2- نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي :

حل التمرين 12 ص 26 ، 27 ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+3$ ، نريد دراسة سلوك $f(x)$ لمّا x يؤول إلى 2 :

1) وضع تخمين لسلوك $f(x)$ لمّا x يؤول إلى 2 :

عند حساب : $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}[2x+3]=f(2)=2(2)+3=7$ يمكن التخمين بأن نهاية الدالة f هي 7 لمّا x يؤول إلى 2 . أي أن المنحنى الممثل للدالة f يشمل النقطة $(2;7)$.

2) إيجاد مجال بحيث لما ينتمي x إليه ، $f(x)$ ينتمي إلى $]6,99;7,01[$:

معناه $6,99<f(x)<7,01$ ، يكافئ $6,99<2x+3<7,01$ ، ومنه $3,99<2x<4,01$

يكافئ $1,995<x<2,005$

إذن: $x\in]1,995;2,005[$.

3) α عدد حقيقي حيث : $0<\alpha<1$

- إيجاد المجال الذي يجب أن ينتمي إليه x لمّا $f(x)$ ينتمي إلى $]7-\alpha;7+\alpha[$:

معناه $7-\alpha<2x+3<7+\alpha$ ، يكافئ $7-\alpha-3<2x+3-3<7+\alpha-3$ ، ومنه $4-\alpha<2x<4+\alpha$ ، و هذا يكافئ $\frac{4-\alpha}{2}<x<\frac{4+\alpha}{2}$ ،

إذن: $x\in\left]\frac{4-\alpha}{2};\frac{4+\alpha}{2}\right[$.

- عند اختيار α صغير بالقدر الذي نريد ، نجد $x=2$ ومنه نستنتج أن نهاية الدالة f هي 7 لمّا x يؤول إلى 2 . أي أن التخمين السابق صحيح .

حل التمرين 13 ص 27 ج1 :

- تخمين النهاية عند 4 للدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$:

عند حساب : $\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\left[\frac{x+2}{x-2}\right]=f(4)=\frac{4+2}{4-2}=\frac{6}{2}=3$ يمكن التخمين بأن نهاية الدالة f هي 3 لمّا x يؤول إلى 4 .

- إيجاد مجال I مركزه 4 بحيث إذا كان $x\in I$ ، فإن $f(x)\in]2,95;3,05[$:

معناه $2,95<f(x)<3,05$ ، ومنه $2,95<\frac{x+2}{x-2}<3,05$ ، بضرب طرفي المتراجحة في $(x-2)$

نجد $2,95(x-2)<x+2<3,05(x-2)$ ، ومنه $2,95x-5,9<x+2<3,05x-6,1$ ،

يكافئ $\begin{cases}x+2>2,95x-5,9\\x+2<3,05x-6,1\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}1,95x<7,9\\2,05x>8,1\end{cases}$ ، أي $\begin{cases}x<4,05\\x>3,95\end{cases}$ ، يكافئ $3,95<x<4,05$

إذن: $x\in I=]3,95;4,05[$.

حل التمرين 14 ص 27 ج1 :

- تخمين النهاية عند 2 للدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{3x+4}{(x-2)^2}$:

عند حساب : $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left[\frac{3x+4}{(x-2)^2}\right]=\frac{6+4}{0^+}=+\infty$ يمكن التخمين بأن نهاية الدالة f هي $(+\infty)$ لمّا x يؤول إلى 2 .

- إيجاد عدد حقيقي a بحيث إذا كان $x\in\left]2-a;2+a\right[$ فإن $f(x)>10^3$:

$f(x)>10^3$ معناه : $\frac{3x+4}{(x-2)^2}>10^3$ ، ومنه $3x+4>10^3(x-2)^2$ ،

أي $3x+4>10^3\left(x^2-4x+2\right)$ ، ومنه $3x+4>1000x^2-4000x+2000$

يكافئ $1000x^2-4003x+3996<0$ ،

نحل المتراجحة:

المميز: $\Delta=4009$ ومنه : $x_1=\frac{4003+\sqrt{4009}}{2000}$ ، $x_1=\frac{4003-\sqrt{4009}}{2000}$

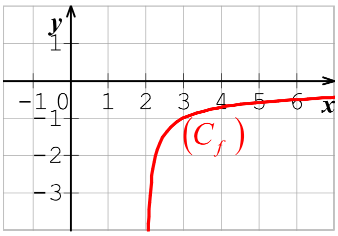
أي $\frac{4003+\sqrt{4009}}{2000}<x<\frac{4003-\sqrt{4009}}{2000}$ ومنه $1,901488751<x<2,101511249$

إذن: $x\in\left]2-1,9;2+2,1\right[$ أي $x\in\left]0,1;4,1\right[$

يمكن أخذ $\boxed{a=0,1}$.

حل التمرين 15 ص 27 ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\left]2;+\infty\right[$ بـ : $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x-2}}$:



1) لدينا (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f :

- يمكن أن نخمن بالنسبة لسلوك الدالة f عندما يؤول x إلى 2 بأن (C_f) يؤول إلى $(-\infty)$.

2) A عدد حقيقي موجب تمامًا:

- إيجاد المجال الذي ينتمي إليه x بحيث يكون $f(x)\le -A$:

حل التمرين 16 ص 27 ج1 :

1) دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ وعند 1 للدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{2x+5}{x-1}$:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+5}{x-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x}{x}\right]=2$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+5}{x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{x}\right]=2$.

$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left[\frac{2x+5}{x-1}\right]=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left[\frac{7}{0^-}\right]=-\infty$.

$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{2x+5}{x-1}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{7}{0^+}\right]=+\infty$.

2) تحديد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f :

لدينا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ و $+\infty$.

ولدينا $f(x)-2=\frac{2x+5}{x-1}-2=\frac{2x+5-2x+2}{x-1}=\frac{7}{x-1}$

ومنه منحنى الدالة f يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y=2$ لمّا $x>1$ ، ويقع تحته لمّا $x<1$.

و لدينا كذلك $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f على يسار 1 .

و لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=+\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f على يمين 1 .

حل التمرين 17 ص 27 ج1 :

f دالة عددية معرفة بـ : $f(x)=\frac{-3x}{x+2}$

1) تعيين مجموعة تعريف الدالة f ثم حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف :

$f(x)$ معرفة معناه $x+2\neq 0$ ، ومنه $x\neq -2$ ، أي أن $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$.

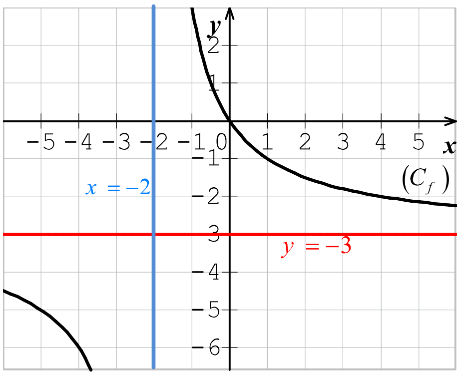
- النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-3x}{x+2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x(-3)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-3}{1+\frac{2}{x}}\right]=-3$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-2}\left[\frac{-3x}{x+2}\right]=\left[\frac{6}{0^-}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-2}\left[\frac{-3x}{x+2}\right]=\left[\frac{6}{0^+}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-3x}{x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-3}{1+\frac{2}{x}}\right]=-3$$



2) تحديد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f ودراسة وضعيته بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي :

لدينا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-3$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=-3$ مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ و $+\infty$.

ولدينا $f(x)-3=\frac{-3x}{x+2}+3=\frac{6}{x+2}$

ومنه منحنى الدالة f يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y=-3$ لمّا $x>-2$ ، ويقع تحته لمّا $x<-2$.

و لدينا كذلك $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=-\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=-2$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f على يسار -2 .

و لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=+\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=-2$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f على يمين -2 .

3- تتمات على النهايات :

حل التمرين 18 ص 27 ج1 :

أ) $f(x)=2x^3-x+1$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x^3-x+1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x^3\right]=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x^3-x+1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x^3\right]=+\infty$.

ب) $f(x)=-3x^4+2x+4$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-3x^4+2x+4\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-3x^4\right]=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-3x^4+2x+4\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-3x^4\right]=-\infty$.

ج) $f(x)=-x^3+x^2+x+1$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x^3+x^2+x+1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x^3\right]=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^3+x^2+x+1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^3\right]=-\infty$.

حل التمرين 19 ص 27 ج1 :

أ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند -1 :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x}\right]=1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x}\right]=1$.

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1}\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]=\left[\dfrac{-2}{0^-}\right]=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]=\left[\dfrac{-2}{0^+}\right]=-\infty$.

ب) $f(x)=\dfrac{2x^2+5}{x-2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 2 :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2+5}{x-2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2}{x}\right]=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2+5}{x-2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2}{x}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}\left[\dfrac{2x^2+5}{x-2}\right]=\left[\dfrac{13}{0^-}\right]=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2}\left[\dfrac{2x^2+5}{x-2}\right]=\left[\dfrac{13}{0^+}\right]=+\infty$.

ج) $f(x)=\dfrac{-4x+1}{3-x}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 3 :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{-4x+1}{3-x}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{-4x}{-x}\right]=4$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-4x+1}{3-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-4x}{-x}\right]=4$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}3} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}3}\left[\dfrac{-4x+1}{3-x}\right]=\left[\dfrac{-11}{0^+}\right]=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\left[\dfrac{-4x+1}{3-x}\right]=\left[\dfrac{-11}{0^-}\right]=+\infty$

حل التمرين 20 ص 27 ج1 :

أ) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x^2}\right]=0$

ب) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)^2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 2 :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{(x-2)^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{x^2-4x+4}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{(x-2)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right]=0$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left[\frac{x+1}{(x-2)^2}\right]=\left[\frac{3}{0^+}\right]=+\infty \ .$$

ج) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 0 :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=-\infty \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^3+1}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty \ .$$

حل التمرين 21 ص 27 ج1 :

أ) $f(x)=2x-1+\dfrac{3}{x}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 0 :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=(-\infty)-1+0=-\infty \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=+\infty \ .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=\left[0-1+\frac{3}{0^-}\right]=-\infty \ .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=\left[0-1+\frac{3}{0^+}\right]=+\infty \ .$$

ب) $f(x)=3-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند -1 :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=(-\infty)-1+0=-\infty \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=+\infty \ .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=\left[0-1+\frac{3}{0^-}\right]=-\infty \ .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=\left[0-1+\frac{3}{0^+}\right]=+\infty \ .$$

ج) $f(x)=x^2+x-\dfrac{1}{x-3}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 3 :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2+x-\frac{1}{x-3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\right]=+\infty \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2+x-\frac{1}{x-3}\right]=+\infty \ .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}3} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}3}\left[x^2+x-\frac{1}{x-3}\right]=\left[9+3-\frac{1}{0^-}\right]=+\infty \ .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}3} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}3}\left[x^2+x-\frac{1}{x-3}\right]=\left[9+3-\frac{1}{0^+}\right]=-\infty \ .$$

حل التمرين 22 ص 27 ج1 :

أ) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(4-x)}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 1 ، وعند 4 :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{5x-x^2-4}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{x^2}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{5x-x^2-4}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x^2}\right]=0 \,.$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right]=\left[\frac{1}{(0^-)3}\right]=-\infty \,.$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right]=\left[\frac{1}{(0^+)3}\right]=+\infty \,.$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}4} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}4}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right]=\left[\frac{1}{3(0^+)}\right]=+\infty \,.$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}4} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}4}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right]=\left[\frac{1}{3(0^-)}\right]=-\infty \,.$$

ب) $f(x)=2x+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{3-x}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند -1 ، وعند 3 :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2x+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{3-x}\right]=[-\infty+0-0]=-\infty \,.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{3-x}\right]=[+\infty+0-0]=+\infty \,.$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\left[2x+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{3-x}\right]=\left[-2+(-\infty)-\frac{1}{2}\right]=-\infty \,.$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left[2x+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{3-x}\right]=\left[-2+(+\infty)-\frac{1}{2}\right]=+\infty \,.$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}3} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}3}\left[2x+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{3-x}\right]=\left[6+\frac{1}{4}-(+\infty)\right]=-\infty \,.$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}3} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}3}\left[2x+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{3-x}\right]=\left[6+\frac{1}{4}-(-\infty)\right]=+\infty \,.$$

ج) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{(x+2)^2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند -2 :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2+\frac{1}{(x+2)^2}\right]=[+\infty+0]=+\infty \,.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2+\frac{1}{(x+2)^2}\right]=[+\infty+0]=+\infty \,.$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-2}\left[x^2+\frac{1}{(x+2)^2}\right]=\left[4+\frac{1}{0^+}\right]=+\infty \,.$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-2}\left[x^2+\frac{1}{(x+2)^2}\right]=\left[4+\frac{1}{0^+}\right]=+\infty \,.$$

حل التمرين 23 ص 28 ج1 :

أ) $f(x)=2x^2+\sqrt{x}+1$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x^2+\sqrt{x}+1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x^2\right]=+\infty$.

ب) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+2\sqrt{x}$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$ و عند 1 :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x-1}+2\sqrt{x}\right]=0+(+\infty)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left[\dfrac{1}{x-1}+2\sqrt{x}\right]=\left[\dfrac{1}{0^-}+2\right]=-\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left[\dfrac{1}{x-1}+2\sqrt{x}\right]=\left[\dfrac{1}{0^+}+2\right]=+\infty$.

حل التمرين 24 ص 28 ج1 :

أ) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-2}$ ، دراسة النهاية عند 4 :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}4} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}4}\left[\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-2}\right]=\left[\dfrac{5}{0^-}\right]=-\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}4} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}4}\left[\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-2}\right]=\left[\dfrac{5}{0^+}\right]=+\infty$.

ب) $f(x)=(1-x)\left(2-\sqrt{-x}\right)$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ و عند 0 :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(1-x)\left(2-\sqrt{-x}\right)\right]=(+\infty)(-\infty)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[(1-x)\left(2-\sqrt{-x}\right)\right]=1\times0=0$.

حل التمرين 25 ص 28 ج1 :

أ) $f(x)=\dfrac{2}{x}-\cos x$ ، دراسة النهاية عند 0 و عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left[\dfrac{2}{x}-\cos x\right]=\left[\dfrac{2}{0^-}+1\right]=-\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\dfrac{2}{x}-\cos x\right]=\left[\dfrac{2}{0^+}+1\right]=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x}-\cos x\right]=0-\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ (غير معرفة) .

ب) $f(x)=\sin(2x)+x$ ، دراسة النهاية عند $\dfrac{\pi}{4}$ و عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\sin(2x)+x\right]=\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{\pi}{4}\right]=1+\dfrac{\pi}{4}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x}-\cos x\right]=0-\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$.

حل التمرين 26 ص 28 ج1 :

أ) $f(x)=x^3+x^2-x-1$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^3+x^2-x-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x^3\right]=+\infty .$$

ب) $f(x)=\dfrac{x+2}{3-\sqrt{x}}$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+2}{3-\sqrt{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-1\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}}{\frac{3}{\sqrt{x}}-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\sqrt{x}\right]=-\infty .$$

حل التمرين 27 ص 28 ج1 :

أ) $f(x)=\sqrt{x}-1-2x$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}-1-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}-2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-2x\right]=-\infty .$$

ب) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1-\sqrt{x}}{x^2+2}$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x+1-\sqrt{x}}{x^2+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]=1 .$$

حل التمرين 28 ص 28 ج1 :

أ) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right].$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right]=0$$

ب) $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-x$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2-x+1}+x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}\right].$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{=x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x+1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+1}\right]=-\frac{1}{2}$$

حل التمرين 29 ص 28 ج1 :

الحالة (1) :

لدينا حسب التمثيل البياني : محور التراتيب مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f
أي أن الدالة f غير معرفة عند $x=0$
ولدينا المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f
أي أن الدالة f غير معرفة عند $x=2$.
ومنه مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=\mathbb{R}-\{0;2\}=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$.

النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2} f(x)=-\infty$ ،
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

الحالة (2) :

لدينا حسب التمثيل البياني : محور التراتيب مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f
أي أن الدالة f غير معرفة عند $x=0$
ومنه مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

الحالة (3) :

لدينا حسب التمثيل البياني : المستقيمان ذو المعادلتان $x=1$ وَ $x=-1$ مقاربان عموديان لمنحنى الدالة f ، أي أن الدالة f غير معرفة عند $x=1$ وَ $x=-1$
ومنه مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=-\infty$ ،
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

الحالة (4) :

لدينا حسب التمثيل البياني : محور التراتيب مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f
أي أن الدالة f غير معرفة عند $x=0$
ومنه مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.