6- مبرهنة القيم المتوسطة :

حل التمرين 50 ص29 ج1 :

- البرهان باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3;-2]$:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-3;-2]$ بـ : $f(x)=x^3-4x$

لدينا $f(-3)=(-3)^3-4(-3)=-15$ و $f(-2)=(-2)^3-4(-2)=-8+8=0$

بما أن الدالة f مستمرة على المجال $[-3;-2]$ لأنها دالة كثير حدود ، فإنه حسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[-3;-2]$ من أجل كل عدد حقيقي k حيث $k\in[f(-3);f(-2)]$ ، أي أن $k\in[-15;0]$

بما أن $k=-2$ عنصر من المجال $[-15;0]$ ، فإن المعادلة $f(x)=-2$ تقبل على الأقل حلاً على المجال $[-3;-2]$ ،

أي أن المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[-3;-2]$.

حل التمرين 51 ص30 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;2]$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=2x+1; & 0<x\le 1 \\ f(x)=-2x+3; & 1\le x<2 \end{cases}$:

1) إثبات بتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة أن للمعادلة $f(x)=0$ حلولاً في المجال $[0;2]$:

لدينا $f(x)$ معرفة على المجال $]0;1]$ بـ : $f(x)=2x+1$ و هي دالة كثير حدود ، ومنه فهي مستمرة على المجال $]0;1]$.

لدينا الدالة f معرفة على المجال $[1;2[$ بـ : $f(x)=x-1$ و هي دالة كثير حدود ، ومنه فهي مستمرة على المجال $[1;2[$.

لكن هل $f(x)$ مستمرة عند 1 ؟

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{}1}[2x+1]=2(1)+1=3$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}[-2x+3]=-2(1)+3=1$

وجدنا أن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ ، ومنه الدالة f لا تقبل نهاية عند 1 .

إذن : الدالة f غير مستمرة عند 1 ، ومنه فهي ليست مستمرة على المجال $[0;2]$ لأن العدد 1 عنصر من هذا المجال

إذن : الدالة f لا تحقق شرط تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[0;2]$

وعليه لا يمكن تطبيق هذه المبرهنة .

2) التحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً واحدًا على في المجال $[0;2]$:

حل المعادلة $f(x)=0$:

لدينا : $f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1; & x\in[0;1[\\ -2x+3; & x\in[1;2] \end{cases}$

ومنه $x=-\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{3}{2}$ ، $x=-\frac{1}{2}$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى المجال $[0;1[$

ومنه حل المعادلة $f(x)=0$ هو $x=\frac{3}{2}$ لأن هذا الحل ينتمي إلى $[1;2]$.

إذن: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا هو $\frac{3}{2}$ على المجال $[0;2]$.

حل التمرين 52 ص30ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=3x^3-2x-\frac{1}{4}$:

1) حساب $f(1)$ ، $f(0)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(-1)$:

$f(1)=3(1)^3-2(1)-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ ، $f(0)=3(0)^3-2(0)-\frac{1}{4}=0-0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\left(-\frac{1}{2}\right)^3-2\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=\frac{-3}{8}+1-\frac{1}{4}=\frac{-3+8-2}{8}=\frac{3}{8}$.

$f(-1)=3(-1)^3-2(-1)-\frac{1}{4}=-3+2-\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}$.

2) الاستنتاج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1;1]$:

الدالة f كثير حدود ، أي أنها مستمرة على $\mathbb{R}$ ، و بالتالي فهي مستمرة على كل من المجالات $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ ، $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ ، $[0;1]$ كلّ على احدا .

ولدينا كذلك $f(-1)\times f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ ، وَ $f\left(-\frac{1}{2}\right)\times f(0)<0$ ، وَ $f(0)\times f(1)<0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في كل مجال من المجالات $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ ، $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ ، $[0;1]$.

<u>إذن:</u> نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1;1]$.

حل التمرين 53 ص30ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $[-3;6]$ كما يلي : $f(x)=x^3-12x$:

1) دراسة تغيرات الدالة f :

$f(x)$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-3;6]$ ، ولدينا $f'(x)=3x^2-12$

$f'(x)=0$ معناه $3x^2-12=0$ ومنه $3(x^2-4)=0$ ، هذا يكافئ $3((x-2)(x+2))=0$

$3\neq 0$ ، ومنه $x=2$ وَ $x=-2$

إذا كان $f'(x)<0$ فإن $x\in]-2;2[$ ومنه الدالة f متناقصة على المجال $x\in]-2;2[$

إذا كان $f'(x)>0$ فإن $x\in[-3;-2[\cup]2;6]$ ومنه الدالة f متناقصة على هذا المجال .

جدول تغيرات الدالة f :

x	-3		-2		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$ 30	144

2) إيجاد عدد حلول المعادلة $f(x)=30$:

حسب جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-3;6]$ فإن الدالة تأخذ القيمة 30 من أجل عدد حقيقي وحيد k ، حيث $2<k<6$ لأن من أجل $x\in[2;6]$ فإن $f(x)\in[-16;144]$ ، و العدد 30 عنصر من المجال $[-16;144]$.

إذن المعادلة $f(x)=30$ تقبل حلاً وحيدًا فقط .

حل التمرين 54 ص30 ج1 :

- إثبات أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرًا حقيقيًا :

لتكن f دالة كثير حدود معرفة بـ : $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.......+a_1x+a_0$ ،

حيث $a_0;a_1;.........;a_{n-1};a_n$ معاملات حقيقية و n عدد طبيعي فردي حيث $a_n\neq 0$.

- نعلم أن f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود ، وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} a_nx^n$ ، وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} a_nx^n$.

إذن نميز حالين كما يلي :

	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
$a_n>0$	$-\infty$	$+\infty$
$a_n<0$	$+\infty$	$-\infty$

ومنه إذا كان $a_n<0$ فإن $\left[\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right]\times\left[\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right]<0$

وإذا كان $a_n>0$ فإن $\left[\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right]\times\left[\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right]<0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم a_n فإن $\left[\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right]\times\left[\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right]<0$ ، و الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا حقيقيًا .

إذن : نستنتج أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرًا حقيقيًا .

حل التمرين 55 ص30 ج1 :

- إثبات أن المعادلات التالية تقبل على الأقل حلاً في المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1) $2x^3+1=0$ ، $I=[-1;0]$:

نضع $f(x)=2x^3+1$ ، حيث الدالة f معرفة على المجال $I=[-1;0]$

ومنه $f(-1)=2(-1)^3+1=-2+1=-1$ ، وَ $f(0)=2(0)^3+1=0+1=1$

العدد 0 محصور بين $f(-1)$ وَ $f(0)$ ، و f دالة كثير حدود أي أنها مستمرة على المجال $I=[-1;0]$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين -1 وَ 0

إذن : المعادلة $2x^3+1=0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $I=[-1;0]$.

2) $x^5+3x^4-6x^2-1=0$ ، $I=[1;2]$:

نضع $f(x)=x^5+3x^4-6x^2-1$ ، حيث الدالة f معرفة على المجال $I=[1;2]$

ومنه $f(1)=(1)^5+3(1)^4-6(1)^2-1=1+3-6-1=-3$ ، وَ $f(2)=32+48-24-1=55$

العدد 0 محصور بين $f(1)$ وَ $f(2)$ ، و f دالة كثير حدود أي أنها مستمرة على المجال $I=[1;2]$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين 1 وَ 2

إذن : المعادلة $x^5+3x^4-6x^2-1=0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $I=[1;2]$.

3) $x^4+4x-3=0$ ، $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$:

نضع $f(x)=x^4+4x-3$ ، حيث الدالة f معرفة على المجال $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$

ومنه $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+4\left(\frac{1}{2}\right)-3=\frac{1}{16}+2-3=\frac{-15}{16}=-0,9$ ، وَ $f(1)=1+4-3=2$

العدد 0 محصور بين $f\left(\frac{1}{2}\right)$ وَ $f(1)$ ، و f دالة كثير حدود أي أنها مستمرة على المجال $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين $\frac{1}{2}$ وَ 1

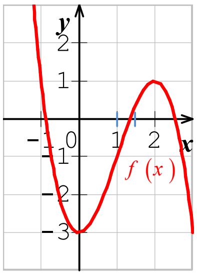
إذن : المعادلة $x^4+4x-3=0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $I=\left[\frac{1}{2};1\right]$.

4) $-x^3+3x^2=3$ ، $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$:

نضع $f(x)=-x^3+3x^2-3$ ، حيث الدالة f معرفة على المجال $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$

ومنه $f(1)=-(1)^3+3(1)^2-3=-1+3-3=-1$ ،

وَ $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}\right)^3+3\left(\frac{3}{2}\right)^2-3=-\frac{27}{8}+\frac{27}{4}-3=\frac{27}{8}-3=\frac{3}{8}=0,4$



العدد 0 محصور بين $f(1)$ وَ $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ، و f دالة كثير حدود أي أنها مستمرة على المجال $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين 1 وَ $\frac{3}{2}$

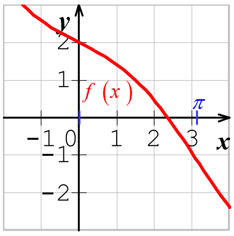
كما يظهر في التمثيل البياني للدالة f .

إذن : المعادلة $-x^3+3x^2=3$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

5) $\frac{1}{2}\sin x+2=x$ ، $I=[0;\pi]$:

نضع $f(x)=\frac{1}{2}\sin x-x+2$ ، حيث الدالة f معرفة على المجال $I=[0;\pi]$

ومنه $f(0)=\frac{1}{2}\sin(0)-(0)+2=0-0+2=2$ ،



و $f(\pi)=\frac{1}{2}\sin\pi-(\pi)+2=-\pi+2=-3{,}14+2=-1{,}14$

العدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(\pi)$ ، و f دالة كثير حدود ، لأن الدالة $x\mapsto \sin x$ معرفة على $\mathbb{R}$ ، أي أنها مستمرة على المجال $I=[0;\pi]$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين 0 و π كما يبينه التمثيل البياني للدالة f .

إذن : المعادلة $\frac{1}{2}\sin x+2=x$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $I=[0;\pi]$.

حل التمرين 56 ص30 ج1 :

لتكن f دالة مستمرة على المجال $]-3;+\infty[$ ، وجدول تغيراتها كالآتي :

x	-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	2

- إثبات أن المنحنى الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين :

لدينا الدالة f مستمرة على $]-3;+\infty[$ ، أي أنها مستمرة على المجال $]-3;0]$ و مستمرة أيضًا على $[0;2]$.

ولدينا كذلك حسب جدول التغيرات :

لمّا $x\in]-3;0]$ ، الدالة $f(x)\in[-2;+\infty[$.

لمّا $x\in[0;2]$ ، الدالة $f(x)\in[-2;4[$.

منحنى الدالة f يقطع حامل محور الفواصل معناه $f(x)=0$ (الترتيب معدوم) ،

إذن $0\in[-2;+\infty[$ ، و $0\in[-2;4[$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد $x_0\in]-3;0]$ يحقق $f(x_0)=0$ ، ويوجد $x_1\in[0;2]$ يحقق $f(x_1)=0$ ،

إذن النقط ذات الإحداثيات $A(x_0;0)$ ، و $B(x_1;0)$ تنتمي إلى المنحنى (C_f) وترتيبها معدوم .

إذن: هذه النقط تنتمي إلى محور الفواصل .

ومنه حامل محور الفواصل يقطع (C_f) في نقطتين متمايزتين A و B فواصلهما على الترتيب $-3<x_0\leq 0$ ، و $0\leq x_1\leq 2$.

حل التمرين 57 ص30 ج1 :

لدينا جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-2	$\frac{13}{6}$	-2	$-\frac{7}{3}$	-2	$+\infty$

- البرهان على أن المعادلة $f(x)+2=0$ تقبل ثلاثة حلول فقط في $\mathbb{R}$:

$f(x)+2=0$ معناه $f(x)=-2$

حسب جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ لدينا :

لمّا $x \in]-\infty;-1]$ ، الدالة $f(x) \in \left]-\infty;\frac{13}{6}\right]$.

لمّا $x \in [-1;2]$ ، الدالة $f(x) \in \left[-\frac{7}{3};\frac{13}{6}\right]$.

لمّا $x \in [2;+\infty[$ ، الدالة $f(x) \in \left[-\frac{7}{3};+\infty\right[$.

نعلم أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ، أي أنها مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ولدينا العدد -2 عنصر من المجالات $\left]-\infty;\frac{13}{6}\right]$ ، وَ $\left[-\frac{7}{3};\frac{13}{6}\right]$ ، وَ $\left[-\frac{7}{3};+\infty\right[$ كما هو موضح في جدول التغيرات أعلاه ،
ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=-2$ تقبل حلاً على الأقل في كل مجال من المجالات $]-\infty;-1]$ ، وَ $[-1;2]$ ، وَ $[2;+\infty[$ ، أي أنها تقبل على الأقل ثلاثة حلول في $\mathbb{R}$.
إذن: المعادلة $f(x)+2=0$ تقبل ثلاثة حلول فقط في $\mathbb{R}$ ، لأنها معادلة من الدرجة الثالثة ، ونعلم أن المعادلات من الدرجة الثالثة لها ثلاث حلول فقط .

7- الدول المستمرة و الرتيبة تمامًا :

حل التمرين 58 ص30 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2]$ بـ : $f(x)=2x^3-3x^2-1$:

1) حساب $f'(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

لدينا $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$ معناه $6x(x-1)=0$ ، ومنه $6x=0$ أي $x=0$ ، وَ $x-1=0$ أي $x=1$.

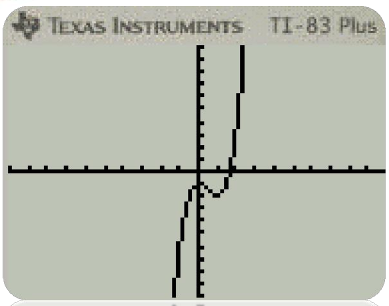
$f'(x)<0$ معناه $x \in]0;1[$ ومنه الدالة f متناقصة على المجال $[0;1]$.

$f'(x)>0$ معناه $x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ ومنه الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.

- جدول التغيرات :

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

2) الرسم على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة f باستعمال نافذة مناسبة :



3) إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا في $[-1;2]$:

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنه لمّا $x \in [1;2]$ فإن $f(x) \in [-2;3]$.

وبما أن العدد 0 عنصر من المجال $[-2;3]$ ، و الدالة f مستمرة و متزايدة **تمامًا** على المجال $[1;2]$

فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً **وحيدًا** α حيث $1<\alpha<2$.

حل التمرين 59 ص30 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-2x^3+3x^2-x+5$:

1) دراسة تغيرات الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا $f'(x)=-6x^2+6x-1$

$f'(x)=0$ معناه $-6x^2+6x-1=0$ ، لدينا المميز $\Delta=b^2-4ac=36-24=12$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{12}}{-12}=0,8$ ، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{12}}{-12}=0,2$

$f'(x)<0$ معناه $x\in]-\infty;0,2[\cup]0,8;+\infty[$ ومنه الدالة f متناقصة على هذا المجال .

$f'(x)>0$ معناه $x\in]0,2;0,8[$ ومنه الدالة f متزايدة على المجال $]0,2;0,8[$.

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$0,2$		$0,8$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$4,9$		$5,1$		$-\infty$

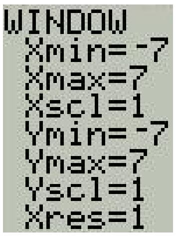
2) إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α على $\mathbb{R}$:

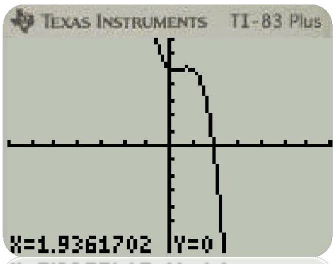
من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنه لمّا $x\in[0,8;+\infty[$ فإن $f(x)\in]-\infty;5,1]$.

وبما أن العدد 0 عنصر من المجال $]-\infty;5,1]$ ، و الدالة f مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال $[0,8;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α.

3) إيجاد باستعمال حاسبة بيانية قيمة مقربة إلى 10^{-2} للحل α :

$f(x)=0$ معناه نقطة التقاطع مع حامل محور الفواصل أي $y=0$ كما تظهر على شاشة الحاسبة البيانية $x=1.93$.





حل التمرين 60 ص31 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;2]$ بـ : $f(x)=x^4-x^2+1$:

1) دراسة تغيرات الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا $f'(x)=4x^3-2x=2x(2x^2-1)$

$f'(x)=0$ معناه $2x(2x^2-1)=0$ ، ومنه $2x=0$ أي $x=0$ ، وَ $(2x^2-1)=0$ أي $x^2=\frac{1}{2}$

$x=\sqrt{\frac{1}{2}}=0,7$ ، وَ $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}=-0,7$ ،

ندرس إشارة المشتق :

x	$-\infty$		$-0,7$		0		$0,7$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
الجداء		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

لدينا $D_f=[1;2]$ ، ومنه و حسب جدول إشارة المشتق ، الدّالة f متزايدة تمامًا على المجال $[1;2]$

- جدول التغيرات :

x	1 2
$f'(x)$	+
$f(x)$	1 ↗ 13

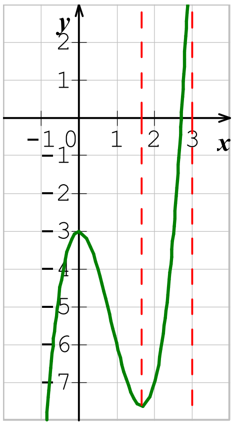
2) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]1;2[$:

حسب جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنه لمّا $x\in]1;2[$ فإن $f(x)\in[1;13]$.

وبما أن العدد 3 عنصر من المجال $[1;13]$ ، و الدالة f مستمرة و متزايدة **تمامًا** على المجال $]1;2[$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً **وحيدًا** α .

3) القيمة المقربة إلى 10^{-2} للحل α هي : $1,41$.

حل التمرين 61 ص31ج1 :



- إثبات أن المعادلة $2x^3-5x^2-3=0$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$:

نضع $f(x)=2x^3-5x^2-3$ ، ومنه $f'(x)=6x^2-10x=2x(3x-5)$

$f'(x)=0$ معناه $2x(3x-5)=0$ ، ومنه $2x=0$ معناه $x=0$ ،

وَ $3x-5=0$ ، أي $x=\frac{5}{3}$

إذن لمّا $f'(x)<0$ ، $x\in\left]0;\frac{5}{3}\right[$ ، الدالة f متناقصة تمامًا على هذا المجال .

و لمّا $f'(x)>0$ ، $x\in]-\infty;0[\cup\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$ ، الدالة f متزايدة تمامًا على هذا المجال .

لدينا المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$ محتوى في $\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$ ، ولدينا الدالة f متزايدة تمامًا و مستمرة على هذا المجال

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$

إذن : المعادلة $2x^3-5x^2-3=0$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$.

حل التمرين 62 ص31ج1 :

- إثبات أن المعادلة $\frac{1}{x+2}=2\cos x$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$:

نضع $f(x)=\frac{1}{x+2}-2\cos x$ ، ومنه $f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}+2\sin x$

لدينا من أجل كل x من المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ ، $f'(x)<0$ لأن $\sin x$ سالب على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

ومنه الدالة $f(x)$ متناقصة تمامًا على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ و مستمرة عليه .

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

إذن : المعادلة $2\cos x=\frac{1}{x+2}$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

حل التمرين 63 ص31ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ بـ : $f(x)=\cos^3 x-3\cos x+2$:

- إثبات أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[0;\pi]$ حيث $f(\alpha)=\sqrt{2}$:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0;\pi]$ و دالتها المشتقة هي :

$$\begin{aligned} f'(x)&=3(-\sin x)(\cos^2 x)-3(-\sin x)\\ &=-3\sin x(\cos^2 x-1)\\ &=-3\sin x(-\sin^2 x)\\ &=(3\sin x)(\sin^2 x)\end{aligned}$$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sin x$ ، أي $f'(x)>0$ ، لأن $\sin x$ موجب على المجال $]0;\pi[$

ومنه جدول التغيرات :

x	0 $\qquad$ π
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ $\sqrt{2}$ ↗ 4

وجدنا أن الدالة f مستمرة و متزايدة تمامًا على المجال $[0;\pi]$ ، ومنه لمّا $x\in[0;\pi]$ فإن $f(x)\in[0;4]$

و العدد $\sqrt{2}$ عنصر من المجال $[0;4]$.

إذن: المعادلة $f(x)=\sqrt{2}$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث $\alpha\in]0;\pi[$ ، أي أنه يوجد $\alpha\in]0;\pi[$ حيث $f(\alpha)=\sqrt{2}$.

حل التمرين 64 ص31ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-x^3+3x^2-1$:

1) دراسة نهايات الدالة f عند $-\infty$ وَ $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x^3+3x^2-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x^3\right]=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^3+3x^2-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^3\right]=-\infty$.

2) أ) حساب f' مشتقة الدّالة f ثم دراسة إشارتها :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=-3x^2+6x=3x(2-x)$

$f'(x)=0$ معناه $3x(2-x)=0$ ، ومنه $3x=0$ أي $x=0$ ، وَ $2-x=0$ أي $x=2$

$f'(x)<0$ معناه $x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ ومنه الدالة f متناقصة تمامًا على المجال $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$

$f'(x)>0$ معناه $x\in]0;2[$ ومنه الدالة f متزايدة تمامًا على المجال $]0;2[$.

ب) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-1		3		$-\infty$

3) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا على كل مجال من المجالات $[-1;0]$ ، $[0;1]$ ، $[2;3]$:

أولاً نحسب $f(-1)$ ، $f(1)$ وَ $f(3)$:

$$f(-1)=-(-1)^3+3(-1)^2-1=1+3-1=3$$

$$f(1)=-(1)^3+3(1)^2-1=-1+3-1=1$$

$$f(3)=-(3)^3+3(3)^2-1=-27+27-1=-1$$

- لدينا الدالة f مستمرة على المجال $[-1;0]$ وَ متناقصة تمامًا عليه وَ $f(-1)\times f(0)<0$
ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا على المجال $[-1;0]$.
- و لدينا الدالة f مستمرة على المجال $[0;1]$ وَ متزايدة تمامًا عليه وَ $f(0)\times f(1)<0$
ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا على المجال $[0;1]$.
- و لدينا كذلك الدالة f مستمرة على المجال $[2;3]$ وَ متناقصة تمامًا عليه وَ $f(2)\times f(3)<0$
ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا على المجال $[2;3]$.

حل التمرين 65 ص31 ج1 :

f دالة معرفة على $[0;\pi]$ بـ : $f(x)=2+\frac{1}{2}\sin x$:

- إثبات أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0;\pi]$ بحيث $f(\alpha)=\alpha$:

نضع دالة g تكون معرفة على المجال $[0;\pi]$ بـ : $g(x)=2+\frac{1}{2}\sin x-x$

لندرس تغيرات هذه الدالة على المجال $[0;\pi]$:

$g(0)=2+\frac{1}{2}\sin(0)-0=2$ ، لأنّ $\sin(0)=0$.

$g(\pi)=2+\frac{1}{2}\sin(\pi)-0=2-\pi$ لأنّ $\sin(\pi)=0$.

لدينا من أجل كل x من $[0;\pi]$ ، $g'(x)=\frac{1}{2}\cos x-1$

- إشارة $g'(x)$:

لدينا $-1\le\cos x\le 1$ ، ومنه بالقسمة على العدد 2 نجد $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\cos x\le\frac{1}{2}$ ، وبإضافة العدد -1 إلى أطراف المتباينة نجد

$-\frac{1}{2}-1\le\frac{1}{2}\cos x-1\le\frac{1}{2}-1$.

إذن $-\frac{3}{2}\le g'(x)\le-\frac{1}{2}$ ، أي أن $g'(x)<0$

- جدول تغيرات $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$:

x	0		π
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2		$2-\pi$

من جدول تغيرات $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$ نستنتج أنّ الدالة g مستمرة على المجال $[0;\pi]$ ومتناقصة تمامًا عليه وَ $f(0)\times f(\pi)<0$ ، ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0;\pi]$ ، حيث $g(\alpha)=0$.

أي أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0;\pi]$ حيث $2+\frac{1}{2}\sin(\alpha)-\alpha=0$

ومنه $2+\frac{1}{2}\sin(\alpha)=\alpha$.

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0;\pi]$ حيث $f(\alpha)=\alpha$.

حل التمرين 66 ص31 ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2$:

1) إثبات أنّ الدالة f متناقصة تمامًا على المجال $D=[0;2]$:

لدينا من أجل كل x من $]0;2[$ ، $f'(x)=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

ومنه $2\sqrt{x}\geq 0$ ، أي أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $\sqrt{x}-\sqrt{2}$.

لدينا $0<x<2$ ، ومنه $0<\sqrt{x}<\sqrt{2}$ ، يكافئ $0-\sqrt{2}<\sqrt{x}-\sqrt{2}<\sqrt{2}-\sqrt{2}$

أي أن $-\sqrt{2}<\sqrt{x}-\sqrt{2}<0$ ومنه $f'(x)<0$.

إذن: الدالة f متناقصة تمامًا على المجال $]0;2[$.

عن موقع www.eddirasa.com

البريد الإلكتروني: info@eddirasa.com

2) لتكن الدالة g المعرفة على $D=[0;2]$ بـ : $g(x)=f(x)-x$:

- إثبات أن الدالة g متناقصة تمامًا على المجال $D=[0;2]$:

لدينا الدالة f متناقصة تمامًا على المجال $]0;2[$ ، ولدينا الدالة $x\mapsto -x$ متناقصة تمامًا على المجال D

إذن: الدالة g متناقصة تمامًا على المجال $D=[0;2]$ ، لأنها مجموع دالتين متناقصتين تمامًا .

- حساب $g(0)$ وَ $g(2)$ ، ثم الإستنتاج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال D :

$g(0)=\left(\sqrt{0}-\sqrt{0}\right)^2-0=2$ ، $g(2)=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2-2=-2$

لدينا الدالة g مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال $D=[0;2]$ ، لأنها دالة كثير حدود

ولدينا $g(0)\times g(2)<0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $D=[0;2]$

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد ، معناه $f(x)-x=0$ تقبل حل وحيد

إذن: نستنتج أن $f(x)=x$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $D=[0;2]$.

حل التمرين 67 ص31 ج1 :

نعتبر الدّالتين $f:x\mapsto\sqrt{x+1}$ ، وَ $g:x\mapsto -x^3$:

- إثبات أن المنحنيين (C_f) وَ (C_g) الممثلين للدالتين f وَ g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 ، حيث $-\frac{7}{8}<x_0<-\frac{3}{4}$:

لتكن دالة h حيث $g:x\mapsto f(x)-g(x)=\sqrt{x+1}+x^3$

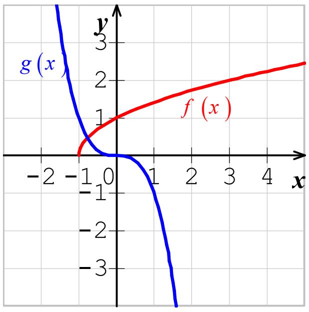
لدينا من أجل كل x من $[-1;+\infty[$ ، $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+3x^2$

ومنه $3x^2\geq 0$ وَ $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}>0$ ، أي أن $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+3x^2>0$ ، ومنه $h'(x)>0$

أي أن الدالة h متزايدة تمامًا على المجال $]-1;+\infty[$.

ومنه جدول التغيرات للدالة h على المجال $]-1;+\infty[$:

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	-1 $\nearrow$ $+\infty$



من جدول التغيرات نستنتج أنه لمّا $x\in[-1;+\infty[$ فإن $h(x)\in[-1;+\infty[$

بما أنّ العدد 0 عنصر من المجال $[-1;+\infty[$ ، والدالة h مستمرة و متزايدة تمامًا على المجال $[-1;+\infty[$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً على الأقل على المجال $[-1;+\infty[$

ولأن الدالة h متزايدة تمامًا فإن هذا الحل وحيد .

- ولدينا كذلك $h\left(-\frac{7}{8}\right)=\sqrt{-\frac{7}{8}+1}+\left(-\frac{7}{8}\right)^3=\sqrt{\frac{1}{8}}-\left(\frac{7}{8}\right)^3<0$

وَ $h\left(-\frac{3}{4}\right)=\sqrt{-\frac{3}{4}+1}+\left(-\frac{3}{4}\right)^3=\frac{1}{2}-\frac{27}{64}=\frac{32-27}{64}=\frac{5}{64}>0$

- وجدنا أن $h\left(-\frac{7}{8}\right)\times h\left(-\frac{3}{4}\right)<0$ ، ونعلم أن الدالة h مستمرة على $\left[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}\right]$ (دالة كثير حدود)

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً على المجال $\left[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}\right]$ ،

أي أنه يوجد عدد $\alpha\in\left[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}\right]$ حيث $h(\alpha)=0$ ، إذن $f(\alpha)=g(\alpha)$ لأن $h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)$

ومنه النقطة ذات الفاصلة α مشتركة بين المنحنيين (C_f) وَ (C_g) ، وهي وحيدة .

(التمثيل البياني أعلاه يبين ذلك) .