تمارين للتعمق :

1- نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$:

حل التمرين 68 ص31 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $]3;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$:

1) إيجاد عدد حقيقي A حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]0,99;1,01[$:

لدينا $0,99<f(x)<1,01$ ومنه $0,99<\dfrac{x+1}{x-3}<1,01$ يكافئ $\dfrac{x-3}{x-3}\times 0,99<\dfrac{x+1}{x-3}<1,01\times\dfrac{x-3}{x-3}$ ،

أي $(x-3)\times 0,99<x+1<1,01\times(x-3)$ ، ومنه $0,99x-2,97<x+1<1,01x-3,03$ ،

بإضافة العدد -1 إلى أطراف المتباينة نجد $0,99x-3,97<x<1,01x-4,03$

ومنه لدينا $x-1,01x+4,03<0$ وَ $-x+0,99x-3,97<0$ ، ومنه $0,01x<-4,03$ وَ $-0,01x<3,97$

إذن : $x<-\dfrac{4,03}{0,01}$ وَ $x>\dfrac{3,97}{0,01}$

أي أن $A=397$ ، لأن -403 لا تنتمي إلى مجال تعريف الدالة f .

2) إثبات أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني (C_f) الممثل للدالة f :

لدينا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x+1}{x-3}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x}\right]=1$ ، ومنه المستقيم $(\Delta):y=1$ مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ وَ $+\infty$.

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

نحسب الفرق $f(x)-1=\dfrac{x+1}{x-3}-1=\dfrac{x+1-x+3}{x-3}=\dfrac{4}{x-3}$

ومنه $\dfrac{4}{x-3}>0$ لأن $D_f=]3;+\infty[$ ، أي أن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم $(\Delta):y=1$ في مجال تعريف الدالة f .

حل التمرين 69 ص31 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^4+2x^3+1$:

- إيجاد عدد حقيقي $A>0$ ، حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)>10^6$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، و لدينا $f(x)>10^6$ ومنه من أجل x كبير بالقدر الكافي ، فإن $f(x)>10^6$

وعليه يمكن أخذ العدد A أكبر ما يمكن ، حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)>10^6$. وسيكون A حتمًا أكبر من الصفر .

حل التمرين 70 ص31 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$:

1) دراسة نهاية الدالة f عند 1 :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{(x-1)^2}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

2) إيجاد مجال I مركزه 1 حيث من أجل كل x من I ، $f(x)>10^6$:

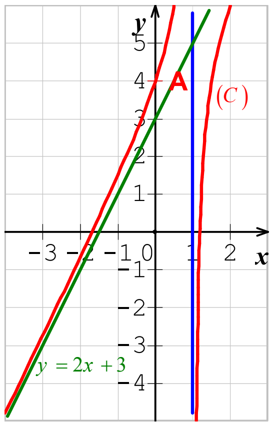
لدينا $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$ ، و لدينا $f(x)>10^6$ ومنه من أجل كل قيمة x أقرب ما يمكن من العدد 1 ، فإن $f(x)>10^6$

و عليه يمكن تعيين المجال I بالقيم القريبة جدًا من العدد 1 ، حيث إذا كان $x\in I$ فإن $f(x)>10^6$.

2- نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي :

حل التمرين 71 ص32 ج1 :

لتكن الدالة f حيث $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+d}$ ، و (C) تمثيلها البياني :



- تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c وَ d :

لدينا (C) يقبل مستقيمًا مقاربًا معادلته $x=1$ ، ومستقيمًا مقاربًا مائلاً معادلته $y=2x+3$ عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ويشمل النقطة $A(0;4)$.

- أولاً النقطة $A(0;4)$ تنتمي إلى (C) معناه $f(0)=4$

وبالتعويض في عبارة $f(x)$ نجد $a(0)+b+\dfrac{c}{(0)+d}=4$ ،

ومنه (1).........................$b+\dfrac{c}{d}=4$ ، حيث $d\neq 0$.

- يكون المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C) إذا و فقط إذا كان $\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$

أي أنه في عبارة الدالة f ، $\lim_{x\to 1} f(x)=x+d=0$ ، أي أن $d=-1$.

- يكون المستقيم ذو المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$ وَ $+\infty$ إذا كان $ax+b=2x+3$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، بالمطابقة نجد $a=2$ ، وَ $b=3$

ومنه تصبح المعادلة (1) : $3+\dfrac{c}{-1}=4$ ، ومنه $3-c=4$ أي أن $c=-1$.

إذن: $a=2$ ، $b=3$ ، $c=-1$ ، وَ $d=-1$.

حل التمرين 72 ص32 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$:

1) تعيين a ، b ، c ، وَ d ، بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x+1)^2}$:

لدينا : $$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}=\frac{ax+b(x+1)^2+cx+d}{(x+1)^2}=\frac{ax+b(x^2+2x+1)+cx+d}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+cx+d}{(x+1)^2}=\frac{ax^3(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+(b+d)}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$ نجد $a=1$ ، وَ $\begin{cases}2a+b=3\\ a+2b+c=6\\ b+d=3\end{cases}$ ، ومنه $b=3-2=1$

وَ $1+2+c=6$

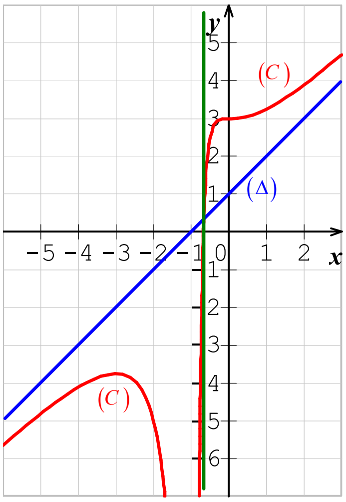
، أي $c=6-3=3$ ، وَ $1+d=3$ ومنه $d=2$

إذن: $a=1$ ، $b=1$ ، $c=3$ ، وَ $d=2$ ، أي أن $f(x)=x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}$.

2) استنتاج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلا (Δ) عند $-\infty$ وَ $+\infty$:

لدينا $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}-(x+1)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x+2}{(x+1)^2}\right]$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x}{x^2}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3}{x}\right]=0$$



ومنه نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$ وَ $+\infty$

3) تحديد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا $\frac{3x+2}{(x+1)^2}=f(x)-(x+1)=x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}-(x+1)$ ،

ومنه المقام $(x+1)^2>0$ ، وَ في البسط $x=-\frac{2}{3}$ ، أي أن (C) يقطع (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=-\frac{2}{3}$ ، لأنه لمّا $x=-\frac{2}{3}$ ، $f(x)-(x+1)=0$

ومنه لمّا $x\in\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ ، المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) .

و لمّا $x\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[$ ، المنحنى (C) يقع أسفل المستقيم (Δ) . (كما يبينه التمثيل البياني أعلاه) .

حل التمرين 73 ص32 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$:

1) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}=\left[\sqrt{x^2+4x+5}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2}\right]=+\infty .$$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)\right)\times\frac{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x+5-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}\right] = 0$$

2) استنتاج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلا (Δ) عند $+\infty$:

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$ ، ومنه المستقيم $(\Delta): y=x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

3) **أ)** حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} = \left[\sqrt{x^2+4x+5}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2}\right] = +\infty$$

ب) إثبات أنه يوجد عددان حقيقيان α وَ β ، بحيث $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$ ، وَ $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\beta$:

لدين من أجل كل $x\neq 0$ ،
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}\right] = -1$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ ، أي أن $\boxed{\alpha=-1}$.

- لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\beta$ ، ومنه $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\beta$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+4x+5}+x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)\times\frac{\sqrt{x^2+4x+5}-x}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+4x+5-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1} = \frac{-4}{2} = -2$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=-2$ ، أي أن $\boxed{\beta=-2}$

ج) وجدنا أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x=-2$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x+2=0$ يكافئ $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x-2)=0$

ومنه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=-x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$.

حل التمرين 74 ص32 ج1 :

f وَ g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ وَ $\mathbb{R}^+$ على الترتيب بـ : $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ وَ $g(x)=\sqrt{x^2+4x}$:

1) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وَ $\lim_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=+\infty .$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=+\infty .$$

2) حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$ وَ $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-x+\frac{1}{2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x+1-x^2-x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+4x}+x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+4x}+x+\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+4x}+x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x-x^2-x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+4x}+x+\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}+x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{1}{4x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}}+x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{1}{4x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1+\frac{1}{2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{4x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1+\frac{1}{2x}}=\frac{3}{2}$$

- التخمين حول السلوك التقاربي للدالتين f وَ g عند $+\infty$:

أولاً لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=0$ ، ومنه المنحنى الممثل للدالة f يقبل عند $+\infty$ مستقيمًا مقاربًا مائلاً معادلته $y=x+\frac{1}{2}$ ، أي أنه في جوار $+\infty$ ، المنحنى الممثل للدالة f يقترب من المستقيم ذو المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ في جوار $+\infty$.

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{3}{2}$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\right]=0$ ، يكافئ $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\right]=0$ ، أي أن $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x+2)\right]=0$ ، ومنه المنحنى الممثل للدالة g يقبل عند $+\infty$ مستقيمًا مقاربًا مائلاً معادلته $y=x+2$ ، أي أنه في جوار $+\infty$ ، المنحنى الممثل للدالة g يقترب من المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$ في جوار $+\infty$ ، ولا يقترب من المستقيم ذو المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\neq 0$.

3) وجدانا سابقًا $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x+2)\right]=0$ ، ومنه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$ مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$.

حل التمرين 75 ص32 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$ ، و (C) تمثيلها البياني في معلم :

1) إثبات أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:

معناه

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+1+\sqrt{x^2+4x}\right)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+4x}\right)-(x+2)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right)\times\left(\frac{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x-\left(x^2+4x+4\right)}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}\right]=0$$

إذن : نستنتج أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

2) دراسة الوضعية النسبية لـ (C) وَ (Δ) :

لندرس إشارة الفرق $f(x)-(2x+3)$ على $[0;+\infty[$:

$$f(x)-(2x+3)=x+1+\sqrt{x^2+4x}-(2x+3)=\sqrt{x^2+4x}-(x+2)$$

حتى يكون $\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\geq 0$ يجب أن يكون $x^2+4x-(x+2)^2\geq 0$ أي $x^2+4x-x^2-4x-4\geq 0$ ، يكافئ: $-4\geq 0$ ، وهذا مستحيل .

ومنه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ فإن $f(x)-(2x+3)<0$ ،

إذن : المنحنى (C) يقع أسفل المستقيم Δ من أجل كل x من $[0;+\infty[$.

حل التمرين 76 ص32 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) تعيين D مجموعة تعريف الدالة f :

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $|x^2-1|\geq 0$ ، أي أن $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$.

2) حساب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$:

لدينا $|x^2-1|\geq 0$ ، ومنه $x=1$ و $x=-1$

أي أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1} : x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\\ -\frac{1}{2}x+\sqrt{-x^2+1} : x\in]-1;1[\end{cases}$$

ومنه
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right]=+\infty$$

وَ
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right]=+\infty$$

3) حساب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]$ وَ $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{2}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\times\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-1}-x\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]=0$$

4) الاستنتاج :

- لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]=0$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)\right]=0$

إذن نستنتج أن المستقيم Δ ذو المعادلة $y=-\frac{3}{2}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$.

- ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=0$ ومنه نستنتج أن المستقيم Δ' ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

5) تحديد وضعية (C) بالنسبة إلى كل من المستقيمين Δ وَ Δ' :

- أولا بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)$:

$$f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}+\frac{3}{2}x=\sqrt{|x^2-1|}+x$$

ومنه $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)\geq 0$ تكافئ $\sqrt{|x^2-1|}+x\geq 0$ ، أي أن $\sqrt{|x^2-1|}\geq -x$ ....(1) ،

- إذن إذا كان $x>0$ فإن المتراجحة (1) محققة ، ومنه المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) .
- وإذا كان $x\leq 0$ فإن المتراجحة (1) تكافئ $\left(\sqrt{|x^2-1|}\right)^2\geq(-x)^2$ ، ومنه $|x^2-1|\geq x^2$

إذن $x^2-1\geq x^2$ لمّا $x\leq -1$ ، أي $-1\geq 0$ وهذا مستحيل

وَ $-x^2+1\geq x^2$ لمّا $-1\leq x\leq 0$ ، أي $2x^2\leq 1$ ، ومنه $x^2\leq\frac{1}{2}$ ، أي أنّ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

وهذا يكافئ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 0$

- إذن لمّا $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 0$ ، $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)>0$ ومنه المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) .

ولمّا $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)=0$ ، ومنه المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

ولمّا $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)<0$ ، ومنه المنحنى (C) يقع أسفل المستقيم (Δ) .

- ثانيًا ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)$:

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}-\frac{1}{2}x=\sqrt{|x^2-1|}-x$$

ومنه $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)\geq 0$ تكافئ $\sqrt{|x^2-1|}-x\geq 0$ ، أي أن $\sqrt{|x^2-1|}\geq x$ ....(2) ،

- إذن إذا كان $x<0$ فإن المتراجحة (2) محققة ، ومنه المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ') .
- وإذا كان $x\geq 0$ فإن المتراجحة (2) تكافئ $\left(\sqrt{|x^2-1|}\right)^2\geq x^2$ ، ومنه $|x^2-1|\geq x^2$

إذن $x^2-1\geq x^2$ لمّا $x\geq 1$ ، أي $-1\geq 0$ وهذا مستحيل .

ولدينا سابقا $x^2\leq\frac{1}{2}$ ، أي أنه لمّا $0\leq x\leq 1$ ، $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ وهذا يكافئ $0\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

- إذن لمّا $0\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)>0$ ومنه المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ') .

ولمّا $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)=0$ ، ومنه المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ') .

ولمّا $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x) - \left(\frac{1}{2}x\right) < 0$ ، ومنه المنحنى (C) يقع أسفل المستقيم (Δ') .

المنحنيات المتقاربة :

حل التمرين 77 ص32 و33 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x+2}$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x+2}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{x^3}{x}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[x^2\right] = +\infty$$

2) أ) حساب $\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - x^2\right]$:

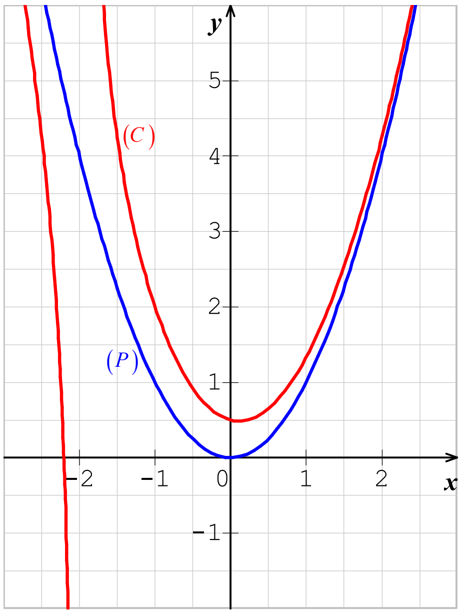
$$\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - x^2\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x+2} - x^2\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{x^3 + 2x^2 + 1 - x^2(x+2)}{x+2}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{1}{x+2}\right] = 0$$

ب) لدينا $\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - x^2\right] = 0$ ، هذا معناه هندسيًا أنه : كلمـــا اقتربت الفاصلة x من $+\infty$ ، اقترب العدد $f(x)$ من x^2 ، أي أن نقط المنحنى (C) متقاربة من نقط المنحنى (P) الممثل للدالة x^2 .

ونقول في هذه الحالة أن المنحنيين (C) و (P) متقاربان عند $+\infty$.

ج) رســـم المنحنيين (C) و (P) :

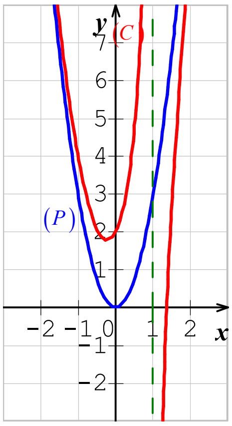


حل التمرين 78 ص 33 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x-1}$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) البحث عن منحنٍ (P) مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:

نحسب نهاية $f(x)$ عند $+\infty$:



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3x^2-\dfrac{2}{x-1}\right]=+\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{2}{x-1}\right]=0$

نلاحظ أنه يوجد منحن (P) مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$ ، للتأكد نحسب :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(3x^2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[3x^2-\frac{2}{x-1}-\left(3x^2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{x-1}\right]=0$$

من حساب النهايتين السابقتين نستنتج أنّ المنحنى (C) يقترب من المنحنى (P) ذو المعادلة $y=3x^2$ عند $+\infty$.

- تحديد الوضعية النسبية للمنحنيين (C) وَ (P) :

معناه ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(3x^2\right)$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x)-\left(3x^2\right)=3x^2-\frac{2}{x-1}-\left(3x^2\right)=-\frac{2}{x-1}$$

ومنه لمّا $x<1$ ، $f(x)-\left(3x^2\right)>0$ ، أي أن المنحنى (C) يقع فوق (P) على المجال $]-\infty;1[$

ولمّا $x>1$ ، $f(x)-\left(3x^2\right)<0$ ، أي أن المنحنى (C) يقع أسفل (P) على المجال $]1;+\infty[$

2) إثبات أن المنحنيين (C) وَ (P) متقاربان عند $-\infty$:

لدينا الدالة f معرفة على المجال $]-\infty;1[$ ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و لدينا أيضًا

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(3x^2\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[3x^2-\frac{2}{x-1}-\left(3x^2\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{2}{x-1}\right]=0$$

إذن : المنحنيين (C) وَ (P) متقاربان عند $-\infty$ ، (و التمثيل البياني أعلاه يبين ذلك) .

حل التمرين 79 ص 33 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

- البحث عن منحن (P) لدالة مرجعية مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x}{x^2+1}\right]=0$$

نستنتج أن المنحنى (P) الممثل للدالة مقلوب $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ (دالة مرجعية) مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

- تحديد الوضعية النسبية للمنحنيين (C) وَ (P) :

معناه ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(3x^2\right)$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x)-\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+1}$$

ومنه لمّا $x<0$ ، $f(x)-\left(\dfrac{1}{x}\right)<0$ ، أي أن المنحنى (C) يقع أسفل (P) على المجال $]-\infty;0[$

ولمّا $x>1$ ، $f(x)-\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$ ، أي أن المنحنى (C) يقع فوق (P) على المجال $]0;+\infty[$.

حل التمرين 80 ص 33 ج1 :

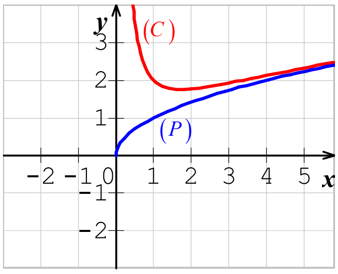
f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

- البحث عن منحنٍ (P) لدالة مرجعية مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:

لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1+\left(x\sqrt{x}\right)\left(-\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1-x^2}{x\sqrt{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x\sqrt{x}}\right]=0$$



نستنتج أن المنحنى (P) الممثل للدالة جذر $x\mapsto\sqrt{x}$ (دالة مرجعية) مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

- تحديد الوضعية النسبية للمنحنيين (C) وَ (P) :

معناه ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(\sqrt{x}\right)$:

$f(x)-\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}>0$ ، لأن $x\mapsto\sqrt{x}$ معرفة من أجل $x\geq 0$

ومنه لمّا $x>0$ ، $f(x)-\left(\sqrt{x}\right)>0$ ، أي أن المنحنى (C) يقع فوق (P) على المجال $]0;+\infty[$.

عن موقع www.eddirasa.com

البريد الإلكتروني : info@eddirasa.com