sqrt{2x^2+x+1}-x\sqrt{2}+x\sqrt{2}>x\sqrt{2}$ ، ومنه $\sqrt{2x^2+x+1}>x\sqrt{2}$.

إذن : $\sqrt{2x^2+x+1}$ أكبر تمامًا من $x\sqrt{2}$.

- استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2+x+1}-x\right]$:

لدينا $\sqrt{2x^2+x+1}>x\sqrt{2}$ ، ومنه وبإضافة العدد $-x$ إلى طرفي المتباينة نجد

$$\sqrt{2x^2+x+1}-x>x\sqrt{2}-x$$

ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{2}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{2}-x\times\frac{x\sqrt{2}+x}{x\sqrt{2}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-x^2}{x\sqrt{2}+x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x\sqrt{2}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x(x)}{x\left(\sqrt{2}+1\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{2}+1}\right]=+\infty$$

ومنه وحسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2+x+1}-x\right]=+\infty$.

حل التمرين 101 ص35 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$:

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$:

الدالة f معرفة من أجل $x-\sqrt{x^2+1}\neq0$ ، ومنه $D_f=\mathbb{R}$ لأنه من أجل كل عدد حقيقي $x-\sqrt{x^2+1}<0$

لدينا

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}+2x=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2-x^2-1}+2x$$

$$=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+2x=2x-x-\sqrt{x^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}$$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $x-\sqrt{x^2+1}<0$ ، ومنه $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x<0$

أي أنّ $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$.

2) استنتاج أنّ $f(x)\le -4x^2$ من أجل كل $x>0$:

نعلم أنّ $-1\le \sin x\le 1$ ، ومنه وبإضافة 1 إلى أطراف المتباينة نجد $0\le 1+\sin x\le 2$ وبضرب x في أطراف المتباينة نجد $0\le x(1+\sin x)\le 2x$ حيث $x>0$.

ولدينا $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$ ومنه وبضرب المتباينتين طرف في طرف نجد $\frac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}\le -4x^2$

إذن : $f(x)\le -4x^2$

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-4x^2\right]=-\infty$ ومنه وحسب نظرية الحصر فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

تمارين للتعمق :

5- الاستمرارية :

حل التمرين 102 ص35 ج1 :

دراسة استمرارية الدالة f عند x_0 في كل حالة من الحالتين التاليتين :

1) $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x};x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ عند $x_0=0$:

لدينا $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\times\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right]$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right]=\frac{0}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{0}{2}=0$$

وجدنا أنّ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ ، و لدينا $f(0)=0$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$.

إذن: الدالة f مستمرة عند 0 .

2) $\begin{cases} f(x)=\frac{|x|}{x}\times\sqrt{|x|};x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$ عند $x_0=0$:

لدينا حالتين لنهاية $f(x)$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left[\frac{-x}{x}\sqrt{-x}\right]=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left[-\sqrt{-x}\right]=0 \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{x}{x}\sqrt{x}\right]=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\sqrt{x}\right]=0 \end{cases}$$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

وجدنا أنّ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ ، و لدينا $f(0)=2$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to0}f(x)\neq f(0)$.

إذن: الدالة f غير مستمرة عند 0 .

حل التمرين 103 ص35 ج1 :

إثبات أنّ الدالة f التالية المعرفة على $\mathbb{R}$ مستمرة على $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} & ;x>0 \\ f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-2} & ;x\le 0 \end{cases}$$

لدينا من أجل $x\in\left]0;+\infty\right[$ ، $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$ ، لنحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

نضع $g: x\mapsto -\sqrt{x+1}$ ومنه الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق عند 0 وعددها المشتق هو :
$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\sqrt{x+1}+\sqrt{1}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\sqrt{x+1}+1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}\right]$$

ولدينا $g'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ، ومنه $g'(0)=-\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=-\dfrac{1}{2}$ ، أي أن $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]=g'(0)=-\dfrac{1}{2}$

<u>إذن:</u> $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\dfrac{1}{2}$

و لدينا من أجل $x\in\left]-\infty;0\right]$ ، $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-2}$:
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-x^2}{x-2}\right]=\frac{1-0}{0-2}=-\frac{1}{2}$$

عن موقع www.eddirasa.com

البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

وجدنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ في كلتا الحالتين ، و لدينا $f(0)=-\dfrac{1}{2}$

<u>إذن:</u> الدالة f مستمرة عند 0 ، أي أنها مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 104 ص35 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} & ;x\ne 0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}$$

تعيين قيمة العدد α حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$:

لدينا
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x}\times\frac{x+2+\sqrt{4+x^2}}{x+2+\sqrt{4+x^2}}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(x+2)^2-(4+x^2)}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+4x+4-(4+x^2)}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{4x}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{4}{x+2+\sqrt{4+x^2}}\right]$$
$$=\frac{4}{0+2+\sqrt{4+0}}=\frac{4}{4}=1$$

نعلم أنه حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ يجب أن تكون $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

ولدينا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ ، ومنه $f(0)=1$ ، أي أنّ $\alpha=1$.

حل التمرين 105 ص35 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x^2+2x-a & ;x>2 \\ f(x)=\dfrac{2x^2-a+b}{x} & ;x\le 2 \end{cases}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان :

- تعيين علاقة بين a و b حتى تكون f مستمرة عند 2 :

لدينا $f(2)=\dfrac{2(2)^2-a+b}{2}=\dfrac{8-a+b}{2}$

ولدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2}\left[\dfrac{2x^2-a+b}{x}\right]=\dfrac{2(2)^2-a+b}{2}=\dfrac{8-a+b}{2} \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2}\left[x^2-2x-a\right]=2(2)^2+2(2)-a=8-a \end{cases}$

نعلم أنه حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2 يجب أن تكون $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=f(2)$

أي أنّ : $\dfrac{8-a+b}{2}=8-a$ ، ومنه $8-a+b=16-2a$ ، يكافئ $2a-a+b=16-8$

إذن العلاقة المطلوبة بين a و b حتى تكون f مستمرة عند 2 هي : $a+b=8$.

تمارين للتعمق :

6- مبرهنة القيم المتوسطة ـ الدوال المستمرة و الرتيبة تمامًا :

حل التمرين 106 ص35 ج1 :

f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث $f(a)<ab$ ، و $f(b)>b^2$:

❖ إثبات أنه يوجد عدد حقيقي c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=bc$:

نعلم حسب مبرهنة القيم المتوسطة أنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد حقيقي c محصور بين a و b حيث $f(c)=k$، أي أنّ $a<c<b$ ، وبضرب أطراف المتراجحة في b نجد $ab<bc<b^2$ ، ومنه $f(b)<bc<f(a)$ ، أي أنّ $bc=k$

إذن: $f(c)=bc$.

هندسيًا هذه الدالة f ممثلة لمستقيم معادلته $y=bx$ في معلم متعامد و متجانس ، حيث يكون لدينا $f(a)=ab$ و $f(b)=b^2$ ، و $f(c)=bc$ حيث $c\in[a;b]$ ، هذا معناه أنّ $f(b)<f(c)<f(a)$ ومنه $ab<bc<b^2$ ، و بالقسمة على b نجد $a<c<b$ ، أي أنّ c ينتمي إلى $[a;b]$.

حل التمرين 107 ص 35 و 36 ج1 :

عن موقع www.eddirasa.com

البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

f دالة مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث $f(0)=0$ ، و $f(1)=1$:

❖ إثبات أنه يوجد عدد حقيقي c من $]0;1[$ بحيث $f(c)=\dfrac{1-c}{1+c}$:

نعلم حسب مبرهنة القيم المتوسطة أنه مْن أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(0)$ و $f(1)$ فإنه يوجد عدد حقيقي c محصور بين 0 و 1 حيث $f(c)=k$، أي أنّ $0<c<1$ ، وبضرب أطراف المتراجحة في -1 نجد $0>-c>-1$ ، ومنه وبإضافة العدد1 إلى أطراف المتباينة نجد $1>1-c>0$

و بضرب المتباينة مرة أخرى في العدد الموجب $\frac{1}{1+c}$ نجد $0<\frac{1-c}{1+c}<\frac{1}{1+c}$ ، أي أنّ

$f(0)<\frac{1-c}{1+c}<f\left(\frac{1}{1+c}\right)$ ، ولدينا $f\left(\frac{1}{1+c}\right)<f(1)$ ، ومنه $f(0)<\frac{1-c}{1+c}<f(1)$ ، أي أنّ $k=\frac{1-c}{1+c}$

إذن: $f(c)=\frac{1-c}{1+c}$.

حل التمرين 108 ص36 ج1 :

f دالة مستمرة على المجال $I=[0;1]$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $f(x)\in I$:

❖ إثبات أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α من I بحيث $f(\alpha)=\alpha$:

نضع دالة g معرفة و مستمرة على I ، حيث $g(x)=f(x)-x$ ، و منه لدينا

$g(0)=f(0)-0=f(0)$..............(1) ، و $g(1)=f(1)-1$...............(2)

نعلم أنّ $f(x)\in I$ ، ومنه $0\le f(x)\le 1$ أي أنّ $0\le f(0)\le 1$ و $0\le f(1)\le 1$

بالتعويض بما لدينا في المعادلة (1) نجد $0\le f(0)$ ، ومنه $f(0)\ge 0$ ، أي أن $g(0)\ge 0$

و بالتعويض بما لدينا في المعادلة (2) نجد $f(1)-1\le 0$ ، ومنه $g(1)\le 0$

بما أنّ الدالة g مستمرة على المجال $[0;1]$ ، و $g(0)\times g(1)\le 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ،

يوجد على الأقل عدد حقيقي α من $[0;1]$ ، حيث $f(\alpha)=0$ ، ومنه $f(\alpha)-\alpha=0$

إذن : $f(\alpha)=\alpha$.

حل التمرين 109 ص36 ج1 :

1) التخمين : من الشكل المعطى يمكن التخمين بأنه يوجد حل وحيد للمعادلة $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ ،

لأن على المجال $I=[-\pi;0]$ يوجد تقاطع وحيد للمنحنى (C) الممثل للدالة $x\mapsto\cos x$ و المستقيم

(D) الممثل للدالة $x\mapsto-\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

2) f دالة معرفة على المجال $I=[-\pi;0]$ كما يلي: $f(x)=\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x$:

أ) التحقق من أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق على I :

الدالة f هي دالة مركبة من دالتين قابلتين للاشتقاق على $I=[-\pi;0]$ ، وهما $x\mapsto\cos x$ ، و

$x\mapsto\frac{\sqrt{3}}{2}x$ ، أي أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق على I ودالتها المشتقة هي $f'(x)=-\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ب) جدول تغيرات الدالة f :

لدينا من أجل كل x من المجال $[-\pi;0]$ الدالة المشتقة $f'(x)\ge 0$ ، لأنّ $\sin x\le 0$ على هذا المجال

ومنه $-\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\ge 0$ ، أي أنّ $\sin x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، وهذا محقق من أجل كل x من المجال $[-\pi;0]$

أي أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-\pi;0]$ ، ومنه جدول التغيرات :

x	$-\pi$	0
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-1-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↗	1

3) الاستنتاج :

من جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-\pi;0]$ لدينا $f(-\pi)\times f(0)<0$

ونعلم كذلك أنّ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-\pi;0]$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-\pi;0]$.

$f(x)=0$ معناه $\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x=0$ ، ومنه $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$

إذن: نستنتج أنّ المعادلة $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $I=[-\pi;0]$.

حل التمرين 110 ص36 ج1 :

n عدد طبيعي غير معدوم :

1) إثبات أنّ المعادلة $x^{n+1}-2x^{n}+1=0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2 :

نضع دالة f حيث $f(x)=x^{n+1}-2x^{n}+1$ و $D_f=\mathbb{R}$

ومنه لدينا الدالة المشتقة هي : $f'(x)=(n+1)x^{n}-2nx^{n-1}$ ، أي $f'(x)=x^{n-1}[(n+1)x-2n]$

إذن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $(n+1)x-2n$ لأنّ $x^{n-1}>0$ من أجل كل $x>0$

أي أنّ $f'(x)>0$ على المجال $\left]\frac{2n}{n+1};2\right]$. ومنه الدالة f متزايدة تماما على هذا المجال .

ومنه جدول التغيرات :

x	1 $\quad\quad$ $\frac{2n}{n+1}$ $\quad\quad$ 2
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	0 $\searrow$ $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ $\nearrow$ 1

من جدول التغيرات لدينا $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)\times f(2)<0$ ، لأنه $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)<0$ من أجل كل $x\in\left[1;\frac{2n}{n+1}\right]$

ونعلم كذلك أنّ الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{2n}{n+1};2\right]$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2

إذن: المعادلة $x^{n+1}-2x^{n}+1=0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2

2) إثبات أنّ المعادلة $x^{8}-2x^{7}+1=0$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$:

يمكننا كتابة المعادلة $x^{8}-2x^{7}+1=0$ على الشكل $x^{7+1}-2x^{7}+1=0$ ، ومنه فهذه المعادلة حالة خاصة من معادلة السؤال رقم 1) ، حيث هنا $n=7$

إذن: نعم المعادلة $x^{8}-2x^{7}+1=0$

تقبل حلا في $\mathbb{R}$ ، يكون هذا الحل

محصور في المجال $\left[\frac{2n}{n+1};2\right]$

أي محصور بين $\frac{14}{8}$ و 2 .