الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية مفدي زكرياء الأزهرية
إمتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة :ثالثة علوم تجريبية
دورةجوان 2017

الحل المفصل لإختبار مادة الرياضيات

نسخة معدلة

حل الموضوع الأول

حل التمرين الأول :

1/ المستقيم (D) معرّف بجملة معادلتين التّاليتين : $\begin{cases} x+y-9=0 \\ y+z-4=0 \end{cases}$

نضع : $z=t$ حيث $t\in\mathbb{R}$ و منه : $\begin{cases} x=9-y \\ y=4-z \\ z=t \end{cases}$ ومنه $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=5+t \\ y=4-t \\ z=t \end{cases}$

تمثيل وسيطي لـ (D) هو $\begin{cases} x=5+t \\ y=4-t \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

2/ $(P)\parallel(P')$ و منه $\vec{n}(1;-1;1)$ ناظمي لـ (P') ومنه معادلة ديكارتيّة لـ (P') من الشّكل $x-y+z+d=0$

$A\in(P')$ ومنه : $1+1+2+d=0$ أي $d=-4$ ومنه معادلة ديكارتيّة لـ (P') هي : $x-y+z-4=0$

3/ $\vec{u}(1;-1;1)$ شعاع توجيه لـ (D) و $\vec{n}(1;-1;1)$ ناظمي لـ(P') و لدينا $\vec{u}.\vec{n}=-1$ أي $\vec{n}.\vec{u}\neq 0$ ومنه (D) يقطع (P') في نقطة

من أجل $t=1$ و بالتّعويض بقيمة $t=1$ في تمثيل وسيطي لـ (D) نجد $x=6$ ، $y=3$ و $z=1$ و منه $A'\in(D)$ ، من جهة أخرى لدينا $6-3+1-4=0$ ومنه أيضا $A'\in(P')$ إذن : $(D)\cap(P')=\{A'\}$

4/ المستقيم $(AA')\subset(P')$ و $(P)\parallel(P')$ و منه $(AA')\parallel(P)$ و لدينا (AA') يقطع (D) في A' إذن (Δ) هو المستقيم (AA')

$\overrightarrow{AA'}(5;4;-1)$ شعاع توجيه لـ (Δ) و $A'\in(\Delta)$ إذن تمثيل وسيطي لـ (Δ) هو $\begin{cases} x=5k+6 \\ y=4k+3 \\ z=-k+1 \end{cases} \quad k\in\mathbb{R}$

حل التمرين الثاني :

1/ أ) نضع : $P(n): 0<u_n<1$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\frac{1}{4}$ و $0<\frac{1}{4}<1$ إذن $P(0)$ صحيحة

نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي n و نثبت صحتها من أجل العدد الطبيعي $n+1$

$P(n)$ صحيحة معناه : $0<u_n<1$ و منه $4<u_n+4<5$ ومنه: $\frac{1}{5}<\frac{1}{u_n+4}<\frac{1}{4}$ و ذلك حسب قواعد الحصر

و منه $\frac{10}{5}<\frac{10}{u_n+4}<\frac{10}{4}$ و منه $-\frac{10}{4}<-\frac{10}{u_n+4}<-\frac{10}{5}$ و منه $3-\frac{10}{4}<3-\frac{10}{u_n+4}<3-\frac{10}{5}$

ومنه $0.5<u_{n+1}<1$ لكن $0.5>0$ و عليه : $0<u_{n+1}<1$ إذن $P(n+1)$ صحيحة

ومنه من أجل كلّ عدد طبيعي n $0<u_n<1$

ب) $u_{n+1}-u_n=3-\dfrac{10}{u_n+4}-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+12-10-u_n^2-4u_n}{u_n+4}$

ومنه $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}$ و منه $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n^2+u_n-2)}{u_n+4}$

نعلم من نتيجة السؤال السّابق أنّ $u_n>0$ ومنه $u_n+2>0$ و أيضا $u_n<1$

لدينا $(u_n^2+u_n-2=(u_n+2)(u_n-1)$ إذن $u_n^2+u_n-2<0$ مهما كان العدد الطبيعي n إذن $\dfrac{-(u_n^2+u_n-2)}{u_n+4}>0$ مهما

كان $n\in\mathbb{N}$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$ من أجل كلّ عدد طبيعي n و هذا مايدلّ على أنّ (u_n) متزايدة تماما

(u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة

2/ أ) $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}}$ ، ومنه $v_{n+1}=\dfrac{3-\frac{10}{u_n+4}+2}{1-3+\frac{10}{u_n+4}}$ و منه $v_{n+1}=\dfrac{5u_n+10}{2-2u_n}$

أي $v_{n+1}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$

$v_{n+1}=\dfrac{5}{2}v_n$ من أجل كلّ عدد طبيعي n إذن (v_n) هندسيّة أساسها $q=\dfrac{5}{2}$ و حدّها الأوّل $v_0=3$

و منه $v_n=v_0\times q^n$ $v_n=3\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^n$ من أجل كلّ عدد طبيعي n

ب) لدينا $v_n=\dfrac{u_n+2}{1-u_n}$ و منه $v_n(1-u_n)=u_n+2$ و عليه $u_n(v_n+1)=v_n-2$ أي $u_n=\dfrac{v_n-2}{v_n+1}$

و منه $u_n=\dfrac{v_n-2+1-1}{v_n+1}$ $u_n=1-\dfrac{3}{v_n+1}$ من أجل كلّ عدد طبيعي n

ب) ممّا سبق وجدنا $v_n=3\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^n$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$ لأنّ $q>1$ و $v_0>0$ و عليه $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{v_n+1}=0$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

حل التمرين الثالث :

I) $(z+2)(z^2-4z+8)=0$ معناه $z=-2$ أو $z^2-4z+8=0$

حل المعادلة : $z^2-4z+8=0$

$\Delta=-16$ أي $\Delta=16i^2$ ومنه حلول المعادلة $z^2-4z+8=0$ هي $z_1=\dfrac{4+4i}{2}$ و $z_2=\dfrac{4-4i}{2}$ أي $z_1=2+2i$ و $z_2=2-2i$

حلول المعادلة : $(z+2)(z^2-4z+8)=0$ في $\mathbb{C}$ هي S حيث $S=\{-2;2+2i;2-2i\}$

II) 1/ $z_A=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

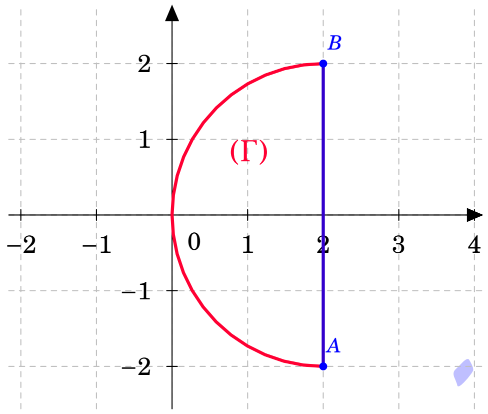
2/ B مركز ثقل المثلّث ACD معناه $z_B=\dfrac{z_A+z_C+z_D}{3}$ و منه $3z_B=z_A+z_C+z_D$

و عليه $z_D=3z_B-z_A-z_C$، $z_D=6+6i-2+2i+2$ أي $z_D=6+8i$

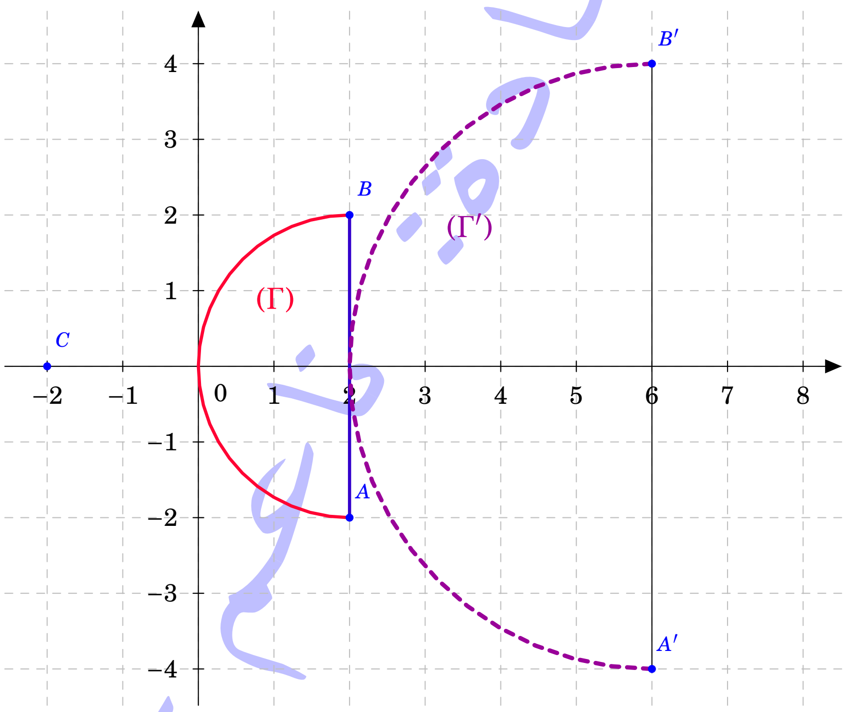
3/ من أجل $z=0$ لدينا $arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)=argz_B-argz_A=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}$ ، أي $arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ و منه $O\in(\Gamma)$

$arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_A-z}\right)=(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})$ ؛ $arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ معناه : $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\dfrac{\pi}{2}$ ومنه $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$

أي $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ و عليه (Γ) هي القوس $\overrightarrow{BA}$ من الدّائرة ذات القطر $[AB]$ ماعدا النّقطتين A وB حيث $A(2;-2)$ و $B(2;2)$



4/ الكتابة المركّبة للتحاكي h هي $z'=2z+2$ ، (Γ') صورة (Γ) بالتّحاكي h ومنه (Γ') هي القوس $\overrightarrow{B'A'}$ حيث $A'=h(A)$ و $B'=h(B)$ من الدّائرة ذات القطر $[A'B']$ ماعدا النّقطتين A' و B' مع $z_{A'}=6-4i$ و $z_{B'}=6+4i$



حل التمرين الرابع :

1/ من أجل $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ، $-x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ و لدينا $f(-x)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)$

$\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ومنه $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln\left(\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\right)$ إذن $\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$f(-x)=-\left(\frac{2}{3}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$ ومنه $f(-x)=-f(x)$ إذن f فرديّة

التّفسير البياني : (C_f) متناظر بالنّسبة إلى مبدأ المعلم O

2/ $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=-\infty$ ؛ $\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=+\infty$ ؛ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين معادلتيهما $x=1$ و $x=-1$

3/ أ) $f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}$ أي $f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2-1}$ بتوحيد المقامات نجد : $f'(x)=\frac{2x^2+4}{3x^2-3}$

و منه نجد : $f'(x)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$

ب) من أجل $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ فإنّ : $x^2-1>0$ و $x^2+2>0$ ومنه من أجل كلّ $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ فإنّ :

$f'(x)>0$ و عليه الدّالّة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1[$ و $]1;+\infty[$

جدول التّغيّرات :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖		‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖		‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4/ الدّالّة f مستمرّة على المجال $]1;+\infty[$ و خاصة على المجال $[1.8;1.9]$ و هي متزايدة عليه و $f(1.8)\times f(1.9)<0$ إذن

حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1.8<\alpha<1.9$

ملاحظة : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين هما α و $-\alpha$ حيث $1.8<\alpha<1.9$

5/ $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{2}{3}x\right)\right]=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(\frac{2}{3}x\right)\right]=0$ إذن المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=\frac{2}{3}x$ مقارب مائل لـ (C_f)

عند $+\infty$ و $-\infty$

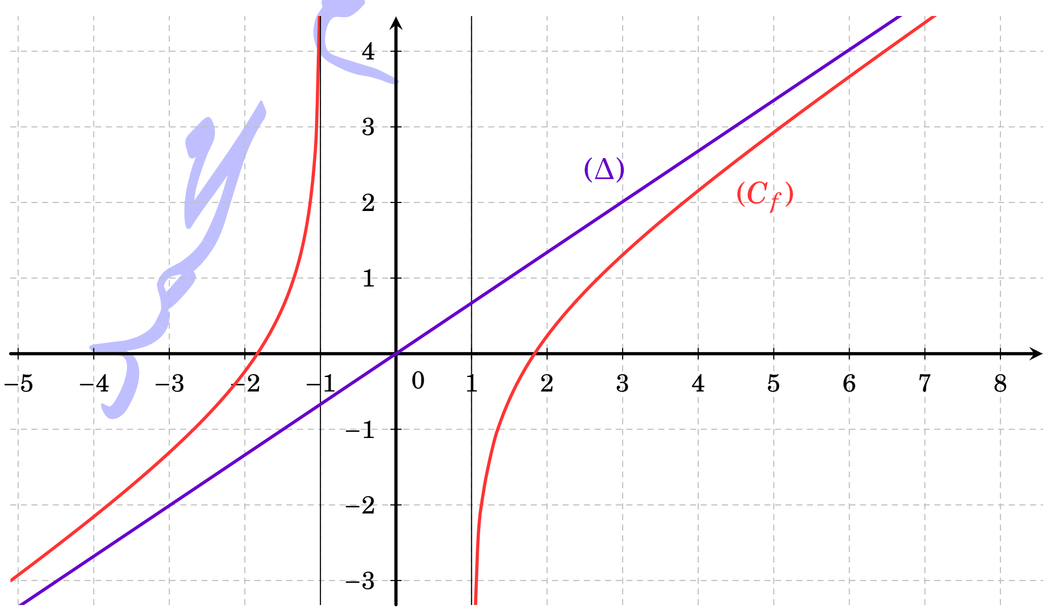
الوضعيّة النّسبيّة

ندرس إشارة الفرق $f(x)-\frac{2}{3}x$، لدينا $f(x)-\frac{2}{3}x=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)>0$ من أجل $\frac{x-1}{x+1}>1$ وهذا محقق من أجل $x\in]-\infty;-1[$ ، ومنه (C_f) يقع فوق (Δ) من أجل $x\in]-\infty;-1[$

$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<0$ من أجل $\frac{x-1}{x+1}<1$ وهذا محقق من أجل $x\in]1;+\infty[$ ، ومنه (C_f) يقع تحت (Δ) من أجل $x\in]1;+\infty[$

6/ رسم (C_f) و (Δ)



7/ $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ معناه : $2x-3|m|x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ أي : $\frac{2}{3}x-|m|x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

و منه المعادلة السّابقة تكافىء $f(x)=|m|x$ (مناقشة دورانيّة)

حلول هذه المعادلة الأخيرة بيانياً هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (d_m) الذي معادلة له : $y=|m|x$ و هذا المستقيم يشمل النّقطة $O(0;0)$ مهما كان الوسيط الحقيقي m

من البيان نجد :

إذا كان : $|m|=\frac{2}{3}$ أي $m=\frac{2}{3}$ أو $m=-\frac{2}{3}$ المعادلة السّابقة لا تقبل حلولاً

إذا كان $|m|<\frac{2}{3}$ أي $m\in\left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[$ ؛ المعادلة السّابقة تقبل حلّين

إداكان : $|m|>\frac{2}{3}$ أي : $m\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$ المعادلة السّابقة لا تقبل حلولاً

الخلاصة :

من أجل $m\in\left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[$ المعادلة : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ تقبل حليّن

من أجل $m\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ المعادلة : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ لا تقبل حلولاً

حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول :

1/ $\overrightarrow{AB}(-3;2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;0;1)$ و لدينا $\frac{-3}{-3} \neq \frac{0}{1}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطّياً و منه النقط $A;B;C$ ليست في إستقامية فهي تعيّن مستوياً (ABC)

لدينا $2\times3+3\times0+0\times6-6=0$ و $2\times0+3\times2+6\times0-6=0$ و $2\times0+3\times0+6\times1-6=0$ ، إحداثيات كل من A ، B و C تحقق المعادلة : $2x+3y+6z-6=0$ و عليه معادلة المستوى ABC : هي $2x+3y+6z-6=0$

2/ الشعاع $\vec{n}(2;3;6)$ ناظمي لـ (ABC) و هو شعاع توجيه لـ (Δ) الذي يشمل النقطة O إذن $\begin{cases} x=2t & \\ y=3t & ;t\in\mathbb{R} \\ z=6t & \end{cases}$

تمثيل وسيطي لـ (Δ)

3/ $H\in(\Delta)$ و $H\in(ABC)$ و منه $H(2t;3t;6t)$ و $2x_H+3y_H+6z_H-6=0$ ؛ إذن $4t+9t+36t-6=0$ أي : $t=\frac{6}{49}$

و منه : $x_H=\frac{12}{49}$ ، $y_H=\frac{18}{49}$ ، $z_H=\frac{36}{49}$ و عليه $H\left(\frac{12}{49};\frac{18}{49};\frac{36}{49}\right)$

4/ لدينا $\overrightarrow{BH}\left(\frac{12}{49};-\frac{80}{49};\frac{36}{49}\right)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;0;1)$ و منه $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=-\frac{36}{49}+\frac{36}{49}$ أي $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0$ و عليه : $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$

لدينا : $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OH}).\overrightarrow{AB}$ ومنه : $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}$ ، لكن $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}=0$ لأنّ (OH) هو (Δ) و $(\Delta)\perp(ABC)$ إذن فهو عمودي على (AB) و لدينا $\overrightarrow{CO}(0;0;-1)$ و $\overrightarrow{AB}(-3;2;0)$ أي $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{AB}=0$

و منه $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0$ إذن $(CH)\perp(AB)$ و وجدنا سابقا أنّ $(BH)\perp(AC)$ و $(CH)\cap(BH)=\{H\}$ إذن H هي نقطة تقاطع الأعمدة في المثلّث ABC

حل التمرين الثاني :

I) $f'(x)=\frac{17}{(x+11)^2}$ من أجل كلّ x يختلف عن -11 و منه $f'(x)=\frac{17}{(x+11)^2}$ مهما كان $x\in[-4;1]$

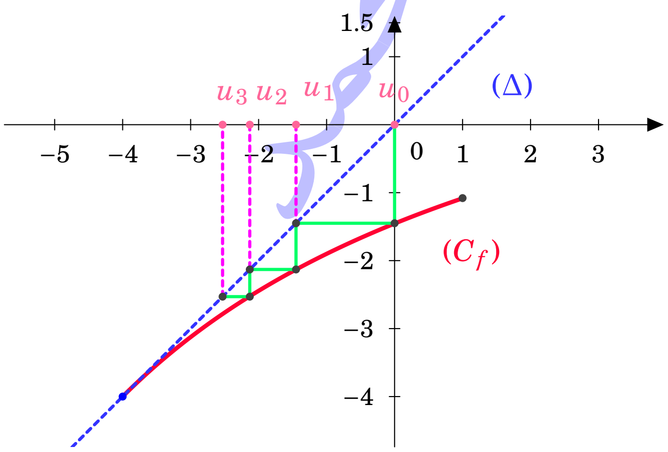
نلاحظ أنّ $f'(x)>0$ مهما كان $x\in[-4;1]$ إذن f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$

من أجل $-4\le x\le 1$ فإنّ : $f(-4)\le f(x)\le f(1)$ (تعريف التّزايد) ، لكن $f(1)=\frac{-13}{12}$ و $f(-4)=-4$ و لدينا $\frac{-13}{12}<1$

إذن $-4\le f(x)\le 1$

و منه من أجل $-4\le x\le 1$ فإنّ : $-4\le f(x)\le 1$

II) 1/ الرّسم :



نلاحظ من الرّسم أنّ : $u_3<u_2<u_1<u_0$ و منه نخمن أنّ (u_n) متناقصة تماما و متقاربة نحو العدد -4

/2 نضع : $P(n): -4<u_n\le 0$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=0$ و $-4<0\le 0$ إذن $P(0)$ صحيحة

نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي n و نثبت صحتها من أجل $n+1$ ، $P(n)$ صحيحة معناه $-4<u_n\le 0$

لدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ و $-4<u_n\le 0$ و أيضا f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ و بالأخص على المجال $]-4;0]$ إذن $f(-4)<f(u_n)\le f(0)$ أي $-4<u_{n+1}\le \frac{-16}{11}$ ، لكن $-\frac{16}{11}\le 0$ و منه $4<u_{n+1}\le 0$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة ، نختم بالقول أنّ : $4<u_n\le 0$ من أجل كلّ عدد طبيعي n

◄ $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-16}{u_n+11}-u_n$ و منه $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2-8u_n-16}{u_n+11}$

أي $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n^2+8u_n+16)}{u_n+11}$ و منه $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n+4)^2}{u_n+11}$

من سؤال سابق وجدنا أنّ : $u_n>-4$ إذن $u_n+11>0$ و $(u_n+4)^2>0$ من أجل كلّ عدد طبيعي n و عليه $u_{n+1}-u_n<0$

من أجل كلّ عدد طبيعي n و هذا ما يدلّ على أنّ المتتاليّة (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

/3 $v_n\times u_n=1-4v_n$ ، أي $v_n=\frac{1}{u_n+4}$

$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+4}$ و منه $v_{n+1}=\frac{1}{\frac{3u_n-16}{u_n+11}+4}$ و منه $v_{n+1}=\frac{u_n+11}{7u_n+28}$

إذن $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+11}{7u_n+28}-\frac{1}{u_n+4}=\frac{u_n+4}{7u_n+28}=\frac{1}{7}$

إذن $v_{n+1}=v_n+\frac{1}{7}$ من أجل كلّ عدد طبيعي n و عليه (v_n) حسابيّة أساسها $r=\frac{1}{7}$ و حدّها الأوّل $v_0=\frac{1}{4}$

$$S=(1-4v_0)+(1-4v_1)+\dots+(1-4v_{2016})=\underbrace{1+1+\dots+1}_{2017\text{ مرة}}-4(v_0+v_1+\dots+v_{2016})$$

$S=2017-4\left(\frac{2017}{2}(v_0+v_{2016})\right)$ ، لدينا $v_0=\frac{1}{4}$ و $v_{2016}=\frac{1}{4}+\frac{2016}{7}=\frac{8071}{28}$

$S=2017-\frac{2017\times 4039}{7}$ أي $S=1161792$

حل التّمرين الثالث :

/1 الإقتراح صحيح ، التّبرير :

$\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ معناه : $\frac{z+1-i}{z-i}=1$ أو $\frac{z+1-i}{z-i}=-1$ بعد حل تلك المعادلتين نجد $z=-\frac{1}{2}+i$

/2 المساواة صحيحة ، التّبرير :

$(z+2)(\overline{z}+2)=(z+2)\overline{(z+2)}$ و من خواص الطويلة و المرافق لدينا $Z\times\overline{Z}=|Z|^2$ و منه $(z+2)(\overline{z}+2)=|z+2|^2$

/3 خطأ ، التّبرير :

لدينا $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=(e^{i\pi})^n=(-1)^n$ و نعلم أنّ $(-1)^n=1$ إذا كان n زوجي و $(-1)^n=-1$ إذا كان n فردي

/4 صحيح ، التّبرير :

الكتابة المركّبة لـ S هي $z'-1=3e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1)$ أي $z'=3iz-3i+1$، صورة الدّائرة (C) هي الدّائرة (C') التي نصف قطرها

$r' = 3 \times 3 = 9$ و مركزها ω' حيث $S(\omega) = \omega'$ أي $z_{\omega'} = 3iz_{\omega} - 3i + 1$ بعد الحساب نجد $z_{\omega'} = -2 - 3i$

/5 صحيح ، التّبرير :

$$(\sin\alpha + i\cos\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = (\cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) + i\sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha))(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$$

و منه $(\sin\alpha + i\cos\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)} \times e^{-i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)}$ و منه $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha + 2\pi k$ مع $k \in \mathbb{Z}$

حل التمرين الرابع :

/1 $f(x) = 2 - x^2 \times e \times e^{-x} = 2 - e \times \dfrac{x^2}{e^x}$

و حسب التزايد المقارن فإنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ، التّفسير الهندسي لهذه النّهاية هي أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلة له : $y = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

/2 أ) $f'(x) = -2x \times e^{1-x} + e^{1-x} \times x^2 = (x^2 - 2x)e^{1-x}$ و منه $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$ من أجل كلّ عدد حقيقي x

ب) إشارة المشتق :

$f'(x) = 0$ من أجل $x = 0$ أو $x = 2$

$f'(x) > 0$ من أجل $x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ و منه الدّالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0[$ ، $]2;+\infty[$

$f'(x) < 0$ من أجل $x \in]0;2[$ و منه الدّالة f متناقصة تماما على المجال $]0;2[$

جدول التغيّرات :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$2 - \frac{4}{e}$	$\nearrow$	2

/3 معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 من الشّكل : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ أي $y = -1(x-1) + 1$ و منه معادلة للمماس (T) هي $y = -x + 2$

II) /1 $h'(x) = (x-1)e^{1-x}$

$h'(x) = 0$ من أجل $x = 1$

$h'(x) > 0$ من أجل $x \in]1;+\infty[$

$h'(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty;1[$

الدّالة h تقبل قيمة حدّية صغرى محققة عند النّقطة ذات الفاصلة 1، و منه $h(x) \geq h(1)$ لكن $h(1) = 0$ ومنه $h(x) \geq 0$ من أجل كلّ عدد حقيقي x

الوضع النسبي بين (C_f) و (T) : ندرس إشارة الفرق : $f(x) - (-x+2)$ أي $f(x) + x - 2$

لدينا $f(x) + x - 2 = 2 - x^2e^{1-x} + x - 2$ ومنه $f(x) - (-x+2) = x(1 - xe^{1-x}) = xh(x)$ ومنه إشارة الفرق السّابق هي إشارة x

(C_f) يقطع (T) في النّقطتين $(0;2)$ $(1,1)$

(C_f) يقع فوق (T) على المجال $]0;+\infty[$

(C_f) يقع تحت (T) على المجال $]-\infty;0[$

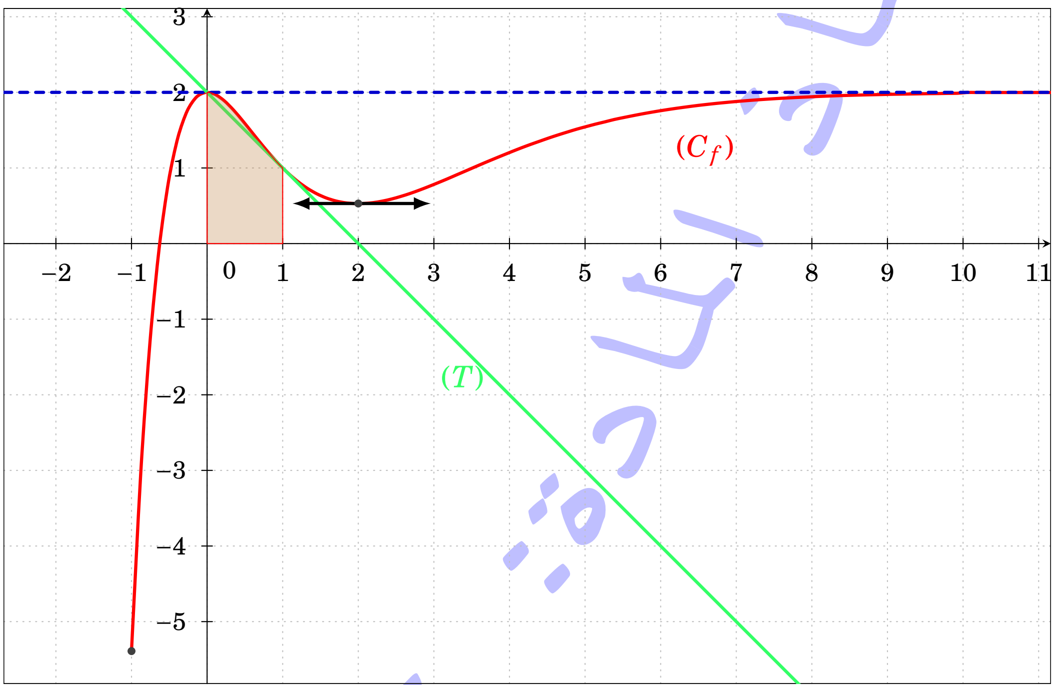
2/ الدّالّة f مستمرّة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و بالخصوص على المجال $[-0.7;-0.6]$ و لدينا $f(-0.7)\times f(-0.6) < 0$

، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ ؛ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $]-\infty;0[$ مع $-0.7<\alpha<-0.6$،

أمّا على المجالين $]0;2[$ و $]2;+\infty[$ فالمعادلة $f(x)=0$ لاتقبل حلولا لأنّ : على المجالين السّابقين $f(x)>0$ (أنظر جدول التغيّرات)

الخلاصة : المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $-0.7<\alpha<-0.6$

3/ الرّسم :



4/ $F'(x)=f(x)$ من أجل كلّ عدد حقيقي x (التحقق بسيط) ومنه F أصليّة لـ f

◄ مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمن اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$ هي A

حيث $A=\int_0^1 f(x)dx$ و منه $A=\left[F(x)\right]_0^1=\left[2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}\right]_0^1$

إذن : $A=7-2e\,\textbf{ua}$ (المساحة ملوّنة في الرّسم السّابق)

بالتوفيق لكل التلاميذ في شهادة البكالوريا ، و النجاح ان شاء الله