تصحيح نموذجي للإمتحان التجريبي في مادة الرياضيات

الموضوع الأول

تصحيح التمرين الثاني :

لدينا: $z_A = 4+2i$ و $z_B = 3-i$.

1-أ) * $\dfrac{z_B - z_A}{z_B} = -i$ 0.5

* $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_B}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ و $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_B}\right| = 1$ و منه $\dfrac{z_B - z_A}{z_B} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$..........0.5

ب) المثلث $AB0$ قائم في B..0.25

2-أ) نبين أن العبارة المركبة للتحويل R هي : $z' = -iz + 1 + 3i$.

لدينا: $z_B = az_A + b$ و $z_O = az_B + b$ و منه نجد $a = -i$ و $b = 1+3i$......................... ....0.5

ومنه العبارة المركبة للتحويل R هي: $z' = -iz + 1 + 3i$.

ب) التحويل R هو دوران مركزه $w(2;1)$ و زاويته $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ 0.5

ج) $z_C = 1+3i$...0.25

د) الرباعي $ABOC$ هو مربع..0.5.

هـ) مجموعة النقط M التي تحقق : $|z - 4 - 2i| = |z|$ يكافئ: $AM = OM$..................................0.25

و منه مجموعة النقط M هي محور $[AO]$...0.25

3-أ) لدينا: $-i = \dfrac{-i(z-2-i)}{z-2-i} = \dfrac{z'-2-i}{z-2-i} = L$ و هو الطلوب..0.5.

ب) لدينا: $L^n = (-i)^n = e^{-in\frac{\pi}{2}}$

L^n حقيقي يكافئ $n = 2k$ مع $k \in \mathbb{Z}$..0.5

ج) لدينا: $\dfrac{z'-2-i}{z-2-i} = -i$ ومنه $\left(\dfrac{z'-2-i}{z-2-i}\right)^2 = -1$.

وعليه : $(z'-2-i)^2 + (z-2-i)^2 = 0$..0.5

تصحيح التمرين الثالث :

(I) لدينا: $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$ مع $x \in]1;+\infty[$

1) بقراءة بيانية للمنحني (Γ)نجد المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين متمايزين 0.25

2) لدينا: $g(2) = 0$ 0.25

* بما أن g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[2.87;2.88]$ و $g(2.87).g(2.88) <$ 0.25

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]2.87;2.88[$...0.25

3) إشارة $g(x)$ حسب قيم x ملخصة في الجدول التالي:..0.75

x	1 2 α $+\infty$
إشارة $g(x)$	‖ + + + 0 - - 0 + + +

(II) لدينا: $f(x)=x-3+\dfrac{4\ln(x-1)}{x-1}+\dfrac{5}{x-1}$ مع $x\in]1;+\infty[$.

1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=-\infty$ ومنه المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ: (C_f)......................0.25

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$..0.25

2-أ) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=0$ فإن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $(+\infty)$..0.25

ب) لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ و الملخصة في الجدول التالي...0.75

x	1 $1+e^{-\frac{5}{4}}$ $+\infty$
إشارة $f(x)-y$	‖ - - - 0 + + +
الوضعية	(C_f) يقع تحت (Δ) (C_f) يقطع (Δ) (C_f) يقع فوق (Δ)

3-أ) مهما كان $x\in]1;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$..0.25

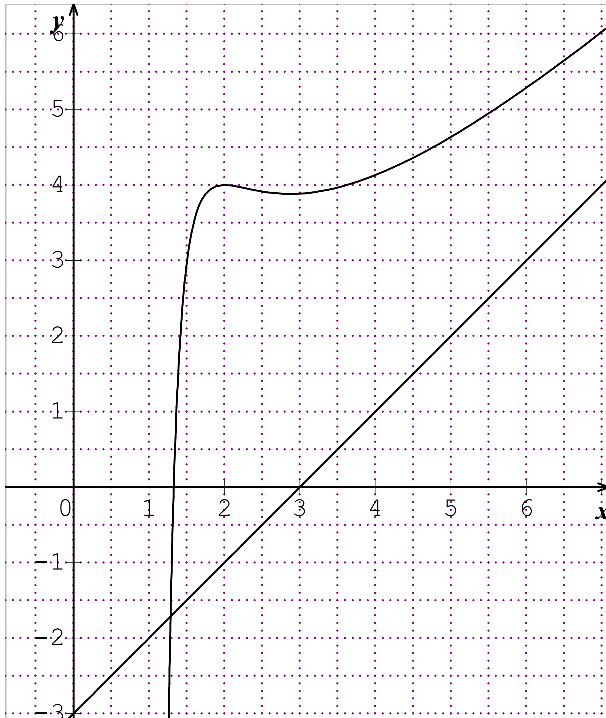
ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

أي أن: f متزايدة تماما على كل من المجالين $]1;2]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[2;\alpha]$ 0.5

- جدول تغيرات f...0.25

x	1 2 α $+\infty$
$f'(x)$	‖ + 0 - 0 +
$f(x)$	‖ $-\infty$ ↗ 4 ↘ $f(\alpha)$ ↗ $+\infty$

4) رسم (Δ) و (C_f) 0.75



5) لدينا: $h(x)=\left[\ln(x-1)\right]^2$ مع $x\in]1;+\infty[$.

5-أ) $h'(x)=\dfrac{2\ln(x-1)}{x-1}$ 0.25

* الدالة الأصلية للدالة f على $]1;+\infty[$ هي الدالة F المعرفة كما يلي:

$F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+3x+2\left[\ln(x-1)\right]^2+5\ln(x-1)+C$ 0.25

ب) $\displaystyle\int_2^5 f(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-3x+2\left[\ln(x-1)\right]^2+5\ln(x-1)\right]_2^5=\frac{3}{2}+2\left[\ln(x-1)\right]^2+5\ln 4$ 0.25

أي: $\displaystyle\int_2^5 f(x)dx=1.5+8\left[\ln 2\right]^2+10\ln 2$. و التفسير البياني لهذه النتيجة هي مساحة الحيز المستوي المحدد

بمنحنى الدالة f و المستقيمات المعرفة بالمعادلات $x=2$ ، $x=5$ ، $y=0$ 0.25

تصحيح التمرين الرابع:

$u_0=e$ و $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$ و $v_n=\ln u_n$.

1-أ مهما كان $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=v_n\times\dfrac{1}{2}$ ....0.25.

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=1$ 0.75

ب) $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .... 0.25.

* $u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ 0.25

2-أ) لدينا: $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots\ldots \times u_n$

و بما أن $u_n = e^{v_n}$ فإن $P_n = e^{v_0+v_1+\ldots+v_n} = e^{S_n}$ .... 0.5.

ب $S_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2-\frac{1}{2^n}$) 0.5

- عبارة P_n بدلالة n هي $P_n = e^{2-\frac{1}{2^n}}$ 0.5

ج) $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$ و $\lim_{n\to+\infty} P_n = e^2$ .... 0.5+0.5.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

تصحيح التمرين الأول:

1) لدينا: $\vec{n}_{p_1}(-2;1;1).\vec{n}_{p_2}(1;-2;4)=0$ و منه $(p_1)\perp(p_2)$ 0.5

2) الجملة (I) $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \\ z=t \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (D) مع $t\in\mathbb{R}$.

لدينا الجملة (I) تحقق معادلتي (p_1) و (p_2) و منه $(D)=(p_1)\cap(p_2)$......................................01.

3-أ) $f(t)=14t^2-14t+12$ 0.5

ب) دراسة إتجاه تغير f :

$f'(t)=28t-14$...0.25.

f متزايدة تماما على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ و متزايدة تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$...0.5

جدول تغيرات f..0.25

t	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$	-	-	0	+	+
$f(t)$	$+\infty$	↘	$\frac{35}{2}$	↗	$+\infty$

- من أجل $t_0=\frac{1}{2}$ نجد أصغر مسافة AM هي $\sqrt{\frac{35}{2}}$ لأن ($f(t)=\frac{35}{2}$ قيمة حدية صغرى لـ f)...0.25.
- بتعويض $t=\frac{1}{2}$ في في إحداثيات M نجد: $\mathrm{I}\left(-6;-\frac{13}{2};\frac{1}{2}\right)$...0.25
- ج) بما أن الجملة $\begin{cases} 2t-7=-6 \\ 3t-8=-\frac{13}{2} \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$ تقبل حلا وحيدا $t=\frac{1}{2}$ فإن $\mathrm{I}\in(D)$ 0.5

• و بما أن $\overrightarrow{A\mathrm{I}}\begin{pmatrix}3\\-\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=0$ فإن $\overrightarrow{A\mathrm{I}}\perp\vec{u}$ و النقطة I هي المسقط العمودي لـ:على(D)......0.5

د)لدينا $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه (D) فهو شعاع ناظمي للمستوي (Q).

و منه معادلة (Q) $2x+3y+z+31=0$ 0.5

تصحيح التمرين الثاني:

لدينا: $u_0=9$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3$ و $v_n=u_n+6$.

1–أ مهما كان n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=v_n\times\frac{1}{2}$ 0.5

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=15$..0.5.

ب- $v_n=15\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و منه $u_n=15\left(\frac{1}{2}\right)^n-6$..0.5

ج- $S_n=v_0+....+v_n=30\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$..0.5

$S'_n=u_0+...+u_n=30\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]-6n-6=-30\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-6n+24$..................................0.5

2- لدينا: $w_n=\ln(v_n)$.

أ- مهما كان n من $\mathbb{N}$: $w_{n+1}=w_n-\ln 2$ 0.25

و منه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r=-\ln 2$ و حدها الأول $w_0=\ln 15$..............................0.5

ب- $S''=w_0+......+w_n=\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\ln 15+\ln 15-(\ln 2)n\right]=\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\ln 15^2-(\ln 2)n\right]$

$\lim_{n\to+\infty}S''=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\ln 15^2-(\ln 2)n\right]=-\infty$ 0.25

تصحيح التمرين الثالث:

1- لدينا: $z_D=1-3i=\frac{5z_A+3z_B-6z_C}{2}$.

إذن D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;5),(B;3),(C;-6)\}$..0.5

2) $|z+2|=|z+1-i|$ يكافئ $MA=MC$ و منه مجموعة النقط M هي محور $[AC]$..............0.5

أو المستقيم الذي معادلته $2x+y+2=0$.

3-) لدينا: $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ 0.5

ومنه المثلث BCD قائم في B و متقايس الساقين.. 0.5

4-أ) $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ 0.5

4-ب): من 4-أ) نجد: $z_D - z_A = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z_C - z_A\right)$.

أي أن D هي صورة C بالتشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته 3 و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ 0.5

ج) $\left|z_A - z_{B'}\right| = 12$ و منه $AB' = 12$ 0.5

* مساحة المثلث ABB' هي 24.. 0.5

5) العبارة المركبة للتحاكي h هي: $z' - z_{\Omega} = a\left(z - z_{\Omega}\right)$. أي : $z' = -\frac{1}{3}z - \frac{2}{3}$ 01

أ-) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ 0.25

ب) دراسة اتجاه تغيرات g و تشكيل جدول التغيرات: 0.25

. $g'(x) = (-4x - 4)e^{2x}$ 0.25

x	$-\infty$			-1			$+\infty$
$g(x)$	+	+	+	0	-	-	-

* من جدول الإشارة نستنتج أن: g متزايدة تماما على $]-\infty;-1]$ و متناقصة تماما على $[-1;+\infty[$ 0.25

* **جدول التغيرات**:... 0.25

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$			
$g(x)$	1 ↗	$\frac{e^2+1}{e^2}$	↘ $-\infty$

2) $g(0) = 0$ 0.25

جدول إشارة $g(x)$ 0.5

x	$-\infty$			0			$+\infty$
إشارة $g(x)$	$+$	$+$	$+$	0	-	-	-

3) $f(x)=x+3-xe^{2x}$.

أ) النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 0.5

ب) بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-xe^{2x}\right)=0$ فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x+3$ عند $(-\infty)$...0.5

4)لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة الفرق $D(x)=f(x)-y=-xe^{2x}$ حسب الجدول:

0.5

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $D(x)$	$+ \quad + \quad +$		0	- -	-
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)		يقطع $A(0;3)$		(C_f) يقع تحت (Δ)

5-أ) $f'(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}=g(x)$ 0.25

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ب) f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و متناقصة تماما على $[0;+\infty[$...0.25

جدول تغيرات f 0.5

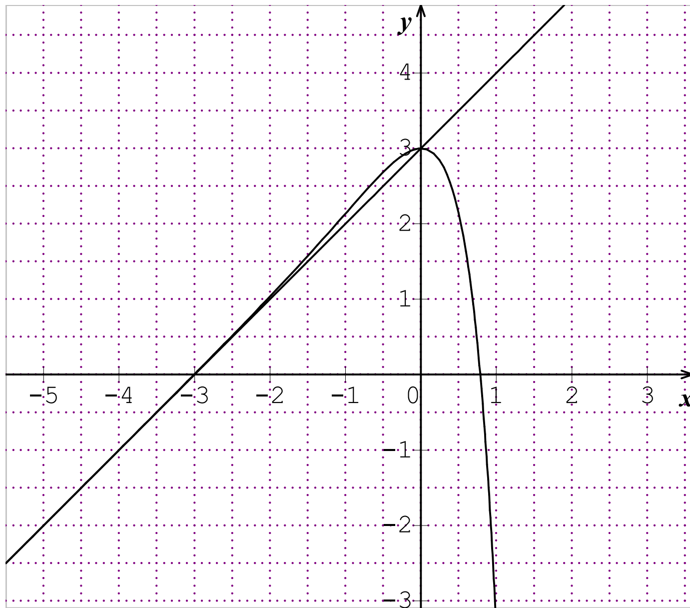
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$+\infty$

6)بما أن f مستمرة و متزايدة تماما على $[-3.5;-3]$ و $f(-3.5).f(-3)<0$ و بما أن f مستمرة و متناقصة تماما على $[0.5;1]$ و $f(0.5).f(1)<0$.

فإنه يوجد عددان حقيقيان α و β وحيدان من $]-3.5;-3[$ و $]0.5;1[$ على الترتيب بحيث: $f(\alpha)=0$ و $f(\beta)=0$ و ذلك حسب مبرهنة القيم المتوسطة...

وعليه المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين $A(\alpha;0)$ و $B(\beta;0)$........................0.5

7) رسم (Δ) و (C_f)..0.75



8) $h(x)=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

أ) من أجل $x\neq 0$ لدينا : $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$..0.25

ب) $h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$ أي: $h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}.g\left(\dfrac{1}{x}\right)$..0.25

جدول إشارة $h'(x)$..0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	- - - -		+ + + +

من جدول إشارة $h'(x)$ نستنتج أن h متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$..........0.25

جدول تغيرات h مع النهايات:..0.25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	- - -		+ +
$h(x)$	3 ↘ $-\infty$		$-\infty$ ↗ 3