# دراسة دالة عددية رقم 01

## الجزء الأول :

لتكن $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^4 - 4x - 3$ .

1) أدرس تغيّرات الدالة $g$ (تحسب النهايات عند $+\infty$ وَ $-\infty$).

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّين بالضبط $\alpha$ وَ $\beta$ ، حيث : $\alpha < 0 < \beta$ .

ب) تحقق أنّ : $-0,69 > \alpha > -0,7$ وَ $1,78 < \beta < 1,79$ .

ج) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ .

## الجزء الثاني :

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـــ : $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$ ، و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ وحدته $(2cm)$ .

1) عيّن نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها .

2) أ) عيّن الأعداد الحقيقية : $a$ ، $b$ ، $c$ ، $d$ ، $e$ حيث : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx^2 + dx + e}{x^3 - 1}$ وَ $(x \neq 1)$ .

ب) إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ للمنحني $(C_f)$ يطلب تعيين معادلته .

ج) أدرس وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x \neq 1$ يكون : $f'(x) = \dfrac{x^2 \times g(x)}{(x^3 - 1)^2}$ .

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

ج) أعـطـ حصرا لكل من : $f(\alpha)$ وَ $f(\beta)$ .

4) أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $-1$ .

5) أنشئ كلا من المماس $(T)$ وَ $(\Delta)$ وَ المنحني $(C_f)$ .

6) $h$ هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $h(x) = \dfrac{x^4 + 1}{|x^3 - 1|}$ .

أ) أكتب $h(x)$ دون رمز القيـــمة المطلقة .

ب) إشرح كيف يتم إنشاء $(C_h)$ المنحني الممثل للدالة $h$ ، إنطلاقا من المنحني $(C_f)$ .

ج) أنشئ المنحني $(C_h)$ في نفس المعلم السابق .

# حل مختصر للدالة رقم 01

**الجزء الأول :**

لدينا الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^4 - 4x - 3$ .

1) دراسة تغيرات الدالة $g$ :

– حساب النهايات : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$ .

– الدالة المشتقة : الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $g'(x) = 4x^3 - 4$ .

تكون : $4x^3 - 4 \geq 0$ إذا كان : $x^3 \geq 1$ ، و منه : $x \geq 1$ . ( أي تكون : $g'(x) \leq 0$ إذا كان : $x \leq 1$ ).

– جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-6$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2) أ) على المجال $]-\infty;1]$ الدالة $g$ مستمرة و رتيبة ، و صورة هذا المجال هي $[-6;+\infty[$ وَ $0 \in [-6;+\infty[$

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ ينتمي إلى $]-\infty;1[$ .

**بالمثل :** المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\beta$ من $]1;+\infty[$ .

ب) نحسب : $g(-0,7) = ....$ وَ $g(-0,69) = ....$ ، نجد أنّ : $g(-0,69) < 0 < g(-0,7)$ .

إذن : $-0,7 < \alpha < -0,69$ .

نفس الشيء بالنسبة إلى $\beta$ ، سنجد أنّ : $1,78 < \beta < 1,79$ .

3) إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**الجزء الثاني :**

لدينا $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بــ : $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$ .

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{x^3} = -\infty \text{ ، } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = -\infty \text{ ، } \lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = +\infty \ .$$

2) أ) لدينا : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx^2 + dx + e}{x^3 - 1}$ ، أي : $f(x) = \dfrac{ax^4 + -ax + bx^3 - b + cx^2 + dx + e}{x^3 - 1}$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d - a = 0 \\ e - b = 1 \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \\ e = 1 \end{cases}$ ، و منه : $f(x) = x + \dfrac{x + 1}{x^3 - 1}$ .

ب) نعلم أنّ : $\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{x+1}{x^3-1} \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{x+1}{x^3-1} = 0 \end{cases}$ ، إذن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ $(C_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ج) الوضعية : ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ ، أي : $f(x) - x = \dfrac{x+1}{x^3-1}$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x^3-1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)-y$ | | $+$ | | $-$ | ‖ | $+$ | |
| الوضعية | | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $(-1;1)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ | ‖ | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ | |

3) الدالة المشتقة : الدالة $f$ قابلة للإشتقاق من أجل كل $x$ يختلف عن $1$ و دالتها المشتقة هي :

$f'(x) = \dfrac{4x^3(x^3-1) - 3x^2(x^4+1)}{(x^3-1)^2}$ ، أي : $f'(x) = \dfrac{x^2 \times \left[4x(x^3-1) - 3(x^4+1)\right]}{(x^3-1)^2}$ ، أي :

$f'(x) = \dfrac{x^2(4x^4 - 4x - 3x^4 - 3)}{(x^3-1)^2}$ ، أي : $f'(x) = \dfrac{x^2(x^4 - 4x - 3)}{(x^3-1)^2}$ ، و منه : $f'(x) = \dfrac{x^2 \times g(x)}{(x^3-1)^2}$ .

و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة :

$x^2 \times g(x)$ ، و هي موضحة في الجدول المقابل

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $1$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $+$ | | $-$ | | | ‖ | $-$ | | $+$ | |
| $x^2 \times g(x)$ | | $+$ | | $-$ | | $-$ | ‖ | $-$ | | $+$ | |

جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | 0 | | ‖ | | 0 | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

ج) حصرا كل من $f(\alpha)$ وَ $f(\beta)$ :

1) حصر $f(\alpha)$ :

لدينا : $-0,7 < \alpha < -0,69$ ، أي : $0,23 < \alpha^4 < 0,240$ ، أي : $1,23 < \alpha^4 + 1 < 1,240......(1)$

وَ $-0,34 < \alpha^3 < -0,33$ ، أي : $-1,34 < \alpha^3 - 1 < -1,33$ ، أي : $\frac{1}{-1,34} < \frac{1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1}{-0,33}$ ،

أي : $\frac{1}{1,33} < -\frac{1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1}{0,34}........(2)$

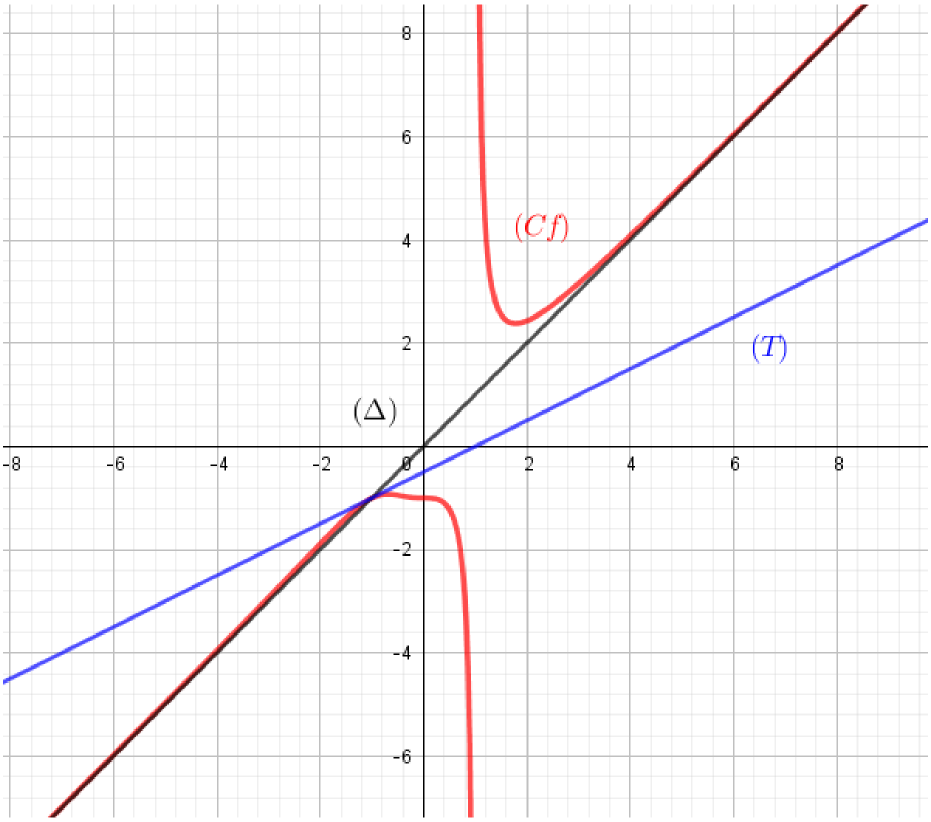
بضرب (1) وَ (2) نجد : $\frac{1,24}{1,33} < -\frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < \frac{1,23}{0,34}$ ، أي : $0,93 < -\frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < 0,92$ ،

و منه : $-0,92 < \frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3 - 1} < -0,93$ ، إذن : $-0,92 < f(\alpha) < -0,93$ .

2) حصر $f(\beta)$ : نفس الطريقة مثل حصر $f(\alpha)$ ، و نجد أنّ : $2,33 < f(\beta) < 2,42$ .

4) معادلة المماس : $(T) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ ، و منه : $(T) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ .

5) الإنشـــاء :



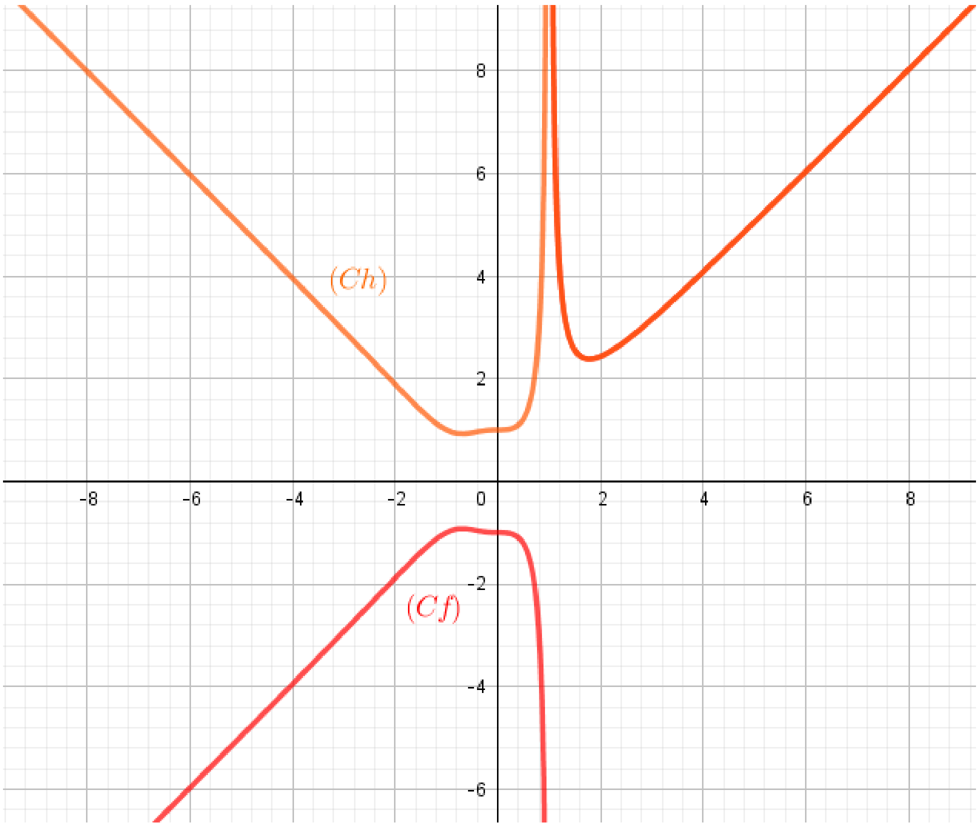

6) لدينا : $h(x) = \frac{x^4 + 1}{|x^3 - 1|}$ .

أ) كتابة الدالة $h$ دون رمز القيمة المطلقة : $h(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = f(x)..........(x > 1) \\ -\frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} = -f(x).......(x < 1) \end{cases}$

ب) $(C_h)$ ينطبق على $(C_f)$ على $]1;+\infty[$ .

$(C_h)$ نظير $(C_f)$ بالنسبة إلى محور الفواصل على $]-\infty;1[$ .

ج) الإنشـــــاء :




كتابة الأستاذ : ب.ع

# دراسة دالة عددية رقم 02

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، وحدته $(5.cm)$ .

نعتبر المنحنى $(C)$ الذي معادلته في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي : $x(x^2+y^2)+y^2-3x^2=0$ .

1) نفرض الدالة $f$ المعرّفة على $]-1;3]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2(3-x)}{x+1}}$ .

❖ بيّن أنّ المنحنى $(C)$ هو إتحاد المنحنيين $(C_1)$ وَ $(C_2)$ الممثلين للدالتين $f$ وَ $-f$ على الترتيب .

2) أ) عيّن كلا من : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ وَ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج ؟ .

ب) فسّــر النتائج هندسيا .

3) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ، مــاذا تستنتج ؟ .

4) أ) بـيّن أنّـه من أجل كل $x \in ]-1;0[ \cup ]0;3[$ يكون : $f'(x)=\dfrac{3x-x^3}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)(3-x)}}$ .

ب) إستـنـتـج إشـــارة $f'(x)$ .

ج) أحســب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ، ثـمّ فـسّـر النتيجة هندسيــاً .

د) شكّــل جدول تغيّرات الدالة $f$ .

5) أنشئ $(C_1)$ ، ثمّ أكمل إنشــاء المنحنى $(C)$ .

# حل مختصر للدالة العددية رقم 02

1) $(C)$ هو المنحنى الذي معادلته : $x(x^2+y^2)+y^2-3x^2=0$ ، أي : $x^3+xy^2+y^2-3x^2=0$ ، أي :
$y^2(x+1)=3x^2-x^3$ ، و منه : $y^2=\frac{3x^2-x^3}{x+1}$ ، إذن : $y=\sqrt{\frac{3x^2-x^3}{x+1}}$ أو $y=-\sqrt{\frac{3x^2-x^3}{x+1}}$ ، أي :
$y=\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}$ أو $y=-\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}$ ، و منه : $y=f(x)$ أو $y=-f(x)$ مع $x\in\left]-1;3\right]$ .
و عليه نقول أنّ $(C)$ هو إتحاد المنحنيين $(C_1)$ وَ $(C_2)$ الممثلين للدالتين $f$ وَ $-f$ على الترتيب .

2) أ) تعيين النهايات :

❖) $$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\sqrt{\frac{x^2(x+1)}{x+1}}}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}=\sqrt{3}\ .$$

❖) $$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x+1}}}{x}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{-x\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}}{x}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}-\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}=-\sqrt{3}\ .$$

نستنتج أنّ الدالة $f$ غير قابلة للإشتقاق عند $0$ .

ب) **التفسير الهندسي** : نقول أنّ المنحنى $(C_1)$ يقبل عند النقطة $O(0;0)$ نصفي مماسين $(T_1)$ وَ $(T_2)$ معامل توجيههما $\sqrt{3}$ وَ $-\sqrt{3}$ على الترتيب ، والنقطة $O$ هي نقطة زاوية .

3) $$\lim_{x\overset{<}{\to}3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\overset{<}{\to}3}\frac{\sqrt{\frac{x^2(3-x)}{x}}-0}{x-3}=\lim_{x\overset{<}{\to}3}x\times\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{x-3}$$ ، أي :

$$\lim_{x\overset{<}{\to}3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\overset{<}{\to}3}x\times\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}\times\frac{-1}{3-x}=\lim_{x\overset{<}{\to}3}x\times\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}\times\frac{-1}{(\sqrt{3-x})^2}$$ ، و منه :

$$\lim_{x\overset{<}{\to}3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\overset{<}{\to}3}\frac{-x}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{3-x})}=-\infty\begin{cases}-3\\0^+\end{cases}\ .$$

❖) نستنتج أنّ الدالة $f$ **لا** تقبل الإشتقاق على يسار $3$ وَ المنحنى $(C_1)$ يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $(3;0)$

4) حساب $f'(x)$ :

$$f'(x)=\frac{\frac{(6x-3x^2)(x+1)-(3x^2-x^3)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x^2-x^3}{x+1}}}=\frac{6x^2+6x-3x^3-3x^2-3x^2+x^3}{(x+1)^2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{x+1}{3x^2-x^3}}$$

أي : $$f'(x)=\frac{-2x^3+6x}{(x+1)^2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x^2-x^3}}=\frac{2(-x^3+3x)}{(\sqrt{x+1})^4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x^2-x^3}}$$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{-x^3+3x}{(\sqrt{x+1})^3}\times\frac{1}{\sqrt{3x^2-x^3}}=\frac{-x^3+3x}{(x+1)\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{\sqrt{3x^2-x^3}}=\frac{3x-x^3}{(x+1)\sqrt{(x+1)(3x^2-x^3)}}$$

و منه : $f'(x) = \dfrac{3x - x^3}{(x+1)\sqrt{x^2(x+1)(3-x)}}$ ، و هو المطلوب .

ب) نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $(3x - x^3)$ :

لدينا : $3x - x^3 = x(3 - x^2) = x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$ . سنلخص الإشارة في الجدول التالي :

❖) ممكن دراسة الإشارة على $\mathbb{R}$ ، ثم في جدول التغيرات نأخذ الإشارة فقط على $D_f$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $0$ | | $-\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $3 - x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(3x - x^3)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

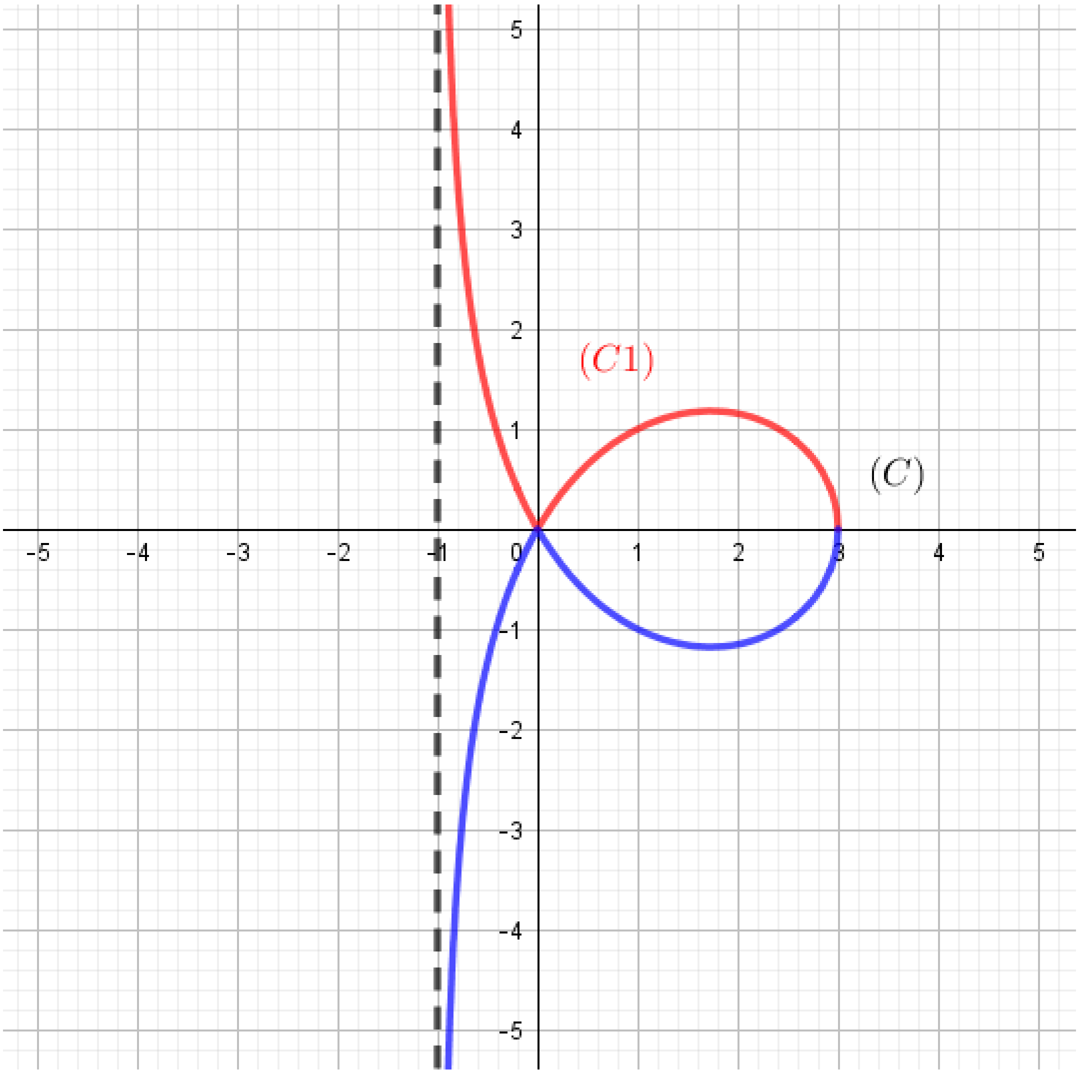
ج) حساب النهاية :

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty \begin{cases} 2 \\ 0^+ \end{cases}$ ، و منه المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحني $(C_1)$ .

د) جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $\sqrt{3}$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1,5$ | ↘ | $0$ |

5) الإنشـــاء :




كتابة الأستاذ : ب . ع

# دراسة دالة عددية رقم 03

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{-x^3-2x^2+7x+12}{(x+2)^2}$ .

و ليكن $(C_f)$ المنحني الممثّل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) أ) أحسب نهاياتِ الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب) فسّر هندسياً النهاية عند $-2$ .

2) أ) عيّن الأعداد الحقيقية : $a$ ، $b$ ، $c$ ، $d$ بحيث من أجل كل $x$ يختلف عن $-2$ تكون :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}+\frac{d}{(x+2)^2}\ .$$

ب) إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ للمنحني $(C_f)$ بجواري $+\infty$ وَ $-\infty$ .

ج) أدرس وضعية المنحني $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x\neq -2$ تكون : $f'(x)=\dfrac{(-x-1)(x^2+5x+10)}{(x+2)^3}$ .

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

4) أ) أحسب : $f(-3)$ ، ثمّ حدّد نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل .

ب) حدّد أيضا نقطة تقاطع المنحني $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب .

5) أنشئ المنحني $(C_f)$ .

6) $m$ عدد حقيقي . عيّن قيم $m$ حتّى يكون للمعادلة : $f(x)=m$ ثلاث حلول سالبة .

7) $g$ هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=f(|x|)$ .

أ) بيّن أنّ الدالة $g$ زوجية .

ب) إشرح كيف يتم إنشاء المنحني $(C_g)$ إنطلاقاً من المنحني $(C_f)$ .

ج) أنشئ المنحني $(C_g)$ في نفس المعلم السابق .

# حل مختصر للدالة رقم 03

1) أ) حساب نهايات الدالة $f$ :

❖) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ .

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$ .

❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = -\infty \begin{cases} -2 \\ 0^+ \end{cases}$ ، ❖) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = -\infty \begin{cases} -2 \\ 0^+ \end{cases}$ .

ب) **التفسير الهندسي :** المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-2$ .

2) أ) $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2} + \dfrac{d}{(x+2)^2} = \dfrac{ax(x+2)^2 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d}{(x+2)^2}$ ، أي :

$f(x) = \dfrac{ax^3 + 4ax^2 + 4ax + bx^2 + 4bx + 4b + cx + 2c + d}{(x+2)^2}$ ، بالمطابقة نجد :

$\begin{cases} a=-1 \\ 4a+b=-2 \\ 4a+4b+c=7 \\ 4b+2c+d=12 \end{cases}$ ، و منه : $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=3 \\ d=-2 \end{cases}$ ، إذن : $f(x) = -x + 2 + \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{2}{(x+2)^2}$ .

ب) بما أنّ : $f(x) = -x + 2 + \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{2}{(x+2)^2}$ وَ $\lim\limits_{|x|\to\infty} \left(\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{2}{(x+2)^2}\right) = 0$ .

إذن يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ معادلته : $(\Delta) : y = -x + 2$ بجواري $-\infty$ وَ $+\infty$ .

ج) دراسة الوضعية :

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - (-x+2) = \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{2}{(x+2)^2} = \dfrac{3x+4}{(x+2)^2}$ .

| $x$ | $-\infty$      $-2$ | $-2$      $-\frac{4}{3}$ | $-\frac{4}{3}$      $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{3x+4}{(x+2)^2}$ | $-$ | $-$    0 | $+$ |
| الوضعية | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ |
| | | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ عند النقطة $(\frac{-4}{3};\frac{10}{3})$ | |

3) أ) حساب $f'(x)$ :

$$f'(x)=\frac{(-3x^2-4x+7)(x+2)^2-2(x+2)(-x^3-2x^2+7x+12)}{(x+2)^4}$$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{(x+2)\left[(-3x^2-4x+7)(x+2)-2(-x^3-2x^2+7x+12)\right]}{(x+2)^4}$$ ، أي :

$$f'(x)=\frac{-3x^3-6x^2-4x^2-8x+7x+14+2x^3+4x^2-14x-24}{(x+3)^3}$$ ، أي :

$f'(x)=\dfrac{-x^3-6x^2-15x-10}{(x+3)^3}$ ، بملاحظة أنّ : $(-x-1)(x^2+5x+10)=-x^3-6x^2-15x-10$

و منه : $f'(x)=\dfrac{(-x-1)(x^2+5x+10)}{(x+2)^3}$ ، و هو المطلوب .

ب) ❖) جدول الإشارة :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x-1$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x^2+5x+10$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $(x+2)^3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**ملاحظة**: ( إشارة $(x+2)^3$ من إشارة $x+2$ ، و إشارة $x^2+5x+10$ هي نفس إشارة $a$ لأنّ: $\Delta<0$ ).

❖) جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

4) أ) $f(-3)=0$ ، لإيجاد نقط تقاطع المنحني $(C_f)$ مع حامل محور الفواصل نحل المعادلة: $f(x)=0$ ،

أي : $-x^3-2x^2+7x+12=0$ ، بما أنّ : $f(-3)=0$ فإنّ : $-3$ هو جذر لـ $(-x^3-2x^2+7x+12)$ ،

إذن : $-x^3-2x^2+7x+12=(x+3)(ax^2+bx+c)$ ، أي :

$-x^3-2x^2+7x+12=ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c$ ، أي :

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a=-1 \\ b+3a=-2 \\ c+3b=7 \\ 3c=12 \end{cases}$ ، و منه : $\begin{cases} a=-1 \\ b+3a=1 \\ c=4 \end{cases}$ ،

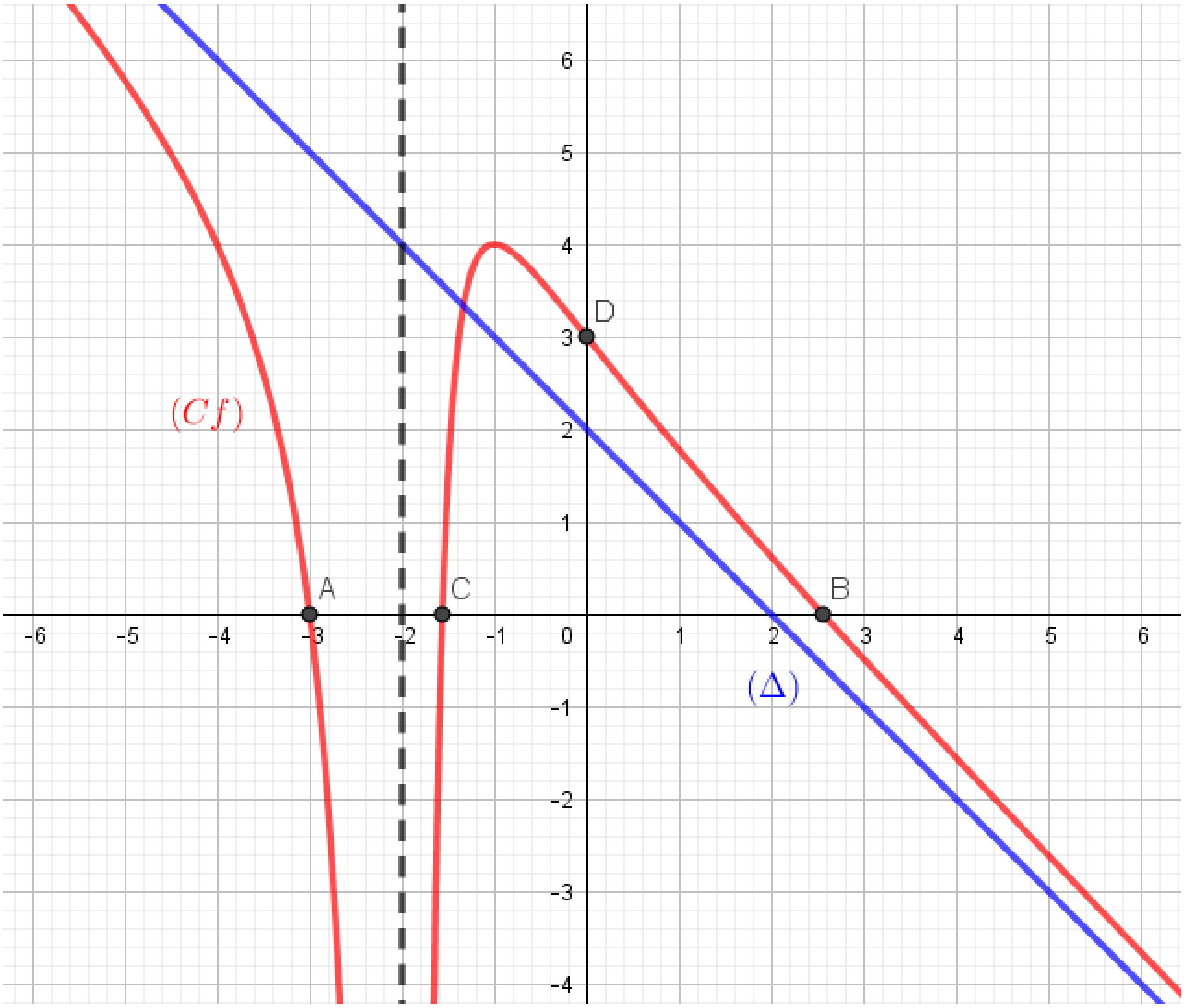
إذن : $-x^3-2x^2+7x+12=(x+3)(-x^2+x+4)$ .

إما : $\begin{cases} x+3=0 \\ x=-3 \end{cases}$ ، أو : $-x^2+x+4=0$ ، أي : $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{-2}$ وَ $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{-2}$ .

و منه : $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل عند : $A(-3;0)$ ، $B(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};0)$ وَ $C(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2};0)$ .

ب) إيجاد نقط تقاطع $(C_f)$ مع حامل محور التراتيب ، أي نحسب : $f(0)=3$ ، و منه النقطة : $D(0;3)$ .

5) الإنشـــاء :




6) المعادلة : $f(x)=m$ ، تقبل ثلاث حلول سالبة لمـا : $3<m<4$ ، (أنظر الإنشاء) .

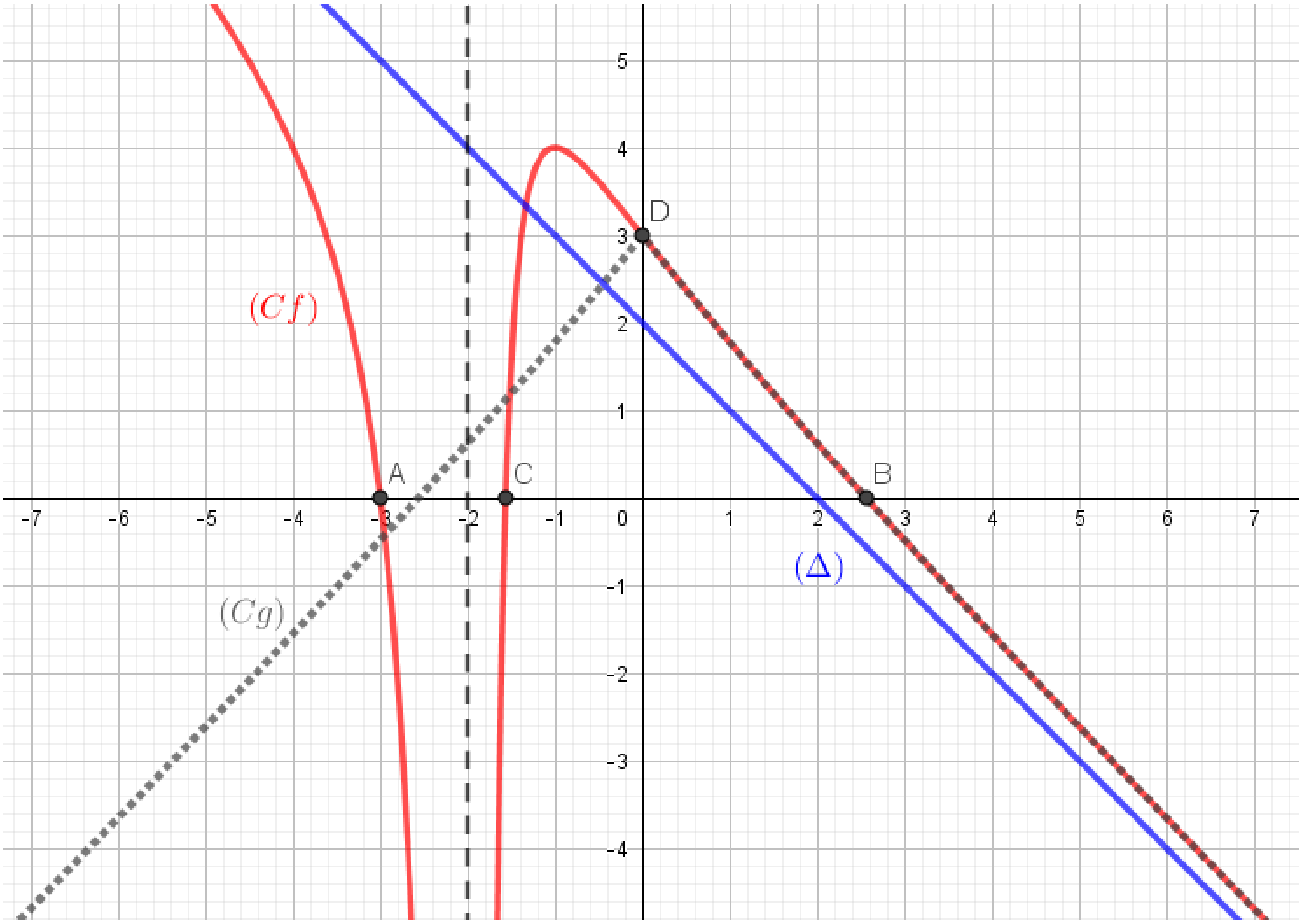
7) لدينا : $g(x)=f(|x|)$ .

أ) إثبات أن الدالة $g$ زوجية : $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$ ، إذن $g$ زوجية.

ب) ❖ إذا كان : $x\geq 0$ فإنّ : $|x|=x$ ، و منه : $g(x)=f(x)$ ، إذن : $(C_g)$ ينطبق على $(C_f)$ في المجال $[0;+\infty[$

❖ ثم ننشئ $(C_g)$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأنّ الدالة $g$ زوجية.

ج) الإنشــــــاء :




كتابة الأستاذ : ب . ع

# دراسة دالة عددية رقم 04

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} \; .....; x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2} \; ....; x > 0 \end{cases}$ .

وَ ليكن $(C)$ هو المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) أحسب نهايات الدالة $f$ عند $+\infty$ وَ $-\infty$ ، ثمّ فسّر بيانياً النتيجة عند $-\infty$ .

2) أدرس إستمرارية الدالة $f$ عند $0$ .

3) أ) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ . ماذا يمكن القول بالنسبة للدالة $f$ ؟ . وَ ما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة ؟ .

ب) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $]-\infty;0[$ تكون : $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-2x} \times (\sqrt{x^2-2x} - x + 1)}$ ،

وَ من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ تكون : $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 \times (x+2)}{x^3}$ .

ج) شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ .

4) أ) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته : $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحني $(C)$ بجوار $+\infty$ .

ب) أدرس وضعية المنحني $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ .

5) بيّن أنّ المنحني $(C)$ يقبل نقطة إنعطاف $A$ يطلب تعيين إحداثياها .

6) أنشئ المستقيمات المقاربة وَ المنحني $(C)$ .

# حل مختصر للدالة رقم 04

لدينا :
$$\begin{cases} f(x)=x+\sqrt{x^2-2x} \;.....; x\le 0 \\ f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{x^2} \;....; x>0 \end{cases}$$

1) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-2x}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-2x}\right]\times\dfrac{x-\sqrt{x^2-2x}}{x-\sqrt{x^2-2x}}$ ، أي :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-(x^2-2x)}{x-\sqrt{x^2-2x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-\sqrt{x^2(1-\dfrac{2}{x})}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x+x\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}$ ، $(\sqrt{x^2}=-x; x\le 0)$

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x\left[1+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\right]}=1$ ، إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ .

**التفسير الهندسي :** المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى $(C)$ بجوار $-\infty$ .

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=+\infty$ .

2) دراسة إستمرارية الدالة $f$ عند $0$ :

لدينا : $\begin{cases}-1\\0^+\end{cases}$ $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\dfrac{(x-1)^3}{x^2}=-\infty \end{cases}$ ، إذن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)\ne f(0)$ .

و منه نقول أنّ الدالة $f$ ليست مستمرة عند $0$ .

3) أ) حساب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\dfrac{f(x)}{x}$ .

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\dfrac{x+\sqrt{x^2-2x}}{x}=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\dfrac{x+\sqrt{x^2(1-\dfrac{2}{x})}}{x}=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\dfrac{x\left[1-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\right]}{x}=-\infty$ .

❖) إذن : نقول أنّ الدالة $f$ لا تقبل الإشتقاق عند $0$ .

❖) **التفسير الهندسي :** المنحني $(C)$ يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $O(0;0)$ .

ب) ❖) حساب $f'(x)$ على $]-\infty;0[$ :

$$f'(x)=1+\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=\frac{\sqrt{x^2-2x}+x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=\frac{\sqrt{x^2-2x}+x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\times\frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}$$

أي : $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x}\times\sqrt{x^2-2x}-x+1}=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-2x}\times(\sqrt{x^2-2x}-x+1)}$ .

نلاحظ أنّه من أجل $x\in\left]-\infty;0\right[$ يكون : $\sqrt{x^2-2x}\times\sqrt{x^2-2x}-x+1>0$ .

و بالتالي ستكون : $f'(x)<0$ ، أي أنّ الدالة $f$ متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ .

❖) حساب $f'(x)$ على $]0;+\infty[$ :

$$f'(x)=\frac{3(x-1)^2\times x^2-2x\times(x-1)^3}{x^4}=\frac{x(x-1)^2\left[3x-2(x-1)\right]}{x^4}=\frac{x(x-1)^2\times(x+2)}{x^4}$$ ،

و منه : $f'(x)=\frac{(x-1)^2\times(x+2)}{x^3}$ .

نلاحظ أنّه من أجل $x\in]0;+\infty[$ : $f'(x)\geq 0$ ، (لأنّ : $f'(x)$ تنعدم من أجل $x=1$ ).

و منه : الدالة $f$ متزايدة على $]0;+\infty[$ .

ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↘ | $0$ ‖ $-\infty$ | ↗ | | ↗ | $+\infty$ |

**توضيح مهم : الشيء الجديد بالنسبة للطلبة هو أنّ الدالة $f$ معرفة عند $0$ ، أي : $f(0)=0$ ، لكن نهاية الدالة $f$ على يمين $0$ هي $-\infty$ .**

4) أ) نبيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ مقارب للمنحنى $(C)$ بجوار $+\infty$ ، أي :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-3)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{x^2}-(x-3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+3x-1-x^2(x-3)}{x^2}$$ ، أي :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-3)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$$ .

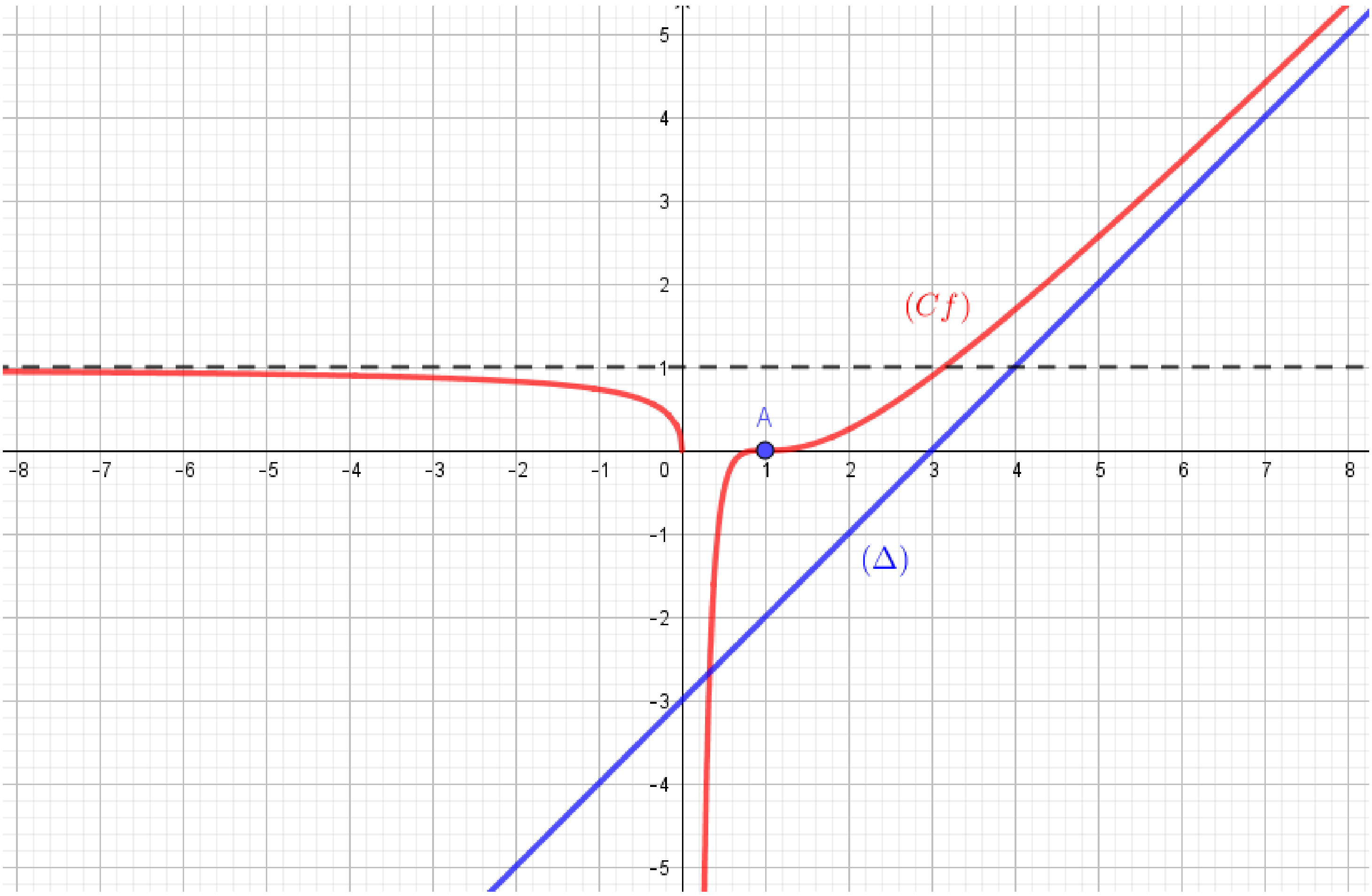
و منه المستقيم $(\Delta)$ مقارب مائل للمنحنى $(C)$ بجوار $+\infty$ .

ب) الوضعية : أي ندرس إشارة $\frac{3x-1}{x^2}$ ، و منه الإشارة من إشارة $3x-1$

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضعية | | $(C)$ يقع تحت $(\Delta)$ | $(C)$ يقطع $(\Delta)$ عند النقطة $(\frac{1}{3};-\frac{8}{3})$ | $(C)$ يقع فوق $(\Delta)$ | |

5) نلاحظ من خلال جدول التغيرات للدالة $f$ أنّ الدالة $f'$ تنعدم عند $1$ و لا تغيّر إشارتها ،
إذن النقطة $A(1,f(1))$ هي نقطة إنعطاف للمنحني $(C)$ ، أي : النقطة $A(1,0)$ .

6) الإنشاء :




كتابة الأستاذ : ب . ع

# دراسة دالة عددية رقم 05

**الجزء الأوّل :**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - \sqrt{1+x^2}$ .

وَ ليكن $(C)$ هو المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) أ) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً .

ب) بيّن أنّ المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى $(C)$ بجوار $-\infty$ .

2) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون : $\sqrt{1+x^2} - x > 0$ .

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة $f$ .

ج) أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C)$ عند النقطة ذات الفاصلة $0$ .

3) أ) أنشئ المماس $(T)$ وَ المنحنى $(C)$ .

ب) حل بيانياً المتراجحة : $f(x) > 2x - 1$ .

ج) تحقّق أنّه من أجل كل $x > 0$ يكون : $x(1 + f(\frac{1}{x})) = 1 + f(x)$ .

**الجزء الثّاني :**

لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ بـ :
$$\begin{cases} g(x) = \tan x - \sqrt{1+\tan^2 x} \;........\; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ g(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

و ليكن $(\Gamma)$ هو المنحنى الممثل للدالة $g$ .

1) بيّن أنّ : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$ .

2) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ يكون : $g(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x}$ .

ب) أدرس تغيّرات الدالة $g$ ، ثمّ أنشئ منحناها $(\Gamma)$ في معلم آخر .

**الجزء الثالث :**

لتكن الدالة $h$ المعرّفة على $]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$ كما يلي :
$$\begin{cases} h(x) = x - \sqrt{1+x^2} \;.........\; x \le 0 \\ h(x) = 2 - x - \sqrt{x^2 - 4x + 5} \;.....\; x \ge 2 \end{cases}$$

1) بيّن أنّ المستقيم الذي معادلته : $x = 1$ هو محور تناظر للمنحنى $(C_h)$ .

2) شكل جدول تغيّرات الدالة $h$ .

3) أنشئ $(C_h)$ في نفس معلم الدالة $f$ .

**المسألة مأخوذة من أحد كتب المغرب الشقيق مع تعديل يوافق المنهاج الجزائري**

# حل مختصر للدالة رقم 05

**الجزء الأول :**

1) أ) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{1+x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\times x+\sqrt{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}} = 0\begin{cases}-1\\+\infty\end{cases}$$

إذن المنحنى $(C)$ يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب بجوار $+\infty$ .

ب) بيان أنّ المستقيم $(d)$ مقارب مائل بجوار $-\infty$ : أي نحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2x = \lim\limits_{x\to-\infty} -x-\sqrt{1+x^2}$ ، أي :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x = (-x-\sqrt{1+x^2})\times\frac{-x+\sqrt{1+x^2}}{-x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{-x+\sqrt{1+x^2}} = 0\begin{cases}-1\\+\infty\end{cases} .$$

إذن المستقيم $(d)$ مقارب مائل للمنحنى $(C)$ بجوار $-\infty$ .

2) أ) بيان أنّ : $\sqrt{1+x^2}-x>0$ من أجل عدد حقيقي $x$ ، نميّز حالتين :

❖) حالة $x\geq 0$ يكون : $\sqrt{1+x^2}-x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}>0$ .

❖) حالة $x<0$ يكون : $\sqrt{1+x^2}-x>0$ . و منه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون : $\sqrt{1+x^2}-x>0$ .

ب) حساب $f'$ : $f'(x)=1-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=1-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}>0$ .

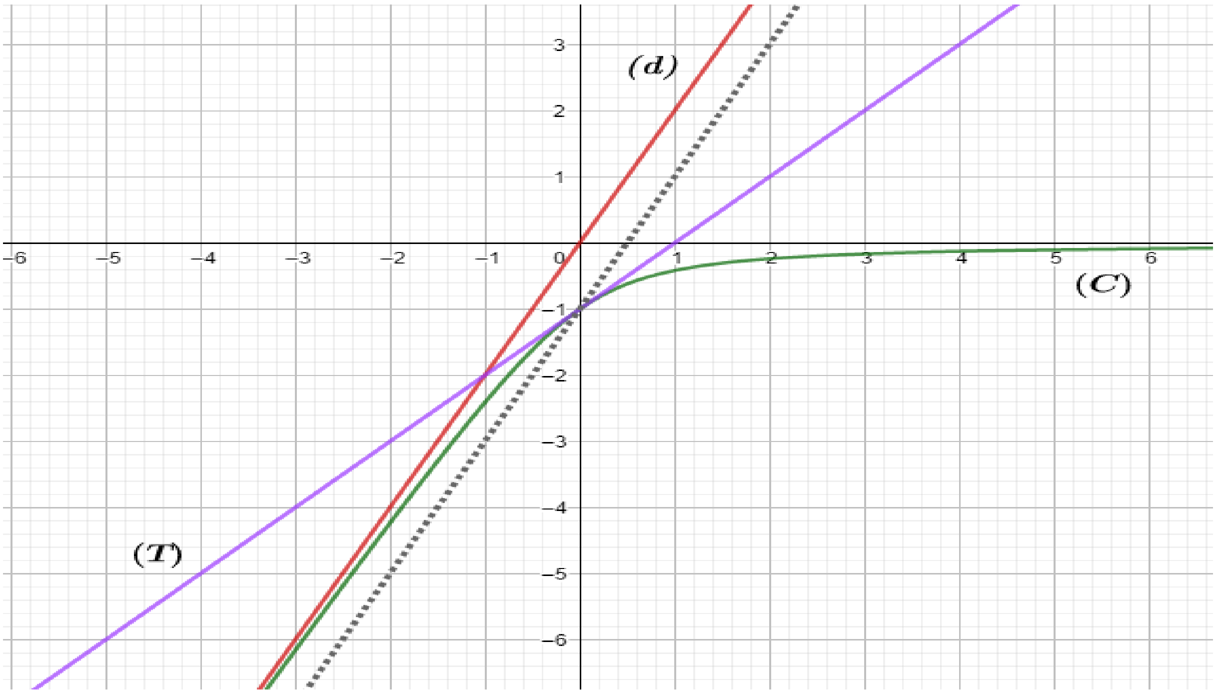
و منه : الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ .

❖) جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ $0$ |

ج) معادلة المماس : $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، و منه : $(T): y=x-1$ .

3) أ) الإنشاء :




ب) حل المتراجحة : $f(x) > 2x-1$ (الحلول هي المجالات التي يكون فيها المنحني $(C)$ فوق المستقيم ذو المعادلة $y = 2x-1$ ) إذن : $S = \left]-\infty;0\right[$ .

ج) من أجل كل $x>0$ يكون : $x(1+f(\frac{1}{x})) = x(1+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) = x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x+1-x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$

أي : $x(1+f(\frac{1}{x})) = x+1-\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x} = x-\sqrt{x^2+1}+1 = f(x)+1$ ، ( $\sqrt{x^2} = x \ .....; x>0$ ).

**الجزء الثاني :**

1) بيان أنّ : $\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$ .

لدينا : $\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[\tan x - \sqrt{1+\tan^2 x}\right] = \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(\tan x)$ ، أي :

$$\begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \tan x = \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty \begin{cases} 1 \\ 0^+ \end{cases} \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

، و منه : $\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = 0$ ، أي : $\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$ .

2) حساب $\lim_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x)$ :

أي : $\lim_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} f(\tan x)$ ، أي :

$$\begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \tan x = \lim_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty \begin{cases} -1 \\ 0^+ \end{cases} \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

و منه : $\lim_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x) = -\infty$ ، إذن : المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي للمنحني $(C)$ .

3) أ) لدينا : $g(x)=\tan x-\sqrt{1+\tan^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{1+(\dfrac{\sin x}{\cos x})^2}=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}$ ، أي :

$g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{1}{\cos x}$ ، و منه : $g(x)=\dfrac{\sin x-1}{\cos x}$ .

(**توضيح** : بما أنّ $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ فإنّ : $\cos x>0$ ، أي : $\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$ ).

ب) دراسة تغيرات الدالة $g$ :

❖) حساب $g'(x)$ :

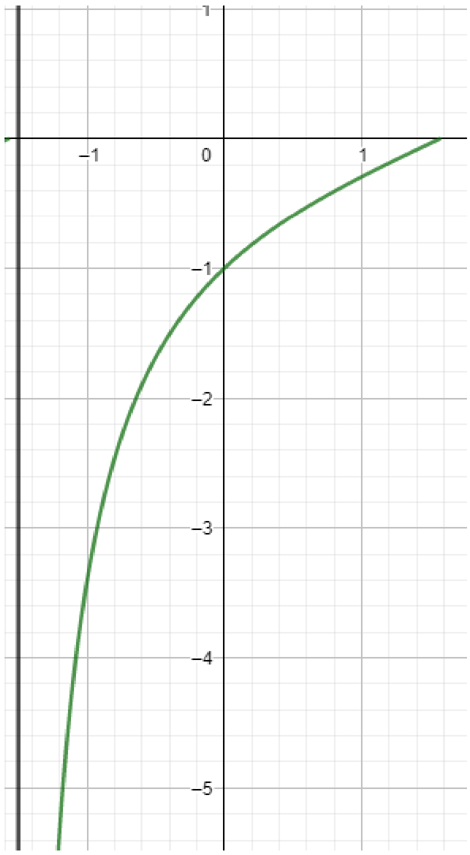
$g'(x)=\dfrac{\cos x\times\cos x-(-\sin x)(\sin x-1)}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x-\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ .

نعلم أنّ : $1-\sin x>0$ من أجل كل $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ ، إذن : الدالة $g$ متزايدة تماما على $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ .

❖) جدول التغيرات :

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty\nearrow 0$ |

❖) الإنشاء :



**الجزء الثالث :**

1) أوّلاً نلاحظ أنّ $D_h$ متناظرة بالنسبة إلى $1$ ، ثانياً نحسب : $h\ \ 2-x$ في الحالتين ، أي :

❖) حالة $2-x\leq 0$ :

$$h(2-x)=2-x-\sqrt{1+(2-x)^2}=2-x-\sqrt{1+4+x^2-2x}=2-x-\sqrt{x^2-2x+5}=h(x)$$

❖) حالة $2-x\geq 2$ :

$$h(2-x)=2-(2-x)-\sqrt{(2-x)^2-4(2-x)+5}=x-\sqrt{x^2+1}=h(x)\ .$$

إذن : من أجل كل $x$ من $\left]-\infty;0\right]\cup\left[2;+\infty\right[$ يكون : $h(2-x)=h(x)$

و منه : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحنى $(C_h)$ .

2) تشكيل جدول تغيرات الدالة $h$ :

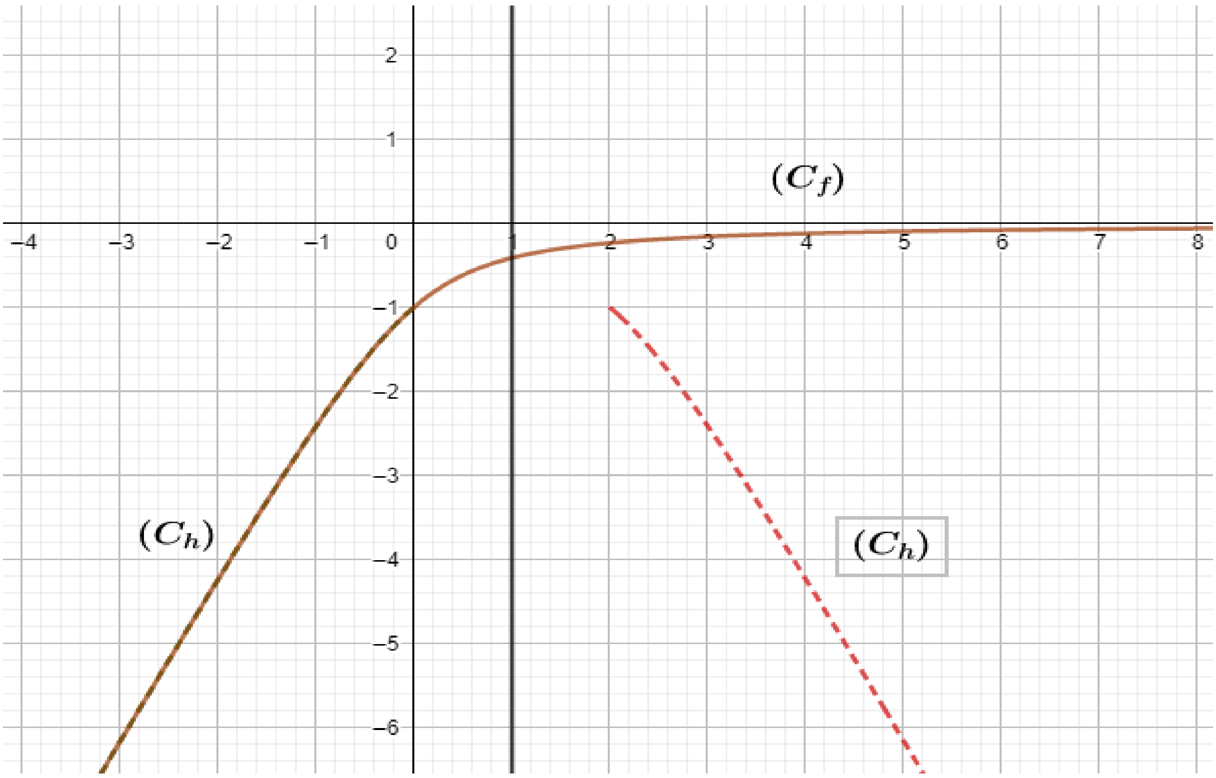
❖) لدينا على المجال $\left]-\infty;0\right]$ : $h(x)=f(x)$ .

❖) على المجال $\left[2;+\infty\right[$ نكمل جدول التغيرات بالحفاظ على قيم $f(x)$ و نغير إتجاه الدالة $f$ ، لأنّ المنحنى $(C_h)$ يناظر المنحنى $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x=1$ .

❖) جدول التغيرات على المجال $\left[2;+\infty\right[$

| $x$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $-\infty$ |

3) إنشاء $(C_h)$ :



# دراسة دالة عددية (مثلثية) رقم 06 + 07

**المسألة رقم 01 :**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\sin 3x-3\sin x$ ، و ليكن $(C_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) بيّن أنّ الدالة $f$ دورية و دورها هو $2\pi$ .

2) أدرس شفعية الدالة $f$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني $(C_f)$ .

3) أ) قارن بين $f(x)$ وَ $f(\pi-x)$ . فسّر النتيجة هندسياً .

ب) إستنتج مما سبق مجالا لدراسة الدالة $f$ .

4) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ تكون : $f'(x)=-6\sin x\times\sin 2x$ .

5) أدرس تغيّرات الدالة $f$ على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ .

6) أنشئ المنحني $(C_f)$ على $\left[-2\pi;2\pi\right]$ .

**المسألة رقم 02 :**

$f$ دالة معرّفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بـــ : $f(x)=x.\tan x$ .

1) أدرس شفعية الدالة $f$ .

2) أحسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة تعريفها .

3) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ تكون : $f'(x)=\dfrac{2x+\sin 2x}{2\cos^2 x}$ .

4) أ) نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي : $g(x)=2x+\sin 2x$ .

❖) أدرس تغيّرات الدالة $g$ على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ .

ب) إستنتج تغيّرات الدالة $f$ على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ .

5) شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ .

6) أكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C_f)$ عند ذات الفاصلة $\frac{\pi}{4}$ .

7) أ) أنشئ $(T)$ و المنحني $(C_f)$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

ب) ماهو عدد حلول المعادلة $(E)$ ، حيث : $(E):\tan x=\dfrac{1}{x}$ .

# حل المسألة 01

لدينا : $f(x)=\sin 3x-3\sin x$ .

1) إثبات أنّ $f$ دورية، و دورها $2\pi$ : أي نحسب $f(x+2\pi)$ .

$f(x+2\pi)=\sin 3(x+2\pi)-3\sin(x+2\pi)=\sin(3x+6\pi)-3\sin(x+2\pi)$ ، أي :

$f(x+2\pi)=\sin 3x-3\sin x$ ، و منه : $f(x+2\pi)=f(x)$ .

إذن : الدالة $f$ دورية و دورها $2\pi$ ، لهذا يمكن دراستها على مجال طوله $2\pi$ ، و ليكن المجال $\left[-\pi;\pi\right]$ .

2) أ) شفعية الدالة $f$ :

$f(-x)=\sin(-3x)-3\sin(-x)=-\sin 3x+3\sin x=-(\sin 3x-3\sin x)=-f(x)$ .

و منه : الدالة $f$ فردية، إذن : المنحنى $(C_f)$ يقبل المبدأ $O$ كمركز تناظر .

❖ نستنتج أنّه يمكن أن ندرس الدالة $f$ على المجال $\left[0;\pi\right]$ .

3) أ) مقارنة $f(x)$ وَ $f(\pi-x)$ ، ثم تفسير النتيجة هندسياً :

$f(\pi-x)=\sin 3(\pi-x)-3\sin(\pi-x)=\sin(3\pi-3x)-3\sin(\pi-x)=\sin(2\pi+\pi-3x)-3\sin(\pi-x)$

أي : $f(\pi-x)=\sin(\pi-3x)-3\sin(\pi-x)=\sin 3x-3\sin x$ ، و منه : $f(\pi-x)=f(x)$ .

إذن : كتفسير هندسي نقول أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل محور تناظر و هو المستقيم ذو المعادلة $x=\dfrac{\pi}{2}$ .

ب) نستنتج مما سبق أنّه يمكننا دراسة الدالة $f$ على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ .

4) حساب $f'(x)$ : $f'(x)=3\times\cos 3x-3\times\cos x=3(\cos 3x-\cos x)$ .

**نعلم أنّ :** $\cos a-\cos b=-2\sin(\dfrac{a+b}{2})\times\sin(\dfrac{a-b}{2})$

أي : $f'(x)=3(\cos 3x-\cos x)=3(-2)\sin(\dfrac{3x+x}{2})\times\sin(\dfrac{3x-x}{2})$ ،

و منه : $f'(x)=-6\sin 2x\times\sin x$ ، و هو المطلوب .

5) دراسة تغيرات الدالة $f$ :

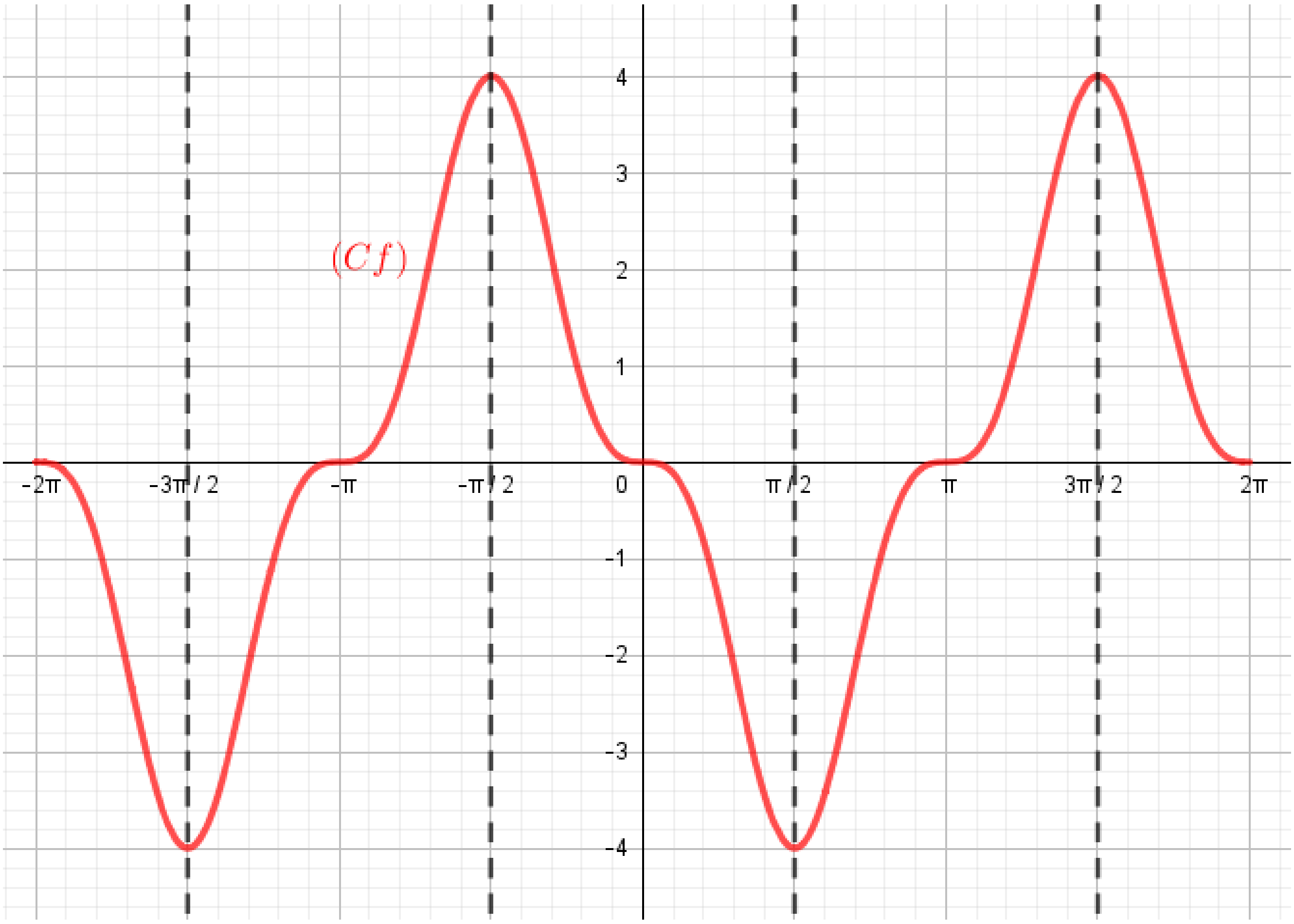
لدينا على المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ ، أي : $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ ، يكون : $0\le 2x\le\pi$ ، و منه : $\sin x\ge 0$ وَ $\sin 2x\ge 0$ .

إذن : من أجل كل $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ : $f'(x)\le 0$ ، و بالتالي الدالة $f$ متناقصة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ .

❖) جدول التغيرات :

| $x$ | $0$ | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ ↘ | $-4$ |

6) الإنشاء :



## حل المسألة 02

لدينا : $f(x)=x.\tan x$ .

1) دراسة شفعية الدالة $f$ :

أولاً : نلاحظ أنّ 0 هو مركز لـ $D_f$ .

ثانياً : $f(-x)=-x.\tan(-x)=-x\times-\tan x=x\times\tan x=f(x)$ .

و منه الدالة $f$ زوجية.

2) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{\pi}{2}} x\times\tan x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{\pi}{2}} f(x)=$ ، لأنّ : $\begin{cases}-1\\0^+\end{cases}$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{\pi}{2}}\tan x=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}=-\infty$ .

❖) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}} x\times\tan x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}} f(x)=$ ، لأنّ : $\begin{cases}1\\0^+\end{cases}$ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}}\tan x=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}=+\infty$ .

3) حساب $f'$ :

$f'(x)=1\times\tan x+\frac{1}{\cos^2 x}\times x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{x}{\cos^2 x}$ ، أي : $f'(x)=\frac{\sin x\times\cos x+x}{\cos^2 x}$ ،

(نضرب في 2 و نقسم على 2) نجد : $f'(x)=\frac{2\sin x\times\cos x+2x}{2\cos^2 x}$ ، (نعلم أنّ : $\sin 2x=2\sin x\times\cos x$) ،

إذن : $f'(x)=\frac{\sin 2x+2x}{2\cos^2 x}$ ، و هو مطلوب.

4) أ) دراسة تغيّرات الدالة $g$ حيث : $g(x)=2x+\sin 2x$ .

❖) الدالة المشتقة : $g'(x)=2+2.\cos 2x$ .

نعلم أنّ : $-1\le\cos 2x\le 1$ ، أي : $-2\le 2.\cos 2x\le 2$ ، و منه : $0\le 2+2.\cos 2x\le 4$ .

إذن نستنتج أنّ : $g'(x)\ge 0$ ، و بالتالي : الدالة $g$ متزايدة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ .

❖) جدول التغيرات :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\pi$ |

❖) نلاحظ من جدول التغيرات أنّه من أجل كل $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ تكون : $g(x)\ge 0$ .

ب) لدينا : $f'(x)=\frac{g(x)}{2\cos^2 x}$ ، بما أنّ : $g(x)\ge 0$ على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، إذن : $f'(x)\ge 0$ على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ .

و بالتالي : الدالة $f$ متزايدة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ .

5) بما أنّ الدالة $f$ زوجية ، فستكون متناقصة على $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$ ، أي : جدول تغيرات الدالة $f$ على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ يكون :

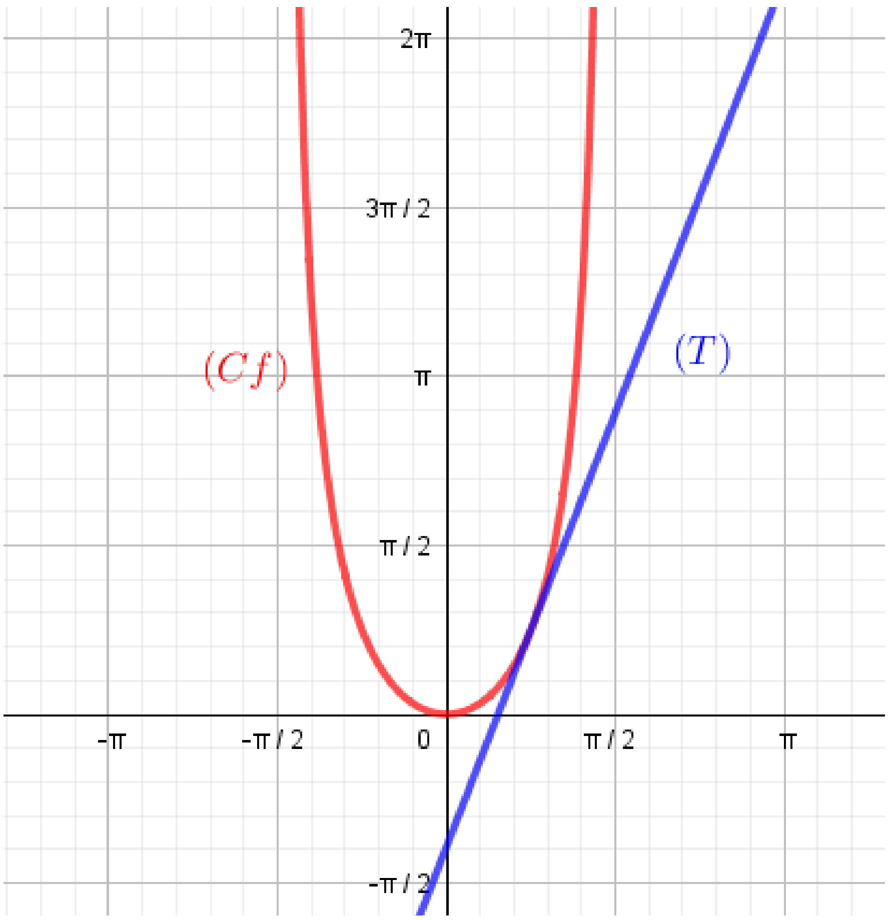
| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

6) كتابة معادلة $(T)$ عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\pi}{4}$ :

❖ $(T): y = f'(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})+f(\frac{\pi}{4})$ ، لدينا : $\begin{cases} f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} \\ f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}+1 \end{cases}$ ، أي : $(T): y = (\frac{\pi}{2}+1)(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}$ ،

أي : $(T): y = (\frac{\pi}{2}+1)x-\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$ ، و منه : $(T): y = (\frac{\pi}{2}+1)x-\frac{\pi^2}{8}$ .

7) أ) الإنشاء :



ب) عدد الحلول المعادلة : $(E):\tan x=\dfrac{1}{x}$

أي : $(E): x.\tan x=1$ ، معناه : $(E): f(x)=1$ . و منه المعادلة تقبل حلين متمايزين .

كتابة الأستاذ : ب . ع