تمارين للتعمق :

3- تتمات على النهايات :

حل التمرين 81 ص33 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{-1;4\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x^2-3x-4}$:

1) إيجاد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b ، وَ c حيث من أجل كل x من D : $f(x)=a+\dfrac{b}{(x+1)}+\dfrac{c}{(x-4)}$

لدينا $f(x)=a+\dfrac{b}{(x+1)}+\dfrac{c}{(x-4)}=\dfrac{a\left[(x+1)(x-4)\right]+b(x-4)+c(x+1)}{(x+1)(x-4)}$

$$=\frac{ax^2 3ax-4a+bx-4b+cx+c}{x^2-3x-4}=\frac{ax^2+(b+c-3a)x-4a-4b+c}{x^2-3x-4}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x^2-3x-4}$ من أجل كل x من $D_f=\mathbb{R}-\{-1;4\}$ نجد

$\begin{cases}a=3\\b+c-3a=2\\-4a-4b+c=0\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}b+c=2+9=11.....(1)\\-4b+c=12.....(2)\end{cases}$

بطرح المعادلة (2) من (1) نجد : $b+c-(-4b+c)=11-12$ ، ومنه $5b=-1$ أي أن $b=-\dfrac{1}{5}$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد $-\dfrac{1}{5}+c=11$ ومنه $c=\dfrac{1}{5}+11$ أي أن $c=\dfrac{56}{5}$

إذن: $a=3$ ، $b=-\dfrac{1}{5}$ ، وَ $c=\dfrac{56}{5}$. أي أن $f(x)=3-\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}$

2) دراسة نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف :

لدينا $D_f=\mathbb{R}-\{-1;4\}=]-\infty;-1[\cup]-1;4[\cup]4;+\infty[$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[3-\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=3$ ، لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=0$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\left[3-\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=3-\dfrac{\frac{1}{5}}{0^-}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(-1-4)}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left[3-\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=3-\dfrac{\frac{1}{5}}{0^+}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(-1-4)}=+\infty$.

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 4} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 4}\left[3-\frac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\frac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right] = 3-\frac{\frac{1}{5}}{(4+1)}+\frac{\frac{56}{5}}{0^-} = -\infty \ .$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 4} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 4}\left[3-\frac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\frac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right] = 3-\frac{\frac{1}{5}}{(4+1)}+\frac{\frac{56}{5}}{0^+} = +\infty \ .$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[3-\frac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\frac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right] = 3$ ، لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{1}{5}}{(x+1)}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right] = 0$.

حل التمرين 82 ص33 ج1 :

تعيين في كل حالة من الحالات التالية مجموعة تعريف الدالة f ثم حساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف :

1) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، المقام $x^2+2x-3 \neq 0$ ومنه $(x+3)(x-1) \neq 0$ أي أن $x+3 \neq 0$ ومنه $x \neq -3$ ، وَ $x-1 \neq 0$ ومنه $x \neq 1$.

إذن: $D_f = \mathbb{R}-\{-3;1\} =]-\infty;-3[\cup]-3;1[\cup]1;+\infty[$.

- حساب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = 0$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -3} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} -3}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \frac{-2}{0^+} = -\infty \ .$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -3} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -3}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \frac{-2}{0^-} = +\infty \ .$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \frac{2}{0^-} = -\infty \ .$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \frac{2}{0^+} = +\infty \ .$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = 0 \ .$$

2) $f(x) = \frac{3x}{(x+1)^2}$:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، المقام $(x+1)^2 > 0$ أي أن $D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

- حساب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x}{(x+1)^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x}{x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3}{x}\right] = 0 \ .$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{(x+1)^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x}\right] = 0 \ .$$

عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

3) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، المقام $x^2+x-2\neq 0$ ومنه $(x-1)(x+2)\neq 0$ أي أن $x-1\neq 0$ ومنه $x\neq 1$ ، وَ $x+2\neq 0$ ومنه $x\neq -2$ ، ولدينا في البسط $x^2+x+1\in\mathbb{R}$

إذن: $D_f=\mathbb{R}-\{-2;1\}=]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$.

- حساب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^2}{x^2}\right]=1$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\left[\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\left[\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\dfrac{3}{0^-}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left[\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\dfrac{3}{0^-}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left[\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2}{x^2}\right]=1$.

عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

5) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}$:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، المقام $x-1\neq 0$ ومنه $x\neq 1$ وَ $x^2-4\neq 0$ ومنه $x^2\neq 4$ أي أن $x\neq -2$ وَ $x\neq 2$

إذن: $D_f=\mathbb{R}-\{-2;1;2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[$.

- حساب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}\right]=0-0=0$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\left[\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}\right]=\dfrac{2}{-3}-\dfrac{1}{0^+}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\left[\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}\right]=\dfrac{2}{-3}-\dfrac{1}{0^-}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left[\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}\right]=\dfrac{2}{0^-}-\dfrac{1}{-3}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left[\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}\right]=\dfrac{2}{0^+}-\dfrac{1}{-3}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\left[\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}\right]=\dfrac{2}{1}-\dfrac{1}{0^-}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\left[\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}\right]=\dfrac{2}{1}-\dfrac{1}{0^+}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}\right]=0-0=0$.

عن موقع www.fanit-mehdi.com

6) $f(x)=\dfrac{(x+2)^3-8}{x}$:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، المقام $x\neq 0$ ومنه $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

- حساب النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x+2)^3-8}{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{(x+2)^3-8}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{(x+2)^3-2^3}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{((x+2)-2)\left((x+2)^2+2(x+2)+4\right)}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{x\left(x^2+4x+4+2x+4+4\right)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{x\left(x^2+6x+12\right)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[x^2+6x+12\right]$$

$$=12$$

قاعدة : ----------

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

حل التمرين 83 ص33 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال المرافق :

عن موقع www.eddirasa.com

البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

- $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\times\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right]=\frac{2}{+\infty}=0$$

- $\lim_{x\to0}\left[\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]$:

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}{x\sqrt{x+1}+1}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{x+1-1}{x\sqrt{x+1}+1}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{x}{x\sqrt{x+1}+1}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right]=+\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty}\left[x^2-\sqrt{x+2}\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2-\sqrt{x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2-\sqrt{x+2}\times\frac{x^2+\sqrt{x+2}}{x^2+\sqrt{x+2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^4-x+2}{x^2+\sqrt{x+2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^4}{x^2}\right]$$

عن موقع www.fanit-mehdi.com

$$= \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

- $\lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2+x+1}+x \right]$:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2+x+1}+x \right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2+x+1}+x \times \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}-x} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}-x} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

- $\lim_{x \to -\infty} \left[x+\sqrt{x^2+3} \right]$:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[x+\sqrt{x^2+3} \right] = \lim_{x \to -\infty} \left[x+\sqrt{x^2+3} \times \left(\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{x-\sqrt{x^2+3}} \right) \right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x^2-x^2+3}{x-\sqrt{x^2+3}} \right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{3}{x-\sqrt{x^2+3}} \right] = \frac{3}{(-\infty)-(+\infty)} = \frac{3}{-\infty} = 0$$

عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

- $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b} \right]$ ، حيث $a>0$ ، وَ $b>0$:

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b} \times \frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\sqrt{x^2+b^2}+a} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{x^2+a^2-a^2}{\left(\sqrt{x^2+b^2}-b\right)\left(\sqrt{x^2+b^2}+a\right)} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+b^2}-b\right)\left(\sqrt{x^2+b^2}+a\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2+b^2+a\sqrt{x^2+b^2}-b\sqrt{x^2+b^2}-ba}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{b^2}{x^2}+\frac{(a-b)\sqrt{x^2+b^2}}{x^2}-\frac{ba}{x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\frac{b^2}{x^2}+\frac{(a-b)\sqrt{x^2+b^2}}{x^2}-\frac{ba}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} 1+\frac{x^2}{b^2}+\frac{x^2}{(a-b)\sqrt{x^2+b^2}}-\frac{x^2}{ba} = 1+0+0-0 = 1$$

حل التمرين 84 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال تعريف العدد المشتق :

- $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \right]$:

نضع دالة f حيث $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ ، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق هو

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1}}{x} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \right]$$

عن موقع www.fanit-mehdi.com

ولدينا $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ، ومنه $f'(0)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$ ، أي أن $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]=f'(0)=\frac{1}{2}$.

- $\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto\sqrt{x^2+1}$ ، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 1 و عددها المشتق هو :

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right]\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ومنه $f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ومنه $\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\right]=f'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto\sqrt{x^2+2x}$ ، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+2x}-0}{x-0}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}=\frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ ، ومنه $f'(0)=\frac{0+1}{\sqrt{0^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$

إذن : $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right]=f'(0)=1$

- $\lim_{x\to 3}\left[\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto x\sqrt{x+1}-6$ ، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 3 و عددها المشتق هو :

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\left[\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right]=\lim_{x\to 3}\left[\frac{x\sqrt{x+1}-6-0}{x-3}\right]=\lim_{x\to 3}\left[\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$ ، ومنه $f'(3)=\frac{3(3)+2}{2\sqrt{3+1}}=\frac{11}{4}$

إذن: $\lim_{x\to 3}\left[\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}\right]=f'(3)=\frac{11}{4}$.

عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

حل التمرين 85 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال تعريف العدد المشتق :

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto\sin x$ ، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق هو :

$$f'(0)=\lim_{x\to 3}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x-\sin(0)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x-0}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

عن موقع www.fanit-mehdi.com

ولدينا $f'(x)=\cos x$ ، ومنه $f'(0)=\cos(0)=1$ ، إذن: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)=1$.

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto 1-\cos x$ ، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق هو :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x-(1-\cos(0))}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\cos x+1}{x}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\sin x$ ، ومنه $f'(0)=\sin(0)=0$ ، إذن: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x}\right]=f'(0)=0$.

عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto \cos x$ ، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند $\frac{\pi}{2}$ و عددها المشتق هو :

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\right]=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\right]=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right]$$

ولدينا $f'(x)=-\sin x$ ، ومنه $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ ، إذن: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right]=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

حل التمرين 86 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال النهايتين $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=1$ ، وَ $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right]=1$:

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x}\right]$:

لدينا $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[3\frac{\sin x}{x}\right]=3\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\right)=3\times 1$ ، ومنه $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x}\right]=3$.

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan 3x}{x}\right]$:

لدينا $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan 3x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[3\frac{\tan x}{x}\right]=3\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right]\right)=3\times 1$ ، ومنه $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan 3x}{x}\right]=3$.

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{2x}\right]$:

لدينا $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{2x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{2}\times\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{3}{2}\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\right)=\frac{3}{2}\times 1$ ، ومنه $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{2x}\right]=\frac{3}{2}$.

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{4x}\right]$:

لدينا $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{4x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{4}\times\frac{\tan x}{x}\right]=\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right]\right)=\frac{1}{4}\times 1$ ، ومنه $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{4x}\right]=\frac{1}{4}$.

عن موقع www.fanit-mehdi.com

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin ax}{bx}\right]$:

لدينا $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin ax}{bx}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{b}\times\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{a}{b}\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\right)=\frac{a}{b}\times 1$ ، ومنه $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin ax}{bx}\right]=\frac{a}{b}$.

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan ax}{bx}\right]$:

لدينا $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan ax}{bx}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{a}{b}\times\frac{\tan x}{x}\right]=\frac{a}{b}\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right]\right)=\frac{a}{b}\times 1$ ، ومنه $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan ax}{bx}\right]=\frac{a}{b}$.

حل التمرين 87 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to -1}\left[\frac{\sqrt{1-8x}-3}{x+1}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto\sqrt{1-8x}$ ، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند -1 و عددها المشتق هو : $f'(-1)=\lim_{x\to -1}\left[\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\right]=\lim_{x\to -1}\left[\frac{\sqrt{1-8x}-\sqrt{9}}{x+1}\right]=\lim_{x\to -1}\left[\frac{\sqrt{1-8x}-3}{x+1}\right]$

ولدينا $f'(x)=\frac{-8}{2\sqrt{1-8x}}=\frac{-4}{\sqrt{1-8x}}$ ، ومنه $f'(-1)=\frac{-4}{\sqrt{1-8(-1)}}=\frac{-4}{\sqrt{9}}=-\frac{4}{3}$

إذن: $\lim_{x\to -1}\left[\frac{\sqrt{1-8x}-3}{x+1}\right]=f'(-1)=-\frac{4}{3}$.

عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

2) $\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto\sqrt{x^2-9}$ ، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 3 و عددها المشتق هو : $f'(3)=\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right]=\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{9-9}}{x-3}\right]=\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}\right]$

ولدينا $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ ، ومنه $f'(3)=\frac{3}{0^+}=+\infty$

إذن: $\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}\right]=f'(3)=+\infty$.

3) $\lim_{x\to -3^-}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto\sqrt{x^2-9}$ ، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند -3 و عددها المشتق هو : $f'(-3)=\lim_{x\to -3^-}\left[\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}\right]=\lim_{x\to -3^-}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{9-9}}{x+3}\right]=\lim_{x\to -3^-}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}\right]$

ولدينا $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ ، ومنه $f'(-3)=\frac{-3}{\sqrt{x^2-9}}$

عن موقع www.fanit-mehdi.com

إذن: $\lim_{x\to -3^-}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}\right]=f'(-3)=+\infty$.

4) $\lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto\sqrt{x+1}$، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 3 و عددها المشتق هو

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\left[\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right]=\lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3+1}}{x-3}\right]=\lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ، ومنه $f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

إذن: $\lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right]=f'(3)=\frac{1}{4}$.

5) $\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right]$:

نضع دالة $g(x)=\sqrt{x}-2$ و دالة أخرى $h(x)=x^2-5x+4$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$:

أي أن: $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

لدينا العدد المشتق عند 4 للدالة $g(x)=\sqrt{x}-2$ هو:

$$g'(4)=\lim_{x\to 4}\left[\frac{g(x)-g(4)}{x-4}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2-\sqrt{4}+2}{x-4}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند 4 للدالة $h(x)=x^2-5x+4$ هو:

$$h'(4)=\lim_{x\to 4}\left[\frac{h(x)-h(4)}{x-4}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{x^2-5x+4-(4^2-5(4)+4)}{x-4}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{x^2-5x+4}{x-4}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان g وَ h قابلتان للاشتقاق عند 4 فإن : $\lim_{x\to 4}f(x)=\frac{g'(4)}{h'(4)}$ حيث $h'(4)\neq 0$.

لأنه لدينا : $\lim_{x\to 4}\left[\frac{\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}}{\frac{x^2-5x+4}{x-4}}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{\cancel{x-4}}\times\frac{\cancel{x-4}}{x^2-5x+4}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right]=\lim_{x\to 4}f(x)$.

ولدينا كذلك $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، وَ $h'(x)=2x-5$

ومنه $g'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$ وَ $h'(4)=2(4)-5=3$ ، أي أن $\lim_{x\to 4}f(x)=\frac{g'(4)}{h'(4)}=\frac{\frac{1}{4}}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$.

إذن: $\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right]=\frac{1}{12}$.

6) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}\right]$:

عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

عن موقع www.fanit-mehdi.com

نضع دالة $g(x)=x+\sqrt{x}$ و دالة أخرى $h(x)=\sqrt{x^2+x}-x$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$:

أي أن: $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}$

لدينا العدد المشتق عند 0 للدالة $g(x)=x+\sqrt{x}$ هو:

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\sqrt{x}-0-\sqrt{0}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\sqrt{x}}{x}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند 0 للدالة $h(x)=\sqrt{x^2+x}-x$ هو:

$$h'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+x}-x-\sqrt{0^2+0}-0}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان g وَ h قابلتان للاشتقاق عند 4 فإن : $\lim_{x\to 0}f(x)=\dfrac{g'(0)}{h'(0)}$ حيث $h'(0)\neq 0$.

لأنه لدينا : $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{x+\sqrt{x}}{x}\times\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}}\right]$

ولدينا كذلك $g'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ، وَ $h'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1$

ومنه $g'(0)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{0}}=1$ وَ $h'(x)=\dfrac{2(0)+1}{2\sqrt{0^2+0}}-1=-1$ ، أي أن $\lim_{x\to 0}f(x)=\dfrac{g'(0)}{h'(0)}=\dfrac{1}{-1}=-1$.

إذن: $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}\right]=-1$.

عن موقع www.eddirasa.com

البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

حل التمرين 88 ص34 ج1 :

حساب النهاية التالية باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\dfrac{\pi}{3}$ لكل من الدالتين $x\mapsto \sin 3x$ وَ $x\mapsto 2\cos x-1$:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\dfrac{\sin 3x}{2\cos x-1}\right]$:

نضع دالة $g(x)=\sin 3x$ و دالة أخرى $h(x)=2\cos x-1$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$:

أي أن: $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{2\cos x-1}$

لدينا العدد المشتق عند $\dfrac{\pi}{3}$ للدالة $g(x)=\sin 3x$ هو:

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x-\sin 3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x-\sin\pi}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x-0}{x-\frac{\pi}{3}}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند $\dfrac{\pi}{3}$ للدالة $h(x)=2\cos x-1$ هو:

عن موقع www.fanit-mehdi.com

$$h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{2\cos x-1-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-1}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{2\cos x-1-2\left(\frac{1}{2}\right)-1}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان g وَ h قابلتان للاشتقاق عند $\frac{\pi}{3}$ فإن : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\frac{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ حيث $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)\neq 0$.

لأنه لدينا : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x}{\cancel{x-\frac{\pi}{3}}}\times\frac{\cancel{x-\frac{\pi}{3}}}{2\cos x-1}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\frac{\sin 3x}{x-\frac{\pi}{3}}}{\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}}\right]$.

ولدينا كذلك $g'(x)=3\cos 3x$ وَ $h'(x)=-2\sin x$

ومنه $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\cos\pi=3(-1)=-3$ وَ $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

أي أن $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\frac{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{-3}{-\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

إذن: $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}\right]=\sqrt{3}$.

عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

حل التمرين 89 ص34 ج1 :

حساب النهاية التالية باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ لكل من الدالتين $x\mapsto\tan x$ وَ $x\mapsto 2\cos x-\sqrt{2}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}\right]:$$

نضع دالة $g(x)=\tan x-1$ و دالة أخرى $h(x)=2\cos x-\sqrt{2}$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

أي أن: $f(x)=\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$

لدينا العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ للدالة $g(x)=\tan x-1$ هو:

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1-\tan\frac{\pi}{4}+1}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1-1+1}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ للدالة $h(x)=2\cos x-\sqrt{2}$ هو:

عن موقع www.fanit-mehdi.com

$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2\cos x-\sqrt{2}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2\cos x-\sqrt{2}-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right]\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان g وَ h قابلتان للاشتقاق عند $\frac{\pi}{4}$ فإن : $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=\frac{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ حيث $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$.

لأنه لدينا : $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1}{\cancel{x-\frac{\pi}{4}}}\times\frac{\cancel{x-\frac{\pi}{4}}}{2\cos x-\sqrt{2}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}}{\frac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}}\right]$.

ولدينا كذلك $g'(x)=1+\tan^2 x$ وَ $h'(x)=-2\sin x$

ومنه $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+1^2=2$ وَ $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

أي أن $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=\frac{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2}{-\sqrt{2}}=-\frac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

إذن: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}\right]=\sqrt{2}$.

عن موقع www.eddirasa.com
البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

حل التمرين 90 ص34 ج1 :

- إثبات أنّ : $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\right]=2\sqrt{2}$:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{(\sin 2x)\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1^2-\cos^2 x}}\right]$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{(\sin 2x)\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{(\sin 2x)\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}\right]$$

لأنه $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ ، أي أن $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

ومنه نجد $=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[2\times\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\sqrt{1+\cos x}}{\frac{\sin x}{x}}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[2\times\frac{1\times\sqrt{1+\cos x}}{1}\right]$

$$=2\sqrt{1+\cos(0)}=2\sqrt{2}$$

لأن $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=1$ ، إذن : $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\right]=2\sqrt{2}$

- إثبات أنّ : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\pi-2x)\tan x\right]=2$:

نضع $Y=x-\frac{\pi}{2}$ ، ومنه $x=Y+\frac{\pi}{2}$ ، أي أنه لمّا $x\to\frac{\pi}{2}$ فإن $Y\to 0$.

عن موقع www.fanit-mehdi.com

ومنه نجد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\pi-2x)\tan x\right]=\lim_{Y\to0}\left[\left(\pi-2\left(Y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\tan\left(Y+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$=\lim_{Y\to0}\left[(-2Y)\tan Y+\tan\frac{\pi}{2}\right]=\lim_{Y\to0}\left[(-2Y)\tan Y\right]$$

ومنه $=\lim_{Y\to0}\left[\frac{-2Y}{-\tan Y}\right]=\lim_{Y\to0}\left[\frac{\frac{2Y}{Y}}{\frac{\tan Y}{Y}}\right]=\lim_{Y\to0}\left[\frac{2}{\frac{\tan Y}{Y}}\right]=2$

لأن $\lim_{Y\to0}\left[\frac{\tan Y}{Y}\right]=1$ ولمّا $x\to\frac{\pi}{2}$ فإن $Y\to0$

إذن: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\pi-2x)\tan x\right]=2$

- إثبات أنّ : $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}\right]=2$:

نضع دالة $g(x)=\sin x$ و دالة أخرى $h(x)=\sqrt{x+1}-1$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$:

أي أن: $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}$

لدينا العدد المشتق عند 0 للدالة $g(x)=\sin x$ هو:

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\left[\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x-\sin(0)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند 0 للدالة $h(x)=\sqrt{x+1}-1$ هو:

$$h'(0)=\lim_{x\to0}\left[\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1-\sqrt{0+1}+1}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان g وَ h قابلتان للاشتقاق عند 0 فإن : $\lim_{x\to0}f(x)=\frac{g'(0)}{h'(0)}$ حيث $h'(0)\neq0$.

لأنه لدينا : $\lim_{x\to0}\left[\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}\right]=\lim_{x\to0}f(x)$.

ولدينا كذلك $g'(x)=\cos x$ وَ $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

ومنه $g'(0)=\cos0=1$ وَ $h'(0)=\frac{1}{2\sqrt{0+1}}=\frac{1}{2}$

أي أن $\lim_{x\to0}f(x)=\frac{g'(0)}{h'(0)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=1\times\frac{2}{1}=2$.

إذن: $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}\right]=2$.

عن موقع www.eddirasa.com

البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com