الموضوع الأول

حل التمرين الأول : (04 نقاط)

1) تعيين تمثيل وسيطيا للمستقيم (D):

نضع $(t\in\mathbb{R})$ $y=t$ ثم نعوض في كلا من المعادلتين (1) و (2)

من المعادلة (1) نجد : $x+y-9=0$ و منه $x=-t+9$.

و من المعادلة(2) نجد : $y+z-4=0$ و منه $z=-t+4$

وبالتالي جملة تمثيل وسيطي : $(D)\begin{cases}x=-t+9\\y=t\\z=-t+4\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

ملاحظة : التمثيل الوسيطي ليس و حيدا.

2) إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل A و يوازي (P):

بما أن المستويين (P') و (P) متوازيان فانَّ الشعاعين الناظميين $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ مرتبطان خطيا و بالتالي يمكن أخذ

$\vec{n}'=\vec{n}(1;-1;1)$

طريقة 1 : بالتعويض

لدينا $\vec{n}'(1;-1;1)$ ناظمي للمستوي و منه معادلة (P') من الشكل $x-y+z+d=0$ نعوض بإحداثيات النقطة A في المعادلة نجد: $x_A-y_A+z_A+d=0$ أي $1+1+2+d=0$ ومنه $d=-4$

إذن معادلة ديكارتية للمستوي (P') هي : $x-y+z-4=0$

طريقة 2 : الجداء السلمي

لتكن $M(x;y;z)$ النقطة من الفضاء .

$M\in(P')$ معناه $\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}'$ و منه يكون $\overrightarrow{AM}.\vec{n}'=0$

$\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=0$ أي $1(x-1)-1(y+1)+1(z-2)=0$ وبالتالي $x-y+z-4=0$

3) اثبات أن (D) يقطع (P') في النقطة $A'(6;3;1)$:

نعين تقاطع (D) مع (P') : فيكون $(P')\cap(D)=\{A'\}$

وبالتالي إحداثيات النقطة A' هي حل الجملة : $\begin{cases}x=-t+9\\y=t\\z=-t+4\\x-y+z-4=0\end{cases}$ و منه $(-t+9)-t+(-t+4)-4=0$ و منه

$-3t+9=0$ و منه $t=3$

$$\begin{cases} x_{A'} = -3+9=6 \\ y_{A'} = 3 \\ z_{A'} = -3+4=1 \end{cases}$$ إذن $A'(6;3;1)$

4) تعيين تمثيل وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A و يوازي (P) و يقطع (D):

لدينا : $(P')\cap(D)=\{A'\}$ ومنه $\begin{cases} A\in(P') \\ A'\in(P') \end{cases}$ منه ينتج : $(AA')\subset(P')$

بما أن المستوي (P') يوازي (P) فانه المستقيم (AA') يكون موازيا للمستوي (P) و بالتالي يكون المستقيم (Δ) هو نفسه (AA')

$\overrightarrow{AA'}(5;4;-1)$ ومنه يوجد عدد حقيقي k حيث : $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AA'}$

تمثيل الوسيطي لـ (Δ) هو : $\begin{cases} x=5k+1 \\ y=4k-1 \quad (k\in\mathbb{R}) \\ z=-k+2 \end{cases}$

حل التمرين الثاني: (04 نقاط)

لدينا المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كالأتي : $u_0=\frac{1}{4}$ و $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}=\frac{3u_n+2}{u_n+4}$

1) أ) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n\prec 1$:

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

مرحلة 1 : نتحقق من صحة $P(n)$ من اجل $n=0$: لدينا $0\prec u_0=\frac{1}{4}\prec 1$ اذن $P(0)$ صحيحة

مرحلة 2 : نفرض صحة $P(n)$ معناه $0\prec u_n\prec 1$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنّ: $0\prec u_{n+1}\prec 1$

لدينا : $0\prec u_n\prec 1$ و منه $0+4\prec u_n+4\prec 1+4$ أي $4\prec u_n+4\prec 5$ بإستعمال المقلوب $\frac{1}{5}\prec\frac{1}{u_n+4}\prec\frac{1}{4}$ و منه

$-\frac{10}{5}\prec-\frac{10}{u_n+4}\prec-\frac{10}{4}$ و منه $3-\frac{10}{5}\prec 3-\frac{10}{u_n+4}\prec 3-\frac{10}{4}$ نجد : $0\prec\frac{2}{4}\prec u_{n+1}\prec 1$.

ب) إثبات أن (u_n) متزايدة ثم استنتاج انها متقاربة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+2}{u_n+4}-u_n=\frac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4}=\frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}=\frac{-(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+4}\succ 0$$

و يمكن أن نضع جدولا ندرس فيه إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ من أجل $0\prec u_n\prec 1$:

u_n	0	1
u_n-1		-
$-(u_n+2)$		-
u_n+4		+
$u_{n+1}-u_n$		+

بما أن $u_{n+1}-u_n>0$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة .

2) لدينا (v_n) المتتالية العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$

أ) البرهان على أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ وحساب حدها الأول v_0 و كتابة عبارة v_n بدلالة n:

لدينا : $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}}=\frac{3-\frac{10}{u_n+4}+2}{1-3+\frac{10}{u_n+4}}=\frac{5-\frac{10}{u_n+4}}{-2+\frac{10}{u_n+4}}\times\frac{u_n+4}{u_n+4}=\frac{5u_n+20-10}{-2u_n-8+10}=\frac{5u_n+10}{2-2u_n}=\frac{5(u_n+2)}{2(1-u_n)}=\frac{5}{2}v_n$

أي $v_{n+1}=\frac{5}{2}v_n$ و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{u_0+2}{1-u_0}=\frac{\frac{1}{4}+2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1+8}{4-1}=3$.

كتابة عبارة v_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=v_0\times q^n=3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n$

ب) اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$ ثمّ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$ و منه $v_n(1-u_n)=u_n+2$ و منه $v_n-v_nu_n=u_n+2$ أي $v_n-2=u_n+v_nu_n$ و منه

$v_n-2=u_n(1+v_n)$ و منه $u_n=\frac{v_n-2}{v_n+1}=\frac{v_n+1-1-2}{v_n+1}=\frac{v_n+1}{v_n+1}+\frac{-1-2}{v_n+1}=1-\frac{3}{v_n+1}$

إذن: $u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\frac{3}{v_n+1}\right]=1$

لأن: $\left[q=\frac{5}{2}\succ1\right]$ $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}3\times\left(\frac{5}{2}\right)^n=3\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\frac{3}{v_n+1}\right]=0$

حل التمرين الثالث (05 نقاط)

I) الحل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z+2)(z^2-4z+8)=0$

لدينا $(z+2)(z^2-4z+8)=0$ و منه $\begin{cases}z+2=0 & (1)\\ z^2-4z+8=0 & (2)\end{cases}$

حل المعادلة (1) : $z+2=0$ و منه $z=-2$.

حل المعادلة (2) : $z^2-4z+8=0$

حساب المميز: $\Delta=16-32=-16=(4i)^2$ للمعادلة حلين هما : $z_1=\frac{4-4i}{2}=2-2i$ أو $z_2=\frac{4+4i}{2}=2+2i$

مجموعة حلول المعادلة: $S=\{-2\ ;\ 2-2i;\ 2+2i\}$

II) لدينا النقط A, B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2$

1) كتابة كلا من z_A و z_B على الشكل الآسي:

لدينا: $z_A=2-2i=2(1-i)=2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_B=\overline{z_A}=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) تعين z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD :

B مركز ثقل المثلث ACD معناه B مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1)(C,1)(D,1)\}$

إذن : $z_B = \dfrac{z_A + z_C + z_D}{3}$ و منه $3z_B = z_A + z_C + z_D$ أي :

$$z_D = 3z_B - z_A - z_C = 3(2+2i) - 2 + 2i + 2 = 6 + 6i + 2i = 6 + 8i \qquad z_D = 6 + 8i$$

3) التحقق من أنّ مبدأ المعلم O نقطة من (Γ) :

لدينا : $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = \arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right)$ و منه $O \in (\Gamma)$

تعيين طبيعة مجموعة (Γ) و إنشائها:

$\arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ معناه $\arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$ معناه $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$

المجموعة (Γ) هي نصف الدائرة التي قطرها القطعة $[AB]$ ماعدا النقطتين A و B و تشمل مبدأالمعلم O.

3) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C و نسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h.

تعيين طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة :

نبحث اولا عن العبارة المركبة للتحاكي h التي هي من الشكل: $z' = az + b$

نسبة التحاكي h 2 فان : $z' = 2z + b$

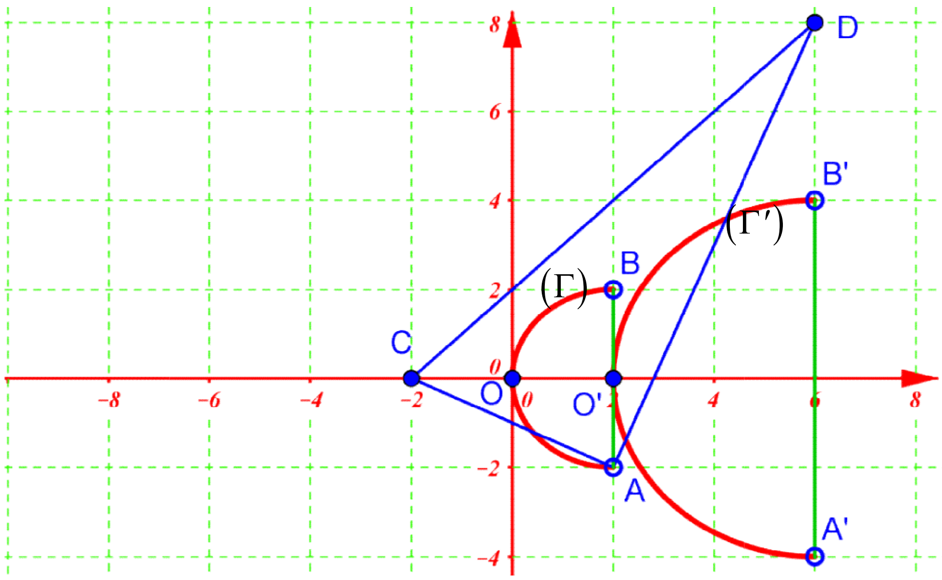
ولدينا $z_C = \dfrac{b}{1-a}$ و منه $b = z_C(1-a) = -2(1-2) = 2$ اذن العبارة المركبة للتحاكي : $z' = 2z + 2$.

ثانيا : نبحث عن A' و B'صورتي كلا من النقطتين A و B بالتحاكي h .

$h(A) = A'$ و منه $z_{A'} = 2z_A + 2 = 2(2-2i) + 2 = 4 - 4i + 2 = 6 - 4i$

$h(A) = A'$ و منه $z_{B'} = 2z_B + 2 = 2(2+2i) + 2 = 4 + 4i + 2 = 6 + 4i$

إذن المجموعة (Γ') هي نصف الدائرة التي قطرها القطعة $[A'B']$ ماعدا النقطتين A' و B'



حل التمرين الرابع : (07 نقاط)

لدينا : الدالة العددية f المعرفة على $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1) إثبات أن الدالة f فردية ثم تفسير ذلك بيانيا:

$D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ متناظرة بالنسبة إلى 0 أي من أجل كل $x\in D$ فإن $(-x)\in D$ ولدينا :

$$f(-x)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\frac{2}{3}x-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-f(x)$$

ومنه f دالة فردية .

التفسير البياني : منحناها البياني (C_f) يقبل المبدأ $O(0;0)$ مركز التناظر .

2) حساب النهايات :

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=+\infty$ لأنّ

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$

ولدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=+\infty$ و منه $x=-1$ خط مقارب عمودي (يوازي حامل محور الترتيب) للمنحني (C_f).

و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$ و منه $x=1$ خط مقارب عمودي (يوازي حامل محور الترتيب) للمنحني (C_f).

3) أ) اثبات أن من أجل كل x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$:

$$f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}=\frac{2}{3}+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x^2-2}{3(x^2-1)}+\frac{6}{3(x^2-1)}=\frac{2x^2+4}{3(x^2-1)}=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل الجدول التغيرات:

لدينا أن من أجل كل x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

$x\in$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$-\infty\nearrow+\infty$			$-\infty\nearrow+\infty$

4) إثبات أن للمعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α و أن $1,8<\alpha<1,9$:

f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1.8;1.9]$

و لدينا $f(1,8)=-0,05$ و $f(1,9)=0,10$ أي $f(1,8)\times f(1,9)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8<\alpha<1,9$.

5) اثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{2}{3}x$ خط مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $\pm\infty$:

$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\frac{2}{3}x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=0$ لأنَّ $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$

و منه $(\Delta):y=\frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ للمنحني (C_f).

تحديد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

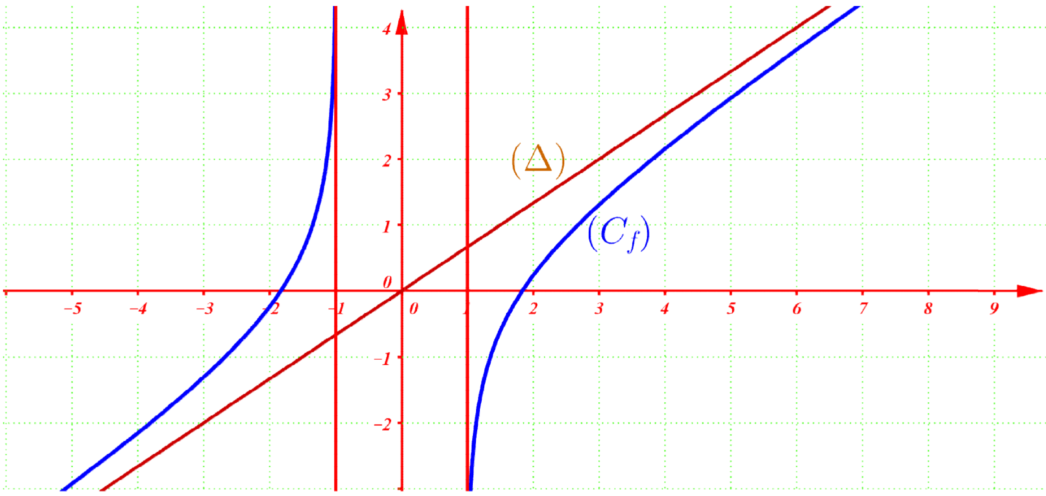
و لدينا : $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ يعني $\frac{x-1}{x+1}=1$ (ليس لها حل)

$f(x)-y\neq 0$ ومنه $(\mathcal{C}_f)\cap(\Delta)=\{\ \}$

$f(x)-y\succ 0$ إذا كان $x\in]-\infty;-1[$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ)

$f(x)-y\prec 0$ إذا كان $x\in]1;+\infty[$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ)

6) رسم المستقيم (Δ) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$:



7) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

$(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تكافئ $2x-3|m|x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تكافئ $\frac{2}{3}x-|m|x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

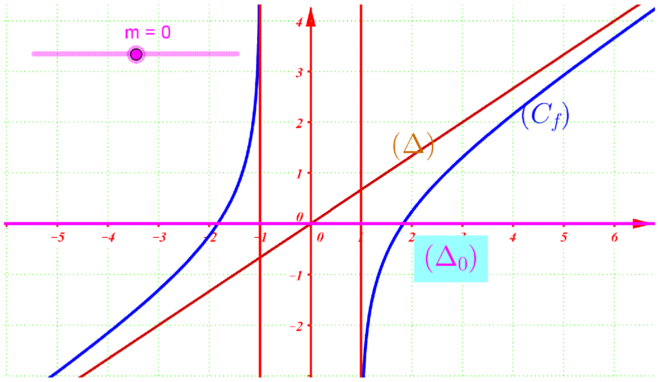
ومنه : $\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=|m|x$ أي $f(x)=|m|x$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $\left(\mathscr{C}_f\right)$ مع المستقيمات $\left(\Delta_m\right): y=|m|x$ التي تشمل المبدأ O .
(مناقشة دورانية)

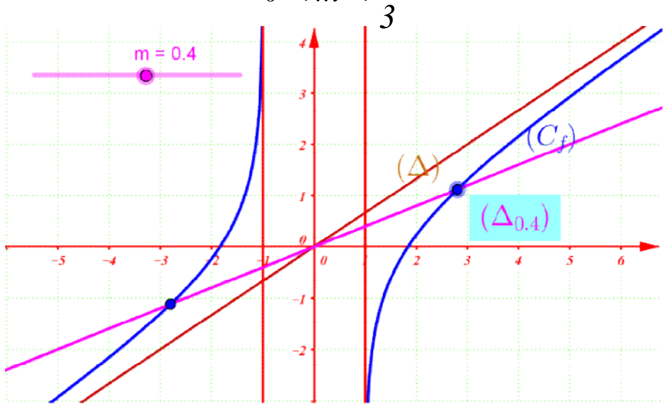
إذا كان $m \in \left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[$ فإنَّ $|m| \in \left[0;\frac{2}{3}\right[$ المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر موجب.

إذا كان $m \in \left]-\infty;-\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ فإنَّ $|m| \in \left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ المعادلة ليس لها حل.

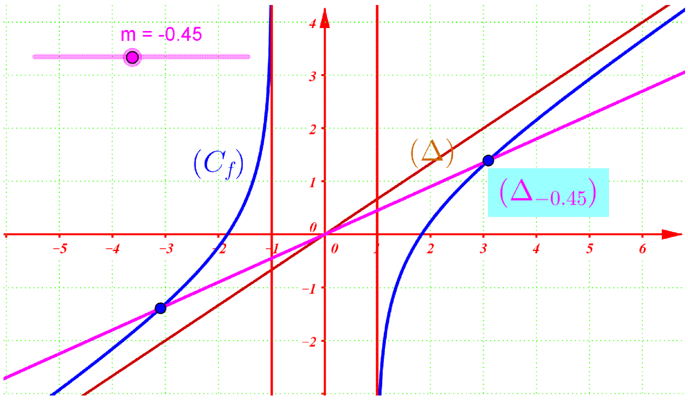
$m=0$



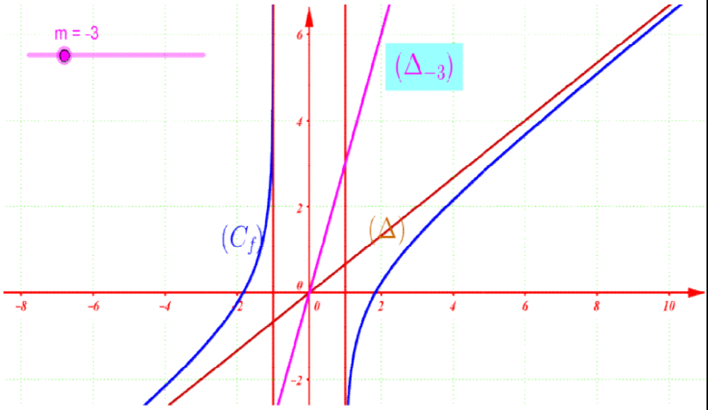
$0<m<\frac{2}{3}$



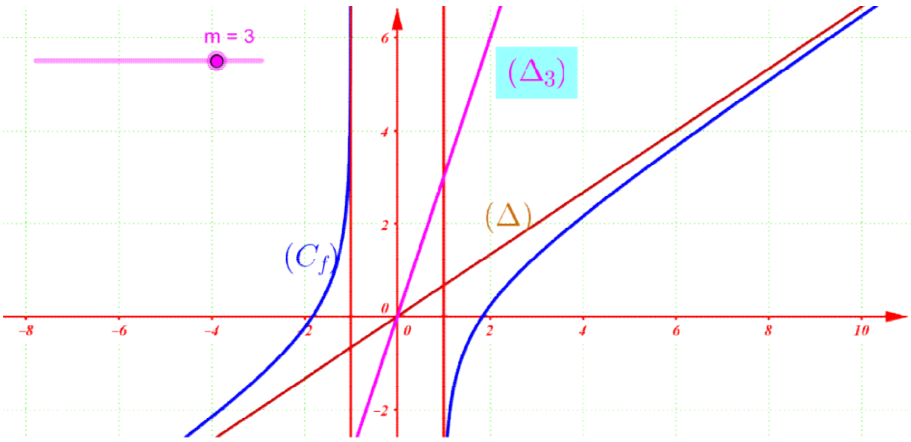
$-\frac{2}{3}<m<0$



$m \in \left]-\infty;-\frac{2}{3}\right]$



$m \in \left[\frac{2}{3};+\infty\right[$



إنتهى تصحيح الموضوع الأول

الموضوع الثاني

حل التمرين الأول : (04 نقاط)

الفضاء منسوب الي المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(3;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ ، $C(0;0;1)$.

1) إثبات أن النقط A ، B و C تعين مستويا (ABC) معادلته من الشكل $2x+3y+6z-6=0$.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;0\ ;1)$ نلاحظ $2\neq 0$ اذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا بالتالي النقط A ، B و C ليست في إستقامية فهي تعين مستويا.

$$2x_A+3y_A+6z_A-6=6+0+0-6=0 \quad \left(A\in(ABC)\right)$$

$$2x_B+3y_B+6z_B-6=0+6+0-6=0 \quad \left(B\in(ABC)\right)$$

$$2x_C+3y_C+6z_C-6=0+0+6-6=0 \quad \left(C\in(ABC)\right)$$

إذن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي : $2x+3y+6z-6=0$

2) تعيين تمثيل وسيطي لمستقيم (Δ).

$$(\Delta):\begin{cases}x=2t\\ y=3t\\ z=6t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$$

3) تعيين إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABC) :

$$(ABC)\cap(\Delta)=\{H\}$$

$\begin{cases}x=2t\\ y=3t\\ z=6t\\ 2x+3y+6z-6=0\end{cases}$ و منه $2(2t)+3(3t)+6(6t)-6=0$ و منه $4t+9t+36t-6=0$

و منه $49t-6=0$ و منه $t=\dfrac{6}{49}$

إذن $\begin{cases}x_H=2\left(\dfrac{6}{49}\right)=\dfrac{12}{49}\\ y_H=3\left(\dfrac{6}{49}\right)=\dfrac{18}{49}\\ z_H=6\left(\dfrac{6}{49}\right)=\dfrac{36}{49}\end{cases}$ $\quad H\left(\dfrac{12}{49};\dfrac{18}{49};\dfrac{36}{49}\right)$

4) إثبات (BH) عمودي على (AC) ، ثم استنتاج أن H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC

$\overrightarrow{BH}\left(\dfrac{12}{49};-\dfrac{86}{49};\dfrac{36}{49}\right)$ ومنه $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}=\left(\dfrac{12}{49}\right)(-3)+\left(-\dfrac{86}{49}\right)(0)+\left(\dfrac{36}{49}\right)(1)=-\dfrac{36}{49}+\dfrac{36}{49}=0$

و منه $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BH}$ و منه (BH) عمودي على (AC) و تكون H نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC يجب أن يكون

احد الشرطين التاليين إما (CH) عمودي على (AB) أو (AH) عمودي على (BC)

نأخذ $\overrightarrow{CH}\left(\frac{12}{49};\frac{18}{49};-\frac{13}{49}\right)$ و $\overrightarrow{AB}(-3;2;0)$ ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=\left(\frac{12}{49}\right)(-3)+\left(\frac{18}{49}\right)(2)+\left(-\frac{36}{49}\right)(0)=-\frac{36}{49}+\frac{36}{49}=0$

و منه $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CH}$ و منه (CH) عمودي على (AB)

و يمكن التلاميذ أن يبين (AH) عمودي على (BC)

نأخذ $\overrightarrow{AH}\left(-\frac{147}{49};\frac{18}{49};\frac{36}{49}\right)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-2;1)$ ومنه $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{147}{49}\right)(0)+\left(\frac{18}{49}\right)(-2)+\left(\frac{36}{49}\right)(1)=-\frac{36}{49}+\frac{36}{49}=0$

و منه $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AH}$ و منه (AH) عمودي على (BC)

ومنه تكون H نقطة تلاقي أعمدة المثلث ABC .

حل التمرين الثاني: (04 نقاط)

I) تحقق ان f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$

$f'(x)=\frac{33+16}{(x+11)^2}=\frac{49}{(x+11)^2}\succ 0$ و منه الدالة متزايدة تماما

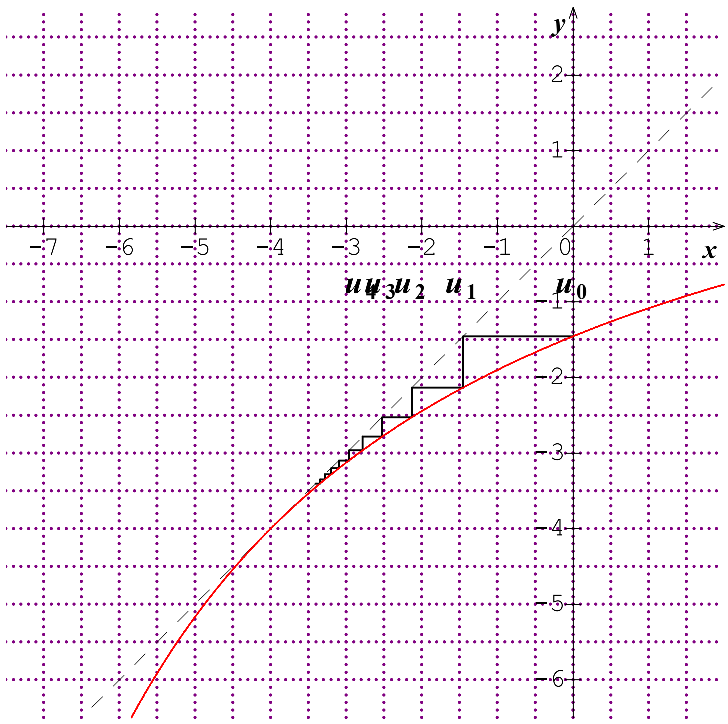
تبيان أن : من اجل $x\in[-4;1]$ فان $f(x)\in[-4;1]$

لدينا $x\in[-4;1]$ و منه $-4\le x\le 1$ مع f متزايدة تماما ينتج $f(-4)\le f(x)\le f(1)$ نجد $-4\le f(x)\le -\frac{13}{12}\prec 1$

ومنه $f(x)\in[-4;1]$.

II) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كالأتي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=f(u_n)=\frac{3u_n-16}{u_n+11}$

1) رسم



التخمين : متناقصة و متقاربة

2) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $-4 \prec u_n \leq 0$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

مرحلة 1 : نتحقق من صحة $P(n)$ من اجل $n=0$: لدينا $-4 \prec u_0 = 0 \leq 0$ اذن $P(0)$ صحيحة

مرحلة 2 : نفرض صحة $P(n)$ معناه $-4 \prec u_n \leq 0$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ: $-4 \prec u_{n+1} \leq 0$

لدينا : $-4 \prec u_n \leq 0$ و f متزايدة و منه ينتج $f(-4) \prec f(u_n) \leq f(0)$ نجد $-4 \prec f(x) \leq -\dfrac{16}{11} \prec 0$

إثبات أن (u_n) متناقصة تماما .

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-16}{u_n+11}-u_n=\frac{3u_n-16-u_n^2-11u_n}{u_n+11}=\frac{-u_n^2-8u_n-16}{u_n+11}=\frac{-\left(u_n^2+8u_n+16\right)}{u_n+11}=\frac{-\left(u_n+4\right)^2}{u_n+11}\prec 0$$

بما أن $u_{n+1}-u_n \prec 0$ فان المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3) لدينا (v_n) المتتالية العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n \times u_n = 1-4v_n$ معناه $v_n=\dfrac{1}{u_n+4}$

البرهان على أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ وحساب حدها الأول v_0 :

لدينا :

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+4}=\frac{1}{\left(\dfrac{3u_n-16}{u_n+11}\right)+4}=\frac{u_n+11}{3u_n-16+4u_n+44}=\frac{u_n+11}{7u_n+28}=\frac{u_n+11}{7\left(u_n+4\right)}=\frac{u_n+4+7}{7\left(u_n+4\right)}$$

$$v_{n+1}=\frac{u_n+4}{7\left(u_n+4\right)}+\frac{7}{7\left(u_n+4\right)}=\frac{1}{7}+\frac{1}{\left(u_n+4\right)}=\frac{1}{7}+v_n$$

و منه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\dfrac{1}{7}$ و حدها الأول $v_0=\dfrac{1}{u_0+4}=\dfrac{1}{4}$.

ملاحظة : في إثبات أن (v_n) متتالية حسابية ممكن حساب $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{7}$

حساب المجموع S حيث : $S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+.....+v_{2016}\times u_{2016}$

$$S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+.....+v_{2016}\times u_{2016}=\left(1-4v_0\right)+\left(1-4v_1\right)+...+\left(1-4v_{2016}\right)=\underbrace{1+1+...+1}_{2017\text{ مــــرة}}-4\left(v_0+v_1+...+v_{2016}\right)$$

$$S=2017-4\left[\left(v_0+v_{2016}\right)\frac{2017}{2}\right]=2017-4\left[\left(v_0+v_0+2016r\right)\frac{2017}{2}\right]=2017-4\left[\left(\frac{2}{4}+2016\times\frac{1}{7}\right)\frac{2017}{2}\right]$$

$$=2017-4\left[\left(\frac{1}{2}+288\right)\frac{2017}{2}\right]=2017-\left[\left(2+1152\right)\frac{2017}{2}\right]=-1161792$$

ومنه $S=-1161792$

حل التمرين الثالث (05 نقاط)

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\dfrac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ هي : $S=\left\{-\dfrac{1}{2}+i\right\}$ صحيح

البرهان : لدينا $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ ومنه $\begin{cases}\frac{z+1-i}{z-i}=1\\ \frac{z+1-i}{z-i}=-1\end{cases}$ نجد $\begin{cases}z+1-i=z-i\\ z+1-i=-z+i\end{cases}$ إذن $\begin{cases}1=0 \text{ مستحيل}\\ z=-\frac{1}{2}+i\end{cases}$

2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2)(\overline{z}+2)=|z+2|^2$: صحيح

البرهان : $(z+2)(\overline{z}+2)=(z+2)\overline{(z+2)}=|z+2|^2$

3) من اجل كل عدد طبيعي n $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3n}=1$ خطأ .

البرهان : $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3n}=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n}=\left[\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3\right]^n=\left[e^{i\pi}\right]^n=(-1)^n\neq 1$

4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 و نسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\varpi(0,1)$ و نصف قطرها 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\varpi'(-2,-3)$ و نصف القطر 9 . صحيح

نبحث عن عبارة المركبة لـ S تكتب على الشكل $z'=az+b$ مع $a=\left[3;\frac{\pi}{2}\right]=3e^{i\frac{\pi}{2}}=3i$ و $z_\Omega=\frac{b}{1-a}$ و منه

$b=z_\Omega(1-a)=1-3i$ و منه $z'=3iz+1-3i$

$3iz_\varpi+1-3i=-3+1-3i=-2-3i=z_{\varpi'}$ و $R'=|a|R=3\times 3=9$.

5) من اجل كل عدد حقيقي α : إذا كان $z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-\sin\alpha)$

فإن : $\arg(z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح . صحيح

حل التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) لدينا : الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=2-x^2e^{1-x}$

1) اثبات أن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$ مع تفسير النتيجة هندسيا و حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2-x^2e^{1-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2-\underbrace{\frac{x^2}{e^{x-1}}}_{0}\right]=2$ ومنه $y=2$ خط مقارب بجوار $+\infty$

و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2-x^2e^{1-x}\right]=2-\infty=-\infty$

2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$

لدينا : $f'(x)=0-\left[2xe^{1-x}-x^2e^{1-x}\right]=-2xe^{1-x}+x^2e^{1-x}=(-2x+x^2)e^{1-x}=x(x-2)e^{1-x}$

أي $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها

$f'(x)=0$ تكافئ $x(x-2)e^{1-x}=0$ و منه $x-2=0$ أو $x=0$

أي $x=2$ أو $x=0$

جدول إشارة المشتقة :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x-2$		-		-	0	+	
x		-		+		+	
e^{1-x}		+		+		+	
$f'(x)$		+		-		+	

إذا كان $x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ فان $f'(x)\succ 0$ ومنه الدالة f متزايدة.

إذا كان $x\in]0;2[$ فان $f'(x)\prec 0$ و منه الدالة f متناقصة.

مع $f(0)=2$ و $f(2)=2-4e^{-1}=2-\dfrac{4}{e}$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$2-\dfrac{4}{e}$	$\nearrow$	2

3) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

لدينا: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ مع علم أن $f(1)=2-1e^{1-1}=2-1=1$ و $f'(1)=1(1-2)e^{1-1}=-1$ و منه

$y=-1(x-1)+1$ نجد $y=-x+2$.

II) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) اثبات أن من اجل x من $\mathbb{R}$ فإن: $h(x)\geq 0$ ثم دراسة الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ و المماس (T) .

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-xe^{1-x}\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-xe^{1-x}\right]=1$.

و $h'(x)=0-\left[1e^{1-x}-xe^{1-x}\right]=-e^{1-x}+xe^{1-x}=(-1+x)e^{1-x}$.

$h'(x)=0$ و منه $x=1$

إذا كان $x\in]1;+\infty[$ فان $h'(x)\succ 0$ ومنه الدالة h متزايدة.

إذا كان $x\in]-\infty;1[$ فان $h'(x)\prec 0$ و منه الدالة h متناقصة.

مع $h(1)=1-1e^{1-1}=1-1=0$

ومنه يكون جدول تغيرات الدالة h

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	-		+
$h(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ 1

من جدول التغيرات نلاحظ أن $h(x)\geq 0$

دراسة الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ و المماس (T) .

$$f(x)-y=2-x^2e^{1-x}-(-x+2)=2-x^2e^{1-x}+x-2=x\left(1-xe^{1-x}\right)=x\,h(x)$$

$f(x)-y=0$ و منه $x=0$ أو $x=1$ إذن $(\mathcal{C}_f)\cap(T)=\{(1;1),(0;2)\}$

$f(x)-y\succ 0$ و منه $x\in\left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ فوق (T)

$f(x)-y\prec 0$ و منه $x\in\left]-\infty\ ;0\right[$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ تحت (T)

2) إثبات أن للمعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α و أن $-0,7<\alpha<-0,6$:

f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left]-0.7;-0.6\right[$

و $f(-0,6)=0,2$ و $f(-0,7)=-0,7$ أي $f(-0.6)\times f(-0.7)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

ب)رسم المستقيم (T) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left[-1;+\infty\right[$ مع $f(-1)=-5.4$

4) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.
تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

$$F'(x)=2+(2x+2)e^{1-x}-(x^2+2x+2)e^{1-x}=2+\left[(2x+2)-(x^2+2x+2)\right]e^{1-x}=2+\left[2x+2-x^2-2x-2\right]e^{1-x}$$

$$F'(x)=2+\left[-x^2\right]e^{1-x}=2-x^2e^{1-x}=f(x)$$

حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=0$ و $x=1$

لدينا $S=\int_0^1 f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_0^1=F(1)-F(0)=\left[2+(1+2+2)e^{1-1}\right]-\left[0+(0+0+2)e^{1-0}\right]=7-2e\,(ua)$

ومنه : $S=7-2e\,(ua)$

إنتهى تصحيح الموضوع الثاني