3AS BAC رياضيات 1

المتتاليات — الإشتقاق والتكامل
حساب المثلثات — الأعداد الأولية
النهايات — التحويلات النقطية
الموافقات — الأعداد المركبة

دنان عمر

المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية

	المتتاليات الحسابية	المتتاليات الهندسية
تعريف	$U_{n+1} = U_n + r, \quad r \in R$	$U_{n+1} = U_n . q \quad , q \in IR$
الأساس	r	q
الحد العام	$U_n = U_0 + nr$ $U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = U_0 . q^n \ , \ U_n = U_p . q^{n-p}$
المجموع $S = U_0 + \cdots + U_n$	$S = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$	$S = U_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad q \neq 1$
النهايات	إذا كان $r > 0$ فإن: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ إذا كان $r < 0$ فإن: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$	إذا كان $\lvert q \rvert < 1$ فإن: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$، U متقاربة إذا كان $q > 1$ فإن: U متباعدة

اتجاه تغيير متتالية

تكون المتتالية العددية U :

– متزايدة إذا كان من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n \geq 0$

– متناقصة إذا كان من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n \leq 0$

– ثابتة إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = 0$

تكون c,b,a ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية إذا كان $a + c = 2b$

تكون c,b,a ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية إذا كان $ac = b^2$

img427.jpg

$f(x) = U' . U^n$	$f(x) = \frac{U'}{U^n}$ $(n \in N , n \geq 2)$	$f(x) = \frac{U'}{\sqrt{U}}$	إذا كانت f دالة من الشكل
$F(x) = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1) U^{n-1}} + C$	$F(x) = 2\sqrt{U} + C$	فإن الدالة الأصلية لـ f هي :

$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$
$F(x) = -\cos(x) + C$	$F(x) = \sin(x) + C$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1) x^{n-1}} + C$
R	R	$]0 , +\infty[$	$]0 , +\infty[$ $]-\infty , 0[$

مشتق الدول المألوفة

الدالة	مجموعة تعريفها	الدالة المشتقة	مجال اشتقاقها
$f(x) = ax + b$	R	$f'(x) = a$	R
$f(x) = x^n$	R	$f'(x) = n x^{n-1}$	R
$f(x) = \frac{1}{x}$	R*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	R*
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	R*	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	R*
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0 , +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 , +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	R	$f'(x) = -\sin(x)$	R
$f(x) = \sin(x)$	R	$f'(x) = \cos(x)$	R

كليك للنشر
ClicÉdition
حي الكثبان، عمارة أ، مدخل 10 محل 23، المحمدية، الجزائر.
الهاتف: 021 82 00 15 / 021 82 96 37 ، الفاكس: 021 82 96 37.
البريد الإلكتروني: clicedition@gmail.com
2008-065

حساب المثلثات

■ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

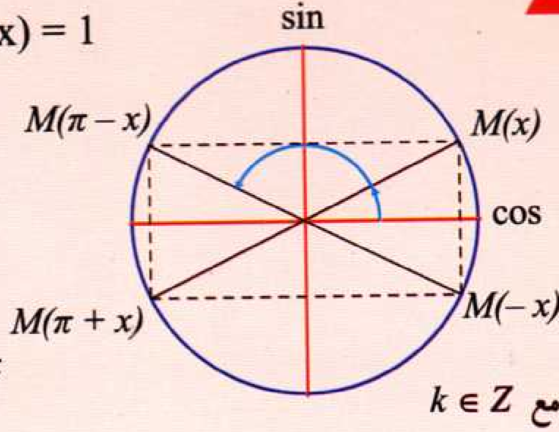
$\cos(-x) = \cos x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$



$\sin(-x) = -\sin x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

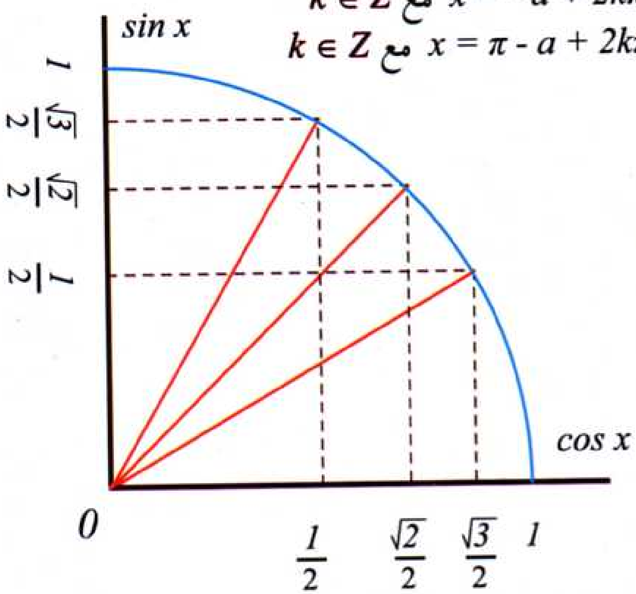
$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$

مع $k \in Z$

$\cos x = \cos a$ معناه أن : $x = a + 2k\pi$ أو $x = -a + 2k\pi$ مع $k \in Z$

$\sin x = \sin a$ معناه أن : $x = a + 2k\pi$ أو $x = \pi - a + 2k\pi$ مع $k \in Z$



$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

الزوايا الشهيرة

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

الموافقات في Z

■ **تعريف :** n عدد طبيعي غير معدوم، نقول أن العددان الصحيحان a و b متوافقان بترديد n يعني أن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n و نكتب :

$a \equiv b\,[n]$ ونقرأ a يوافق b بترديد n

■ **خواص :** a, b, c, d أعداد صحيحة n و p عددان طبيعيان غير معدومين.

$a \equiv a\,[n]$

إذا كان $a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$ فإن $a + c \equiv b + d\,[n]$

إذا كان $a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$ فإن $a.c \equiv b.d\,[n]$

إذا كان $a \equiv b\,[n]$ فإن $a.c \equiv b.c\,[n]$

إذا كان $a \equiv b\,[n]$ فإن $a^p \equiv b^p\,[n]$

إذا كان $a \equiv b\,[n]$ و $b \equiv c\,[n]$ فإن $a \equiv c\,[n]$

نظريات الاشتقاق

الدالة	U/V V لا تنعدم على مجالها	$1/V$ V لا تنعدم على مجالها	U^n $(n \in N, n \geq 2)$	$U.V$	$\lambda.U$	$U+V$
الدالة المشتقة	$\frac{U'V - V'U}{V^2}$	$-\frac{V'}{V^2}$	$n.U'U^{n-1}$	$U'V + V'U$	$\lambda.U'$	$U' + V'$

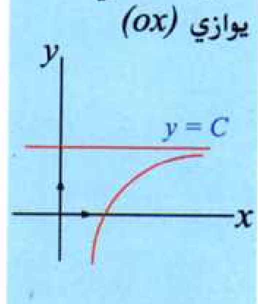
الدالة	$f(x) = 0$	$f(x) = a$	$f(x) = x^n$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
الدالة الأصلية	$F(x) = C$	$F(x) = ax + C$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$
مجال قابليتها	R	R	R	$]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, +\infty[$

الفروع اللانهائية

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x)$

- $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = C$

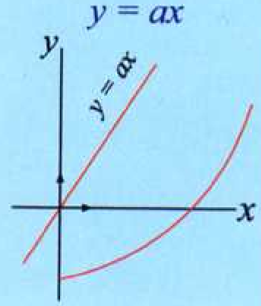
  $y = C$ مستقيم مقارب للمنحني يوازي (ox)



- $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = \infty$ ← $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =$

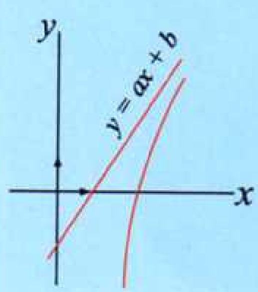
  - a:
    - $\lim\limits_{|x| \to +\infty} (f(x) - ax) = \infty$

      يوجد فرع قطع مطافئ منحاه هو منحى المستقيم $y = ax$



    - $\lim\limits_{|x| \to +\infty} (f(x) - ax) = b$

      $y = ax + b$ معادلة الخط المقارب المائل



  - 0: يوجد فرع قطع مطافئ منحاه (ox)
  - ∞: يوجد فرع قطع مطافئ منحاه (oy)

■ المستقيم المقارب $x = d$ موازي لمحور التراتيب إذا كانت $\lim\limits_{x \to d} f(x) = \infty$

■ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني C يعني أن
$\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ مع $a \neq 0$

الأعداد الأولية

تعريف: نقول أن العدد الطبيعي n أنه أولي معناه أنه يقبل قاسمين فقط في N هما 1 و العدد نفسه

■ **مبرهنة بيزو:** نقول عن العددان الصحيحان a و b أنهما أوليان فيما بينهما إذا وجد عددان صحيحان x و y يحققان: $ax + by = 1$

خواص:

- إذا كان d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان x و y بحيث: $ax + by = d$
- إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a عدد أولي مع جدائهما bc

الأعداد المركبة

قواعد الحساب

مع $\begin{cases} z = x + iy \\ z' = x' + iy' \end{cases}$ (x' . y' . x . y : أعداد حقيقية)

الشكل الجبري لعدد مركب هو : $z = x + i y$

مع :

x و y أعداد حقيقية و $i^2 = -1$

x هو الجزء الحقيقي و y هو الجزء التخيلي

$z = 0$ يكافئ $x = 0$ و $y = 0$

z حقيقي يكافئ $y = 0$

z تخيلي صرف يكافئ $x = 0$

$z' = z$ يكافئ $x = x'$ و $y = y'$

$z + z' = x + x' + i(y + y')$

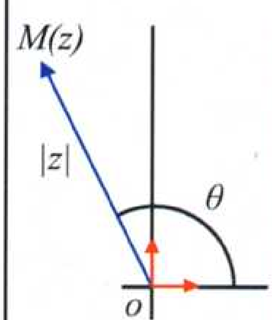
مرافق عدد مركب

إذا كان $z = x + iy$ فإن مرافق z هو العدد $\bar{z} = x - iy$

خواص المرافق

- ■ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- ■ $\overline{zz'} = \bar{z}.\bar{z}'$
- ■ $z + \bar{z} = 2Re(z)$
- ■ $z - \bar{z} = 2i\, Im(z)$
- ■ $z\bar{z} = x^2 + y^2$
- ■ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
- ■ $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$
- ■ $\bar{\bar{z}} = z$

دستور أولر



■ $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

■ $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

الشكل المثلثي و الأسي

إذا كان $z \neq 0$

- ■ $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\, e^{i\theta}$
- ■ $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$
- ■ $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{oM}) = \text{Arg}(z) + 2k\pi$ و $k \in Z$

■ **مبرهنة غوص:** a، b، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة إذا كان العدد a يقسم جداء العددين $b.c$ وكان أوليا مع أحدهما فهو يقسم الآخر.

■ **تحليل عدد إلى جداء عوامل أولية :** كل عدد طبيعي $n \geq 2$ يمكن كتابته على شكل وحيد :

$$n = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times ...... \times P_k^{\alpha_k}$$

P_i أعداد أولية حيث : $P_1 < P_2 < ..... P_k$

α_i أعداد طبيعية.

■ عدد قواسم n هو : $(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1) \times ...... \times (\alpha_k+1)$

دستور موافر

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

في الهندسة

$$AB = |z_B - z_A|$$

إذا كان z_A و z_B و z_C أعداد مركبة مختلفة :

$$k \in Z \quad \begin{cases} (\vec{u},\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi \\ (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) + 2k\pi \end{cases}$$

لاحقة مرجح

a و b عددان حقيقيان حيث $a + b \neq 0$.

G مرجح الجملة $\{ (A,a) , (B,b) \}$:

$\dfrac{az_A + bz_B}{a+b}$ هي لاحقة النقطة G

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} \qquad y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b}$$

خواص z و z' عددان مركبان غير معدومين حيث $z = re^{i\theta}$ و $z' = r'e^{i\theta'}$ مع $r = |z|$ و $r' = |z'|$

$\arg(zz') = \arg z + \arg z'$	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert . \lvert z'\rvert$	$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
$\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg z'$	$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$	$\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}e^{i(-\theta')}$
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$	$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
$\arg(z^n) = n\arg z$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$z^n = r^n e^{i(n\theta)}$
$\arg(\bar{z}) = -\arg z$	$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$	$\bar{z} = re^{i(-\theta)}$

التحويلات النقطية في المستوي

$$f: P \to P \qquad M'(x',y') \quad M(x,y)$$
$$M \mapsto M'$$

الشكل المركب	خواص	تعريف M' – النقط الصامدة	ال
$z' = z + z_{\vec{u}}$ حيث $z_{\vec{u}}$ هي لاحقة $\vec{u}$	$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ $MNN'M'$ متوازي أضلاع	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$: كل النقط صامدة إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$: لا توجد نقاط صامدة	$T_{\vec{u}}$ إ N'
$z' = -z + 2z_w$ حيث z_w هي لاحقة w إذا كانت O هي المركز فإن $z' = -z$	$\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$ $MNM'N'$ متوازي أضلاع	$\overrightarrow{WM'} = -\overrightarrow{WM}$ المركز هي النقطة الصامدة الوحيدة	S_W تنا
	$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ $MNN'M'$ شبه منحرف متساوي الساقين	كل نقطة من Δ هي نقطة صامدة. إذا كان $M \in \Delta$ لدينا $M' = M$ إذا كان $M \notin \Delta$ لدينا Δ محور تناظر القطعة المستقيمة MM'	S_Δ تنا M'
$z' - z_w = k(z' - z_w)$ حيث z_w هي لاحقة w إذا كانت O هي المركز فإن $z' = kz$	$\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ $MNN'M'$ شبه منحرف	$\overrightarrow{WM'} = k\overrightarrow{WM}$ إذا كان $k \neq 1$ فإن W هي النقطة الصامدة الوحيدة إذا كان $k = 1$ فإن كل النقطة صامدة.	$W,k)$ ونسبت N'
$z' - z_w = e^{i\alpha}(z' - z_w)$ إذا كانت O هي المركز فإن $z' = e^{i\alpha} z$	$M'N' = MN$ $(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{MN}) = \alpha + 2k\pi$ $k \in Z$	إذا كان $M \neq W$ فإن : $\begin{cases} WM' = WM \\ (\overrightarrow{WM}, \overrightarrow{WM'}) = \alpha + 2k\pi \end{cases}$ W هي النقطة الصامدة الوحيدة	(W,α) N'
$z' - z_w = ke^{i\alpha}(z' - z_w)$ إذا كانت O هي المركز فإن $z' = ke^{i\alpha} z$	$M'N' \neq MN$ $(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{MN}) = \alpha + 2k\pi$ $k \in Z$	إذا كان $M \neq W$ فإن W هي النقطة الصامدة الوحيدة	$,W)$ M'

عمليات على النهايات

$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) =$	$l+l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	عدم التعيين

$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	l	$l \neq 0$	0	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) =$	$l \cdot l'$	$\pm\infty$	عدم التعيين	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	l	$l \neq 0$	l	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	$l' \neq 0$	0	$\pm\infty$	l'	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	l / l'	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	عدم التعيين	عدم التعيين

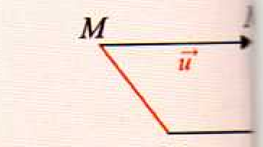
- توجد أربعة أشكال لعدم التعيين وهي :
  - $0 \times \infty$ ، $+\infty - \infty$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

- بجوار x_0 أو $+\infty$ أو $-\infty$
  - إذا كانت $f(x) \geq g(x)$ وإذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  - إذا كانت $f(x) \leq g(x)$ وإذا كانت $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  - إذا كانت $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ وإذا كانت $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} h(x) = l$
    فإن $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$

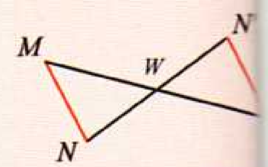
- نهاية دالة مركبة
  - إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ وإذا كانت $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ حيث c,b,a أعداد حقيقية
    فإن : $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$

ويل النقطي

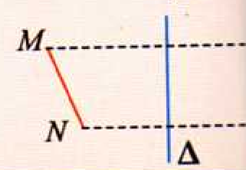
اب شعاعه $\vec{u}$



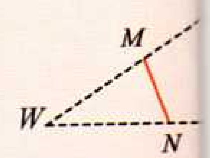
مركزه W



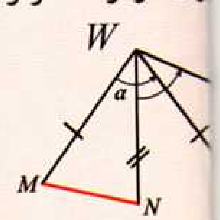
محوره Δ



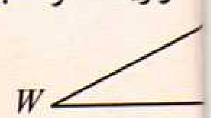
حاكي مركزه W
غير معدومة



ران مركزه W و زاويته α.



S تشابه مباشر مركزه W
زاويته α و نسبته k.



دنان عمر

الحساب التكاملي

تعريف: f دالة مستمرة على المجال I من R .
a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$.
نسمي تكامل f من a إلى b العدد الحقيقي المعرف كما يلي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

حيث F دالة أصلية للدالة f على I

خواص: f و g دالتان مستمرتان على المجال I .
c ،b ،a ثلاث أعداد حقيقية من I.

■ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ ■ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

■ $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

■ $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

■ $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

■ إذا كان $a \leq b$ و $f(x) \geq 0$ ومن أجل كل x من I: $\int_a^a f(x)\,dx \geq 0$

■ إذا كان $a \leq b$ و $f(x) \leq g(x)$ ومن أجل كل x من I: $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

نظرية القيمة المتوسطة

f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ و $f([a,b]) = [m,M]$ فإن $m(b-a) \leq \int_a^a f(t)\,dt \leq M(b-a)$

نتائج : إذا كان $a \neq b$ فإن : $m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t)\,dt \leq M$

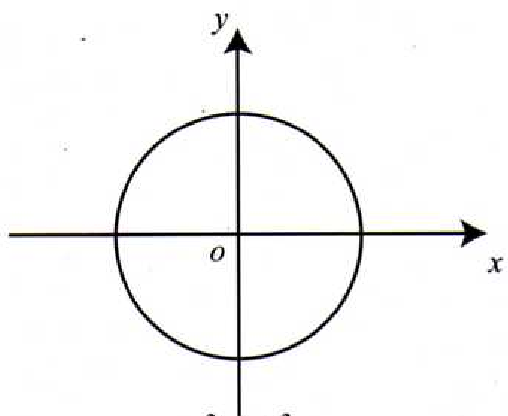
نسمي $\bar{f} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t)\,dt$ القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I

التكامل بالتجزئة

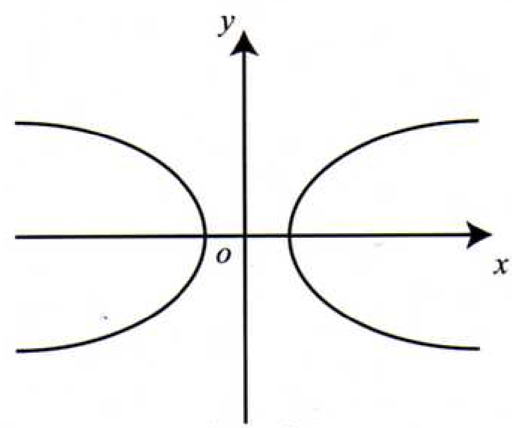
لتكن u و v دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال I بحيث دالتهما المشتقة u' و v' مستمرتان على I وليكن a و b من I

$$\int_a^b u(x).v'(x)\,dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\,dx$$

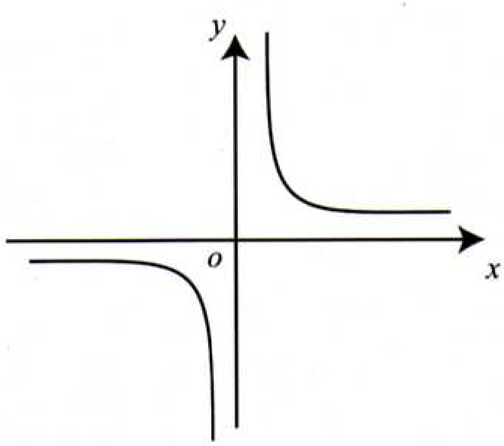
الخاصية	نقول أن	إذا كان
$P(\emptyset)=0$	A هي الحادثة المستحيلة	$A=\emptyset$
$1 \geq P(A) \geq 0$	A حادثة كيفية	A
$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$	A و B حادثين غير متلائمتين	$A \cap B=\emptyset$
$P(E)=1$	A هي الحادثة الأكيدة	A=E
$P(\bar{A})=1-P(A)$	A هي الحادثة العكسية	$\bar{A}$
$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$	A و B كيفيتان	B,A



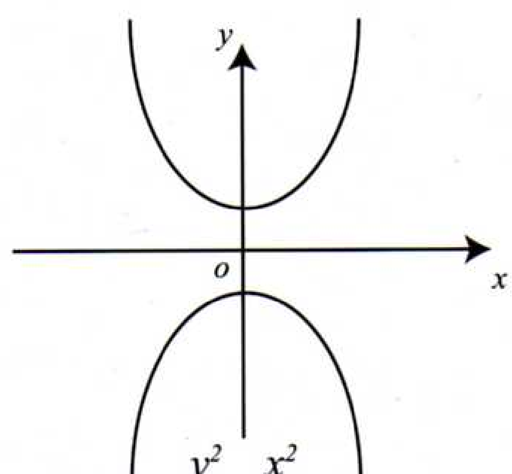
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$xy=1$$



$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

كليك للنشر
ClicÉdition

حي الكتبان، عمارة أ، مدخل 10 محل 23، المحمدية، الجزائر.
الهاتف: 15 00 82 021 / 37 96 82 021، الناسوخ: 37 96 82 021.
البريد الإلكتروني: clicedition@gmail.com

2008-066

تصميم: حمايدي حسين

الدالة الأسية ذات الأساس e

تعريف: توجد دالة وحيدة قابلة للإشتقاق على R بحيث $f'=F$ و $f(0) = 1$

ونرمز لها بالرمز exp ونسميها الدالة ذات الأساس e

نتائج:

- من أجل x من R و X من R_+^* لدينا:

$$e^x = X \text{ معناه } x = \ln X$$

$$\ln e = 1 \, , \, e^{\ln x} = x$$

- الدالة الآسية معرفة وقابلة للإشتقاق على R وتساوي دالتها المشتقة

– إذا كانت $u(x)$ قابلة للإشتقاق على D فإن الدالة $x \to e^{u(x)}$ قابلة على D ودالتها المشتقة هي :

$$x \to u'(x)e^{u(x)}$$

الدالة الأسية ذات الأساس a

ليكن $a \in R_+^*$ من أجل كل x من R لدينا

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

خواص:

من أجل العددان الحقيقيان الموجبان تماما a و b ومن أجل الحقيقيان xوy لدينا :

- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ • $(a^x)^y = a^{xy}$ • $a^x . a^y = a^{x+y}$ • $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ • $\frac{1}{a^y} = a^{-y}$

- $(a.b)^x = a^x . b^x$ • $1^x = 1$

خواص:

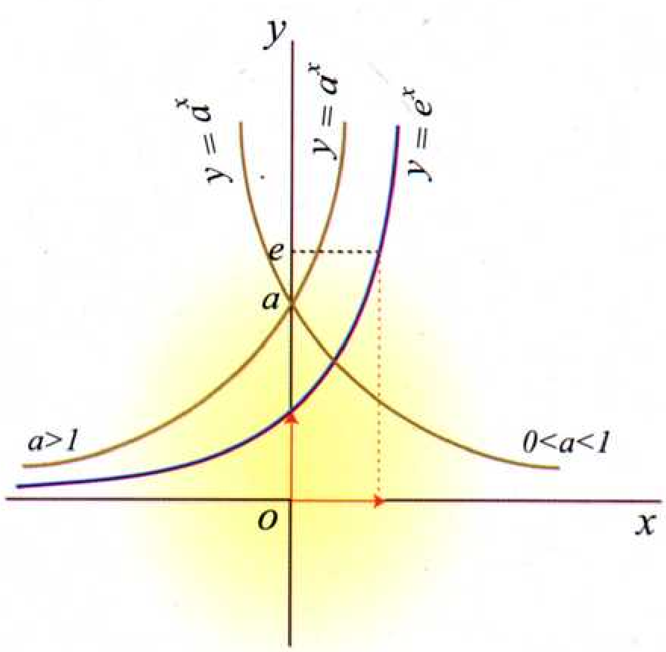
من أجل الأعداد الحقيقية x، a و b لدينا :

- $e^x > 0$ • $e^0 = 1$ • $e^1 = e$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ • $e^{a+b} = e^a . e^b$
- $e^a = e^b$ يكافئ $b = a$ • $e^{b-a} = \frac{e^b}{e^a}$
- $e^a < e^b$ يكافئ $a < b$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$



• قوام عناصر مجموعة منتهية:

E مجموعة منتهية ذات n عنصرا حيث $n \geq 1$ و P عدد طبيعي، $P \geq 1$.

■ عدد قوائم ذات P عنصرا من E هو: n^P .

• الترتيبات:

E مجموعة ذات n عنصرا و P عدد طبيعي غير معدوم حيث $P \leq n$.

عدد ترتيبات P عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا هو العدد الطبيعي A_n^P المعرف كما يلي:

$$A_n^P = n(n-1)(n-2).....(n-P+1)$$

• التبديلات:

عدد تبديلات مجموعة ذات n عنصرا هو $n!$ المعرف كما يلي:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ..... \times 2 \times 1$$

• التوفيقات:

n و P عددان طبيعيان حيث $P \leq n$

عدد توفيقات P عنصرا من مجموعة ذات n عنصر هو العدد C_n^P أو $\binom{P}{n}$ المعرف كما يلي:

$$C_n^P = \frac{n!}{P!\,(n-P)!}$$

• المثلث العددي:

n \ P	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$$C_{n-1}^{P-1} + C_{n-1}^{P} = C_n^P$$

• دستور ثنائي الحد:

a و b عددان طبيعيان و n عدد طبيعي حيث: $n > 1$

$$(a+b)^n = \sum_{P=0}^{n} C_n^P \, a^{n-p} \, . \, b^P$$

$$= a^n + C_n^a \, a^{n-1} b + ... + C_n^P \, a^{n-p} \, b^P + ... + b^n$$

لسحب P كرة من صندوق يشمل n كرة توجد عدّة حالات

في آن واحد	على التوالي	السحب
	قائمة n^P	تعاد الكرة إلى الصندوق
توفيقة C_n^P	ترتيبة A_n^P	لا تعاد الكرة إلى الصندوق

• خواص:

n و P عددان طبيعيان حيث $P \leq n$

■ $C_n^P = C_n^{n-P}$ ■ $C_{n-1}^{P-1} + C_{n-1}^{P} = C_n^P$ ■ $C_n^n = 1$ ■ $A_n^P = \dfrac{n!}{(n-P)!}$

الدالة اللوغاريتمية النيبرية

تعريف: دالة $ln(x)$ معرفة وقابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ ومن أجل كل x من هذا المجال

$$ln(1) = 0 \qquad ln'(x) = \frac{1}{x}$$

خواص:

من أجل العددان الحقيقيان الموجبان تماما a و b لدينا:

$$ln\frac{a}{b} = ln(a) - ln(b) \qquad ln\frac{1}{b} = -ln(b)$$

$$ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}ln(a) \,,\; ln(a^n) = n.ln(a) \;,\; n \in Z$$

$a = b$ يكافئ $ln(a) = ln(b)$

$a > b$ يكافئ $ln(a) > ln(b)$

$0 < a < 1$ يكافئ $ln(a) < 0$

$a > 1$ يكافئ $ln(a) > 0$

$$ln(a.b) = ln(a) + ln(b)$$

■ النهايات:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$$

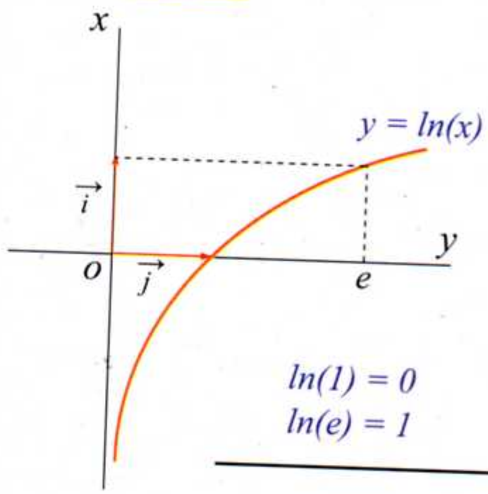
$$\lim_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} x.ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} ln(x) = -\infty$$

■ المشتق

– إذا كانت $u(x)$ قابلة للإشتقاق وموجبة تماما على المجال D فإن الدالة $ln\,(u(x))$ قابلة على D ودالتها المشتقة هي:

$$(ln \circ u)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$



دالة اللوغاريتم العشري

تعريف: نسمي دالة اللوغاريتم العشري التي نرمز لها بالرمز log معرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي:

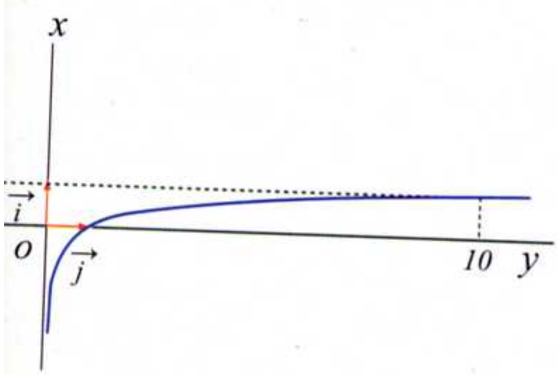
$$log(x) = \frac{ln(x)}{ln\,10}$$

■ خواص:

من أجل العددان الحقيقيان الموجبان تماما a و b

لدينا:

- $log(a.b) = log(a) + log(b)$
- $log(a^n) = n.log(a) \;,\; n \in Z$
- $log\,10 = 1 \qquad log\,1 = 0$



● **نتيجة:** إذا كان x عددا حقيقيا موجبا تماما حيث: $10^n \leq x \leq 10^{n+1}$ فإن $n \leq log\,x \leq n+1$

المعادلات التفاضلية : حلول المعادلة $y' = ay$

● **مبرهنة 1**

ليكن a عددا حقيقيا غير معدوم

الحلول على R للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي الدوال f المعرفة على R كما يلي :

$$f(x) = C \, . \, e^{ax} , C \in R$$

● **مبرهنة 2**

b و a عددا حقيقيا حيث a غير معدوم

الحلول على R للمعادلة التفاضلية $y' = ay+b$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = C \, . \, e^{ax} - \frac{b}{a} , C \in R$$

الحساب في معلم متعامد و متجانس

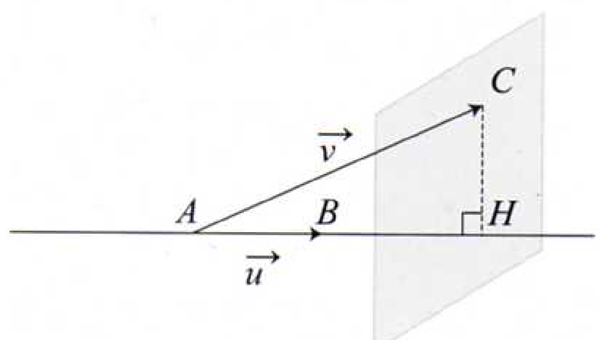
الجداء السلمي

ليكن الشعاعان $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ شعاعان من الفضاء حيث $(\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0})$

■ الجداء السلمي $\overrightarrow{uv}$ هو العدد الحقيقي :

$$\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = \overline{AB} \times \overline{AH}$$

حيث H هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) الموجه.



إذا كان $\overrightarrow{u} \neq 0$ و $\overrightarrow{v} \neq 0$ فإن :

$$\overrightarrow{uv} = ||\overrightarrow{u}|| \, . \, ||\overrightarrow{v}|| \, . \cos \theta$$

θ هي قيس الزاوية $\widehat{BAC}$

خواص :

ليكن : $\overrightarrow{u}$ ، $\overrightarrow{v}$ ، $\overrightarrow{w}$ أشعة ، k عدد حقيقي.

$$\overrightarrow{v} \, \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \, \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{v} (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \, \overrightarrow{w}$$

$$\overrightarrow{v} (k \overrightarrow{u}) = k (\overrightarrow{v} \, \overrightarrow{u})$$

بالتعريف : الشعاعان $\overrightarrow{u} , \overrightarrow{v}$ متعامدان إذا كان :

$$\overrightarrow{u} \, \overrightarrow{v} = 0$$

■ $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 + 2 \overrightarrow{v} \, \overrightarrow{u}$

■ $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 - 2 \overrightarrow{v} \, \overrightarrow{u}$

■ $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

مع $\overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$ و $\overrightarrow{v}^2 = ||\overrightarrow{v}||^2$

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

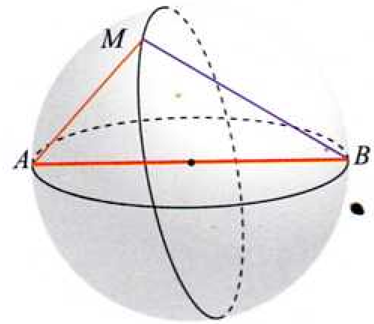
إذا كان $\overrightarrow{u} (x, y, z)$ و $\overrightarrow{v} (x', y', z')$ شعاعان من الفضاء

$$\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| . ||\overrightarrow{v}|| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

• سطح كرة

سطح الكرة التي مركزها $c(a,b,c)$ ونصف قطرها $R > 0$ هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث : $CM = R$



المعادلة الديكارتية لسطح هذه الكرة هي

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

■ **معادلة كرة معرفة بقطرها AB**

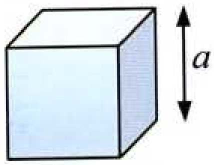
A و B نقطتان من الفضاء.

مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ هي سطح الكرة التي قطرها AB

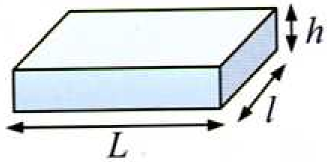
■ إذا كانت $A(x_0,y_0,z_0)$ و $B(x_1,y_1,z_1)$ نقطتين مختلفتين فإن معادلة سطح الكرة التي قطرها AB هي :

$$(x-x_0)(x-x_1)+(y-y_0)(y-y_1)+$$
$$(z-z_0)(z-z_1)=0$$

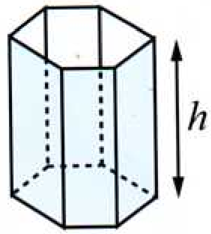
• الحجوم



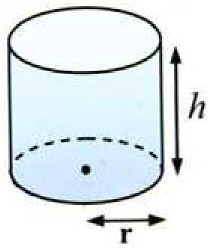
$V = a^3$



$V = L \times l \times h$

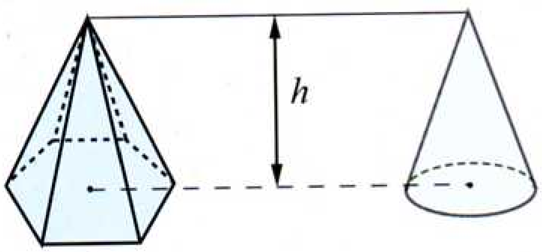


$V = B \times h$



$V = \pi r^2 \times h$

B : مساحة القاعدة



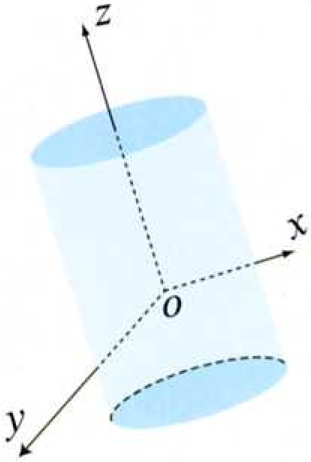
$V = \frac{1}{3} B \times h$

B : مساحة القاعدة

• السطح الأسطواني الدوراني

المعادلة الديكارتية للسطح الأسطواني الدوراني الذي محوره OZ ونصف قطره r هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث :

$$x^2+y^2=r^2$$



• طويلة شعاع

إذا كان $\vec{u}\,(x,y,z)$ شعاع من الفضاء فإن :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

• المسافة بين نقطتين

لتكن $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ نقطتان من الفضاء

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

• التمثيل الشعاعي لمستقيم

لتكن A , B نقطتان مختلفتان من الفضاء.

المستقيم (AB) هي مجموعة النقاط من الفضاء التي من أجلها يوجد عدد حقيقي k والتي تحقق :

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$$

■ **التفسير في معلم**

ليكن $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم D

لتكن $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ إحداثيات النقطة M.

المساواة $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ تكتب

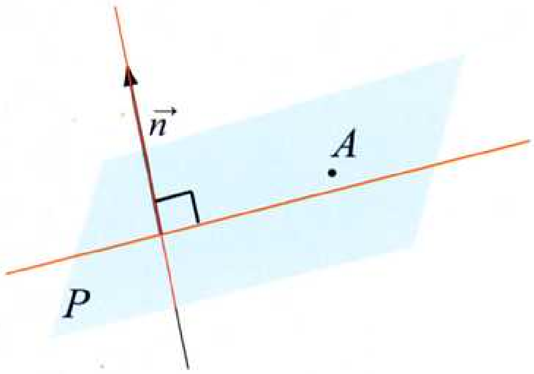
$$\begin{cases} x = x_A + k\,\alpha \\ y = y_A + k\,\beta \\ z = z_A + k\,\gamma \end{cases} \qquad k \in R$$

تسمى التمثيل الوسيطي للمستقيم D

• المستوي

يوجد مستو وحيد P في الفضاء يمر من النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وعمودي على الشعاع غير المعدوم $\vec{n}\,(a,b,c)$ هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق : $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$

أي : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$



■ لتكن a، b، c ثلاث نقط ليست كلها معدومة :
مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة

$$ax+by+cz+d=0$$

هي معادلة المستوي P العمودي على الشعاع $\vec{i}\,(a,b,c)$

• بعد نقطة عن مستوي

ليكن P المستوي الذي معادلته :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$A(x_0,y_0,z_0)$ نقطة من الفضاء.

$$AH = \frac{|\,ax_0 + by_0 + cz_0 + d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$