التمرين الأول (ن 4)

- تحديد الإجابة الصحيحة مع التعليل :

1- المستوي (P) يحوي المستقيم (AC) :

التعليل : نعوض احداثيتي النقطتين A و C في المعادلة الديكارتية (P)

$(P) : x - 2y + z - 3$

$A(1, 1, 4) \Longrightarrow 1 - 2(1) + 4 - 3 = 0 \Longrightarrow A \in (P)$

$C\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 5\right) \Rightarrow \frac{4}{3} - 2\left(\frac{5}{3}\right) + 5 - 3 = \frac{4 - 10 + 6}{3} = 0 \Rightarrow C \in (P)$

من النتائج المتحصل عليها نستنتج أن $(AC) \subset (P)$

2- المستويان (P) و (ABC) متقاطعان

التعليل : ندرس الارتباط الخطي للأشعة الناظمية لكل من المستويين (ABC) و (P).

• أولا علينا الوصول الى المعادلة الديكارتية لـ (ABC)

نفرض الشعاع $\vec{n}(a.b.c)$ حيث $\vec{n}$ ناظمي لـ (ABC). $(\vec{n} \perp \vec{AB}, n \perp \vec{AC})$

$\vec{AB}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 3-1 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix} \frac{4}{3}-1 \\ 5/3-1 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} . \vec{AB} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

$-a + 2b - 3c = 0$ ---- (1)

$\vec{n} . \vec{AC} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\frac{a}{3} + \frac{2b}{3} + \frac{3c}{3} = 0 \Rightarrow 3 \neq 0 \Rightarrow a + 2b + 3c = 0$ --- (2)

~~و~~ بجمع (1) مع (2) نجد : $b = 0 \quad c = 4b = 0$

تعويض قيمة b في العلاقة (1) $\Leftarrow -a - 3c = 0 \quad a = -3c$

$\vec{n}(-3c, 0, c) \Rightarrow c = 1 . \vec{n}(-3, 0, 1)$

$(ABC): -3x + z - 1$

$\vec{n}_P\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ناظمي لـ (P) لا يوجد ثابت k إذن: $n \nparallel n_p$: $\frac{-3}{1} \neq \frac{0}{-2}$

(P) , (ABC) ليسا متوازيين وتحقق حالة خاصة من التوازي إذن هما متقاطعان

3- المسقط العمودي للنقطة على المستقيم (Δ) هي النقطة B

التعليل : إثبات $B \in (\Delta)$: نعوض إحداثيات في التمثيل الوسيطي لـ Δ

$$0 = 1 - t \Rightarrow t = 1$$

$$3 = 2 + t \Rightarrow t = 1 \Rightarrow B \in (\Delta)$$

$$1 = 4 - 3t \Rightarrow t = 1$$

وكذلك يجب إثبات أن الشعاع $\vec{OB}$ عمودي على شعاع توجيه Δ $\vec{u}(-1,1,-3)$.

$$\vec{OB}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp OB$$

إذن B هي مسقط o على (Δ)

4) المستقيمان (Δ) و (AC) ~~متوازيان~~ متقاطعان

التعليل: من أشعة توجيه كل من (Δ) و (AC) نلاحظ أنهما ليسا متوازيان .

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3}k \\ y = 1 + \frac{2}{3}k \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 4 + k \end{cases}$$ التمثيل الوسيطي لـ (AC)

تساوي التمثيلين الوسيطيين :

$$① \text{---} \quad 1 + \frac{1}{3}k = 1 - t \Rightarrow -3t = k$$

$$② \text{---} \quad 1 + \frac{2}{3}k = 2 - t \Rightarrow t = -\frac{1}{3} \Rightarrow k = 1$$

$$4 + k = 4 - 3t \quad \ldots ③$$

بتعويض k و t في 3 نجد $5 = 5$

إذن (Δ) و (AC) من نفس المستوي وبما أنهما غير متوازيان وهما متقاطعان.

5 مجموعة النقط M من الفضاء حيث $BM^2 - 9CM^2 = 0$ هي سطح كرة

التعليل نقبل الحملة مرجحا ليكن G

$$BG + BM^2 - 9CG - 9GM^2 = 0$$

$$-8GM^2 = GB - 9GC$$

$$GM = \sqrt{\frac{GB - 9GC}{-8}} \Rightarrow GM = K$$

إذن M هي سطح كرة

التمرين الثاني (ن 4)

1) حل المعادلة $9z^2 - 6\sqrt{3}z + 4 = 0$

$\Delta = (-6\sqrt{3})^2 - 4(9)(4) = 108 - 144 = -36 = i^2 36$

$\sqrt{\Delta} = 6i$

$z_1 = \dfrac{6\sqrt{3} - 6i}{18}$ $\quad z_2 = \dfrac{6\sqrt{3} + 6i}{18}$

$\boxed{z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{3}i}$ $\quad \boxed{z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{1}{3}i}$

2)

أ) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي:

$z_A = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{1}{3}i$

$|z| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$

$Arg(z_A) = \left| \begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \theta = \pi/6$

$\boxed{z_A = \dfrac{2}{3} e^{i\pi/6}}$ $\quad \boxed{z_B = \overline{z_A} = \dfrac{2}{3} e^{-i\pi/6}}$

ب) تبيان أن $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{2016} + \left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{1437} = 0$

$\dfrac{z_A}{z_B} = e^{i\pi/3}$

$e^{i2016\pi/3} + e^{i1437\pi/3} = 0$

$(\cos 2016\pi/3 + i\sin 2016\pi/3) + (\cos 1437\pi/3 + i\sin 1437\pi/3 = 0$

$\cos 0 + i\cancel{\sin 0} + \cos\pi + i\cancel{\sin\pi} = 0$

$1 - 1 = 0$

جـ) تعين n حتى يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقيا

$e^{in\pi/3} = \cos(n\pi/3) + i\sin(n\pi/3)$

$\sin\left(n\dfrac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow n\dfrac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow \boxed{n = 3k}$

3) أ) تعين طبيعة التحويل و عناصره المميزة،

$$z' = \left(\frac{z_A}{z_B}\right) z$$

$$z' = \left(e^{i\pi/3}\right) z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$$

$$\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$$

إذن f دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب- تعيين z_C

$$z_C = \left(e^{i\pi/3}\right)\left(\frac{2}{3} e^{i\pi/6}\right)$$

$$z_C = \frac{2}{3} e^{i\pi/2} = \frac{2}{3} i$$

التمرين الثالث (05 ن):

$$6x-7y=19 \quad ....(E)$$

- إيجاد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة E حيث $x_0=y_0$

$$6x_0-7x_0=19 \Rightarrow -x_0=19$$

$$x_0=y_0=-19 \Rightarrow (-19,-19)$$

- إيجاد قيم العدد الصحيح λ

$\lambda \equiv 24[7]$ $\qquad$ $6\lambda \equiv 144[42]$ ... ①

$\lambda \equiv 5[\cancel{6}]$ $\Rightarrow$ $7\lambda \equiv 35[42]$ ... ②

$-\lambda \equiv 25[42]$ $\Leftarrow$ $-\lambda \equiv 109[42]$ نطرح ② من ①

$\lambda \equiv 17[42] \Rightarrow \lambda = \boxed{42k+17}$

تعيين باقي قسمة λ على 42

① ---- $42k \equiv 0[42]$

② --- $17 \equiv 17[42]$

+① --- $42k+17 \equiv 17[42]$ $\qquad \Rightarrow \lambda \equiv 17[42]$

باقي قسمة λ على 42 هو 17

) تعيين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة $|x+y-1|\leq 13$

نضع $x=k$ $\qquad$ $=k+y\leq 14$ $\qquad$ $y=14-k$

$$S=\left[(|k|;|14-k|)/k\in\mathbb{R}\right]$$

4) بواقي قسمة 5^n على 7

$n\equiv$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	[6]
5^n	1	5	4	6	2	3	[7]
	0	1	2	3	4	5	

ب - تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n

$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020 \,[7] \\ n \equiv 1437 \,[6] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n - 5^n \equiv 4 \,[7] \\ n \equiv 3 \,[6] \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
5^n	1	5	4	6	2	3	1	5	4
$n-5^n$	-1	-4	-2	-3	-2	2	5	2	4

من الجدول في الأعلى نجد $n \equiv 1 \,[7] \Leftarrow n \equiv 8 \,[7]$

$n \equiv 3 \,[6]$ ... (1)

$n \equiv 1 \,[7]$ ... (2) $\Rightarrow$ $7n \equiv 21 \,[42]$, $6n \equiv 6 \,[42]$

$n \equiv 15 \,[42]$ $\boxed{n = 42k + 15}$

التمرين الرابع (07 ن)

I) $g(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)$

1) أ- حساب $\lim_{x \to -1} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

- $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1) = -\infty$ ⟹ مستقيم مقارب $x = -1$ عمودي ل C_f بجوار $-\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1) = +\infty$

ب- دراسة تغيرات الدالة g على $]-1, +\infty[$

- $g'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x+1+x+1}{(x+1)^2} = \frac{x+3}{(x+1)^2}$

- من أجل $x \in]-1, +\infty[$ فإن $g'(x) > 0$. إذن g متزايدة تماما على $]-1, +\infty[$

- جدول التغيرات

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2) أ- تبيان أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

- بما أن الدالة g مستمرة ورتيبة (متزايدة) على المجال $]-1, +\infty[$. $g(0{,}4) < 0$ و $g(0{,}5) > 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد حلا وحيدا α يحقق $g(\alpha) = 0$ حيث $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

ب- إستنتاج إشارة $g(x)$

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$		$+$	

II) $f(x) = 1 + (x-1)\ln(x+1)$. $D_f =]-1, +\infty[$

1) حساب النهايات و التفسير الهندسي.

- $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} 1 + (x-1)\ln(x+1) = +\infty$ ⟹ $x = -1$ مستقيم مقارب ل C_f عمودي بجوار $+\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + (x-1)\ln(x+1) = +\infty$

2) أ - دراسة تغيرات الدالة f على $]-1,+\infty[$

- $f'(x) = \ln(x+1) + (x-1)\cdot\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x-1}{x+1} + \ln(x+1) = g(x)$

- إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$		$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $]-1,\alpha]$ ومتزايدة على المجال $[\alpha,+\infty[$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ب- تبيان $f(\alpha) = -\alpha + 4 - \dfrac{4}{\alpha+1}$

لدينا $g(\alpha) = 0$.

$$g(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} + \ln(\alpha+1)$$

$$\ln(\alpha+1) = \frac{-\alpha+1}{\alpha+1}$$

$$f(\alpha) = 1 + (\alpha-1)\ln(\alpha+1)$$

$$f(\alpha) = 1 + (\alpha-1)\left(\frac{-\alpha+1}{\alpha+1}\right) = \frac{\alpha+1-\alpha^2+\alpha+\alpha-1}{(\alpha+1)} = \frac{-\alpha^2+3\alpha}{\alpha+1}$$

$$-\alpha^2+3\alpha = (-\alpha+4)(\alpha+1) - 4$$

$\cancel{-\alpha^2+3\alpha = (2\alpha+}$

$$f(\alpha) = \frac{(-\alpha+4)(\alpha+1)-4}{\alpha+1} = -\alpha+4-\frac{4}{\alpha+1}$$

- تعيين حصر ل $f(\alpha)$

$$0{,}74 < f(\alpha) < 0{,}83$$

3) أ- التحقق أن $h'(x) = f'(x) + f'(a)$.

لدينا $h(x) = f(x) - [f'(x)(x-a) f(a)] \Leftarrow h(x) = f(x) - Ta$

T_a مماس معادلته $T = ax + b$ حيث a هي ميل المماس

أي $a = f'(a)$
$(T_a)' = a = f'(a)$

$h'(x) = f'(x) - (T_a)' = f'(x) - f'(a)$

ب- استنتاج إشارة $h'(x)$ و إتجاه تغير الدالة h على $]-1, +\infty[$

$h'(x) > 0$ إذن $h(x)$ متزايدة تماما على المجال $]-1, +\infty[$ ، $h(x) > 0$

ج- الوضع النسبي لـ Cf و المماس $T(a)$

$h(x) = f(x) - T(a) > 0 \Rightarrow f(x) > T(a)$

إذن Cf يقع فوق المماس $T(a)$

4) أ- تبيان أنه يوجد مماسان (T_a) يشملان النقطة $A(1;0)$

$$T(a) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = g(x) \Rightarrow Ta = g(x_0)(1 - x_0) + f(x_0)$$

$$T(a) = \left[\left(\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1}\right) + \ln(x_0 + 1)\right](1 - x_0) + 1 + (x_0 - 1)\ln(x_0 + 1) = 0$$

$$-(x_0 - 1)\frac{(x_0 - 1)}{(x_0 + 1)} - \cancel{(x_0 - 1)\ln(x_0 + 1)} + 1 + \cancel{(x_0 - 1)\ln(x_0 + 1)} = 0$$

$$\frac{-(x_0 - 1)^2}{x_0 + 1} + 1 = \frac{-x_0^2 + x_0 + x_0 - 1}{x + 1} + \frac{x + 1}{x + 1} = \frac{-x_0^2 + 3x}{x + 1} = 0$$

$$-x_0^2 + 3x = 0 \Rightarrow x_0(-x_0 + 3) = 0$$

إما $x_0 = 0$ أو $x_0 = 3$

إذن ومنه المنحنى (Cf) يقبل مماسين $T(a_1)$ و $T(a_1)$

يمران من النقطة $A(1, 0)$ عند الفاصلتين $x_0 = 0$ و $x_0 = 3$

- تعيين معادلة المماسين

$$T(a_1) = f'(0)(x-0) + f(0)$$

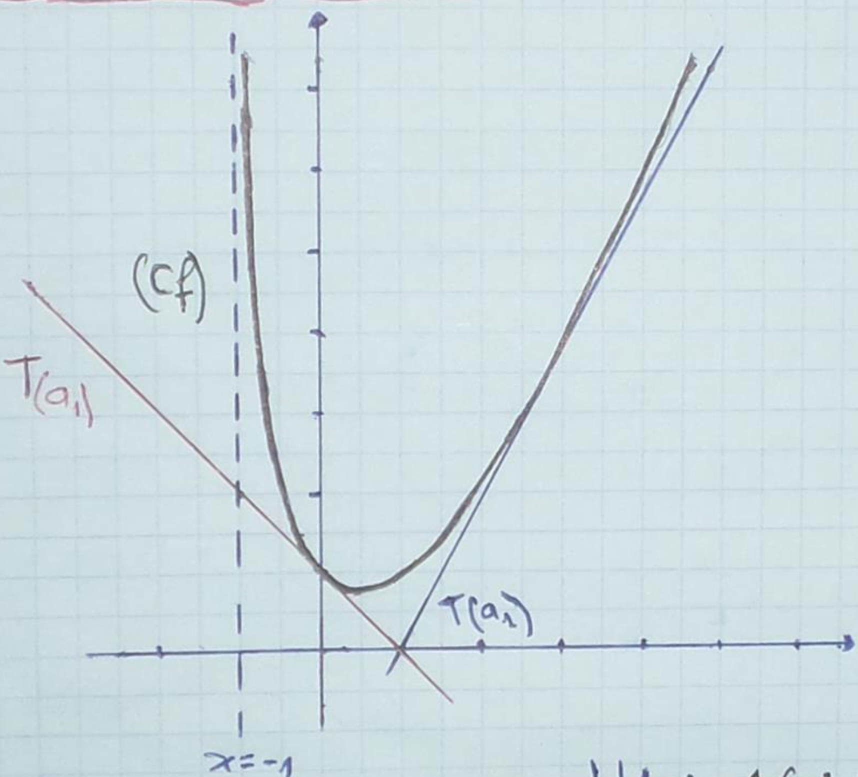
$$\boxed{T(a_1) = -x + 1}$$ $\Longleftarrow$ $x=0$ معادلة $T(a_1)$ عند

$$T(a_2) = f'(3)(x-3) + f(3)$$

$$T(a_2) = \left(\frac{2}{4} + \ln 4\right)x - \frac{6}{4} - 3\ln 4 + 1 + 2\ln 4$$

$$\boxed{T(a_2) = \left(\frac{1}{2} + \ln 4\right)x - \frac{1}{2} - \ln 4}$$ معادلة $T(a_2)$ عند $\boxed{x=3}$

ب- رسم المماسين و Cf



5) $H(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3)\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$

أ- البرهان أن H هي الدالة الأصلية لـ $(x-1)\ln(x+1)$

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left[(2x-2)\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}(x^2 - 2x + 3)\right] - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

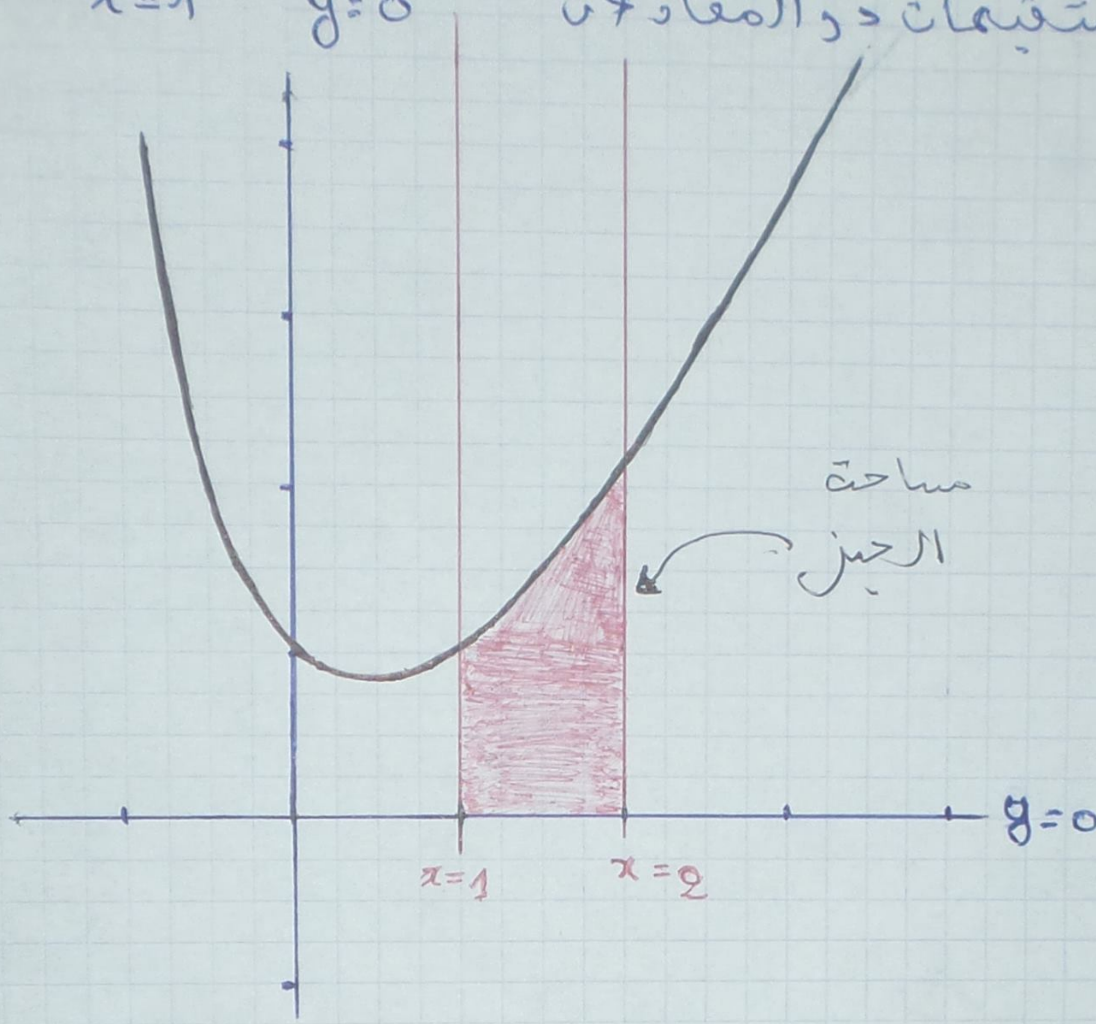
$$\frac{1}{2}\left[(2x-2)\ln(x+1) + \frac{(x+1)(x-3)}{x+1}\right] - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

$$(x-1)\ln(x+1) + x - 3 - x + 3$$

$$\boxed{H'(x) = (x-1)\ln(x+1)}$$

ب- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات ذات المعادلات

$x = 2$ $x=1$ $y=0$



$$S=\int_1^2 1+(x-1)\ln(x+1) = \left[\frac{1}{2}(x^2-2x-3)\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x\right]_1^2$$

$$S=\frac{7}{4}-\frac{3\ln(3)}{2}+2\ln 2$$

$$S\simeq 1{,}488 \text{ US}$$

5

التمرين الأول (05)

1) تبيان أن f متزايدة على المجال $[1,+\infty[$ $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

$$f'(x)=\frac{2x(2x-1)-2x^2}{(2x-1)^2}=\frac{4x^2-2x-2x^2}{(2x-1)^2}=\frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow (2x-1)^2>0 \;.\; 2x(x-1)=0$$

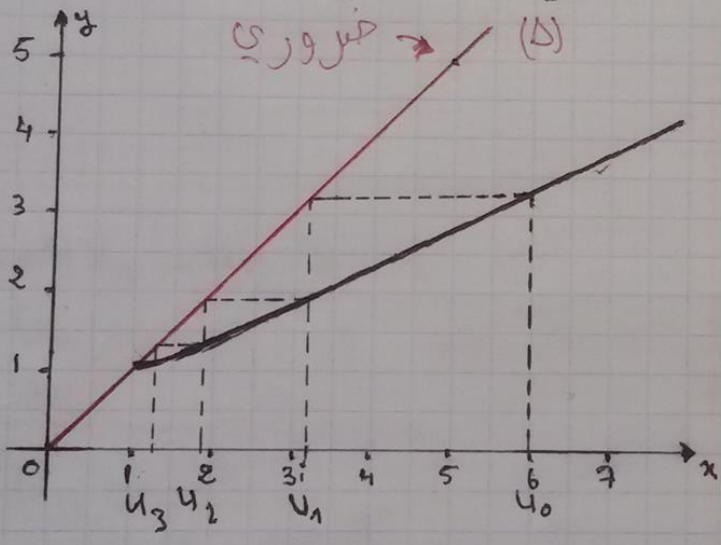
$x=0$ $x=1$

جدول الإشارة لـ $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f'(x)>0$ على المجال $[1,+\infty[$ إذن الدالة f متزايدة على هذا المجال

2) أ- تمثيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية على البيان



ب- التخمين: المتتالية (u_n) متناقصة وتتقارب نحو فاصلة تقاطع المنحنى C_f والمنصف الأول (Δ)

ج- البرهان أن $1 \leq u_n \leq 6$

نتحقق من أجل P_0

$n=0$ $1 \leq u_0 \leq 6$

محققة من أجل P_0

نفرض أن P_n محققة من أجل $1 \leq u_n \leq 6$ ونبرهن صحتها من أجل P_{n+1}

لدينا $1 \leq u_n \leq 6$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ ← $u_{n+1}=\frac{u_n^2}{2u_n-1}$

① ---- $1 \leq u_n^2 \leq 36$

$2 \leq 2u_n \leq 12$

② ---- $1 \leq 2u_n-1 \leq 11$

بقسمة 1 على 2 نجد $1 \leq \frac{u_n^2}{2u_n-1} \leq \frac{36}{12}$ ⇐ $1 \leq u_{n+1} \leq 6$

P_{n+1} محققة إذن $1 \leq u_n \leq 6$

د) دراسة تغير المتتالية U_n

• $U_{n+1}-U_n=\frac{U_n^2}{U_n-1}-U_n=\frac{U_n^2-U_n(U_n-1)}{U_n-1}$

$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n^2-U_n}{\quad}$

د) دراسة تغيرات (U_n)

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n^2}{2U_{n-1}}-U_n=\frac{U_n^2-U_n(2U_n-1)}{2U_n-1}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n^2-2U_n^2+U_n}{2U_n-1}=\frac{-U_n^2+U_n}{2U_n-1}$$

$2U_n-1>0 \quad n\in[1,+\infty[$

$-U_n^2-U_n=0 \Rightarrow U_n(-U_n+1)=0 \Rightarrow U_n=0$

$\Rightarrow U_n=1$

	1	$+\infty$
$U_{n+1}-U_n$	−	

المتتالية (U_n) متناقصة على المجال $[1,+\infty[$

هـ) تبرير تقارب (U_n): بما أن المتتالية (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة

3) أ- البرهان أن (W_n) هندسية أساسها 2

$W_{n+1}=\ln(V_{n+1}) \Rightarrow V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}}$

$$V_{n+1}=\frac{\frac{U_n^2}{2U_n-1}-1}{\frac{U_n^2}{2U_{n-1}}}=\frac{\frac{U_n^2-2U_n+1}{2U_n-1}}{\frac{U_n^2}{2U_n-1}}=\frac{U_n^2-2U_n+1}{U_n^2}=\frac{(U_n-1)^2}{U_n^2}$$

$$V_{n+1}=\left(\frac{U_n-1}{U_n}\right)^2=V_n^2 \Rightarrow W_{n+1}=\ln(V_n)^2$$

• $W_{n+1}=2\ln V_n \Rightarrow W_{n+1}=2W_n \Rightarrow$ إذن (W_n) هندسية أساسها 2

تعيين الحد الأول للمتتالية (w_n)

$w_0 = \ln(v_0) \Rightarrow v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{6-1}{6}$

$w_0 = \ln\left(\frac{5}{6}\right)$

ب- عبارة الحد العام لـ w_n

$w_n = w_0 q^n \Rightarrow w_n = 2^n \ln\left(\frac{5}{6}\right)$

- التعبير عن (v_n) بدلالة n.

لدينا $\Longleftarrow w_n = \ln(v_n) \Leftarrow v_n = e^{w_n}$

$v_n = e^{2^n \ln\left(\frac{5}{6}\right)}$

$v_n = e^{\ln\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}} \Rightarrow \boxed{v_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$

ج- تبيان أن $u_n = \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$

لدينا. $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

$v_n u_n - u_n = -1$.

$u_n(v_n - 1) = -1 \Rightarrow u_n = -\frac{1}{v_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 - v_n}$

$$\boxed{u_n = \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}}$$

حساب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 - \cancel{\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}_{\to 0}} = 1$$

التمرين الثاني (4,5 ن)

I) 1- حل المعادلة:

$$(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(2z - \sqrt{2}) = 0$$

$2z - \sqrt{2} = 0$ $\quad \boxed{z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4(1)(4) = 8 - 16 = -8 = i^2 8$

$\sqrt{\Delta} = i2\sqrt{2} \Rightarrow z_2 = \frac{2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$\boxed{z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}}$

$z_3 = \frac{2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{z_3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

2) كتابة الحلول على الشكل الأسي

. $|z_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

. $\arg(z_1) \left| \begin{array}{l} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{array} \right. \quad \theta = 2\pi$

$\boxed{z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/2}}$

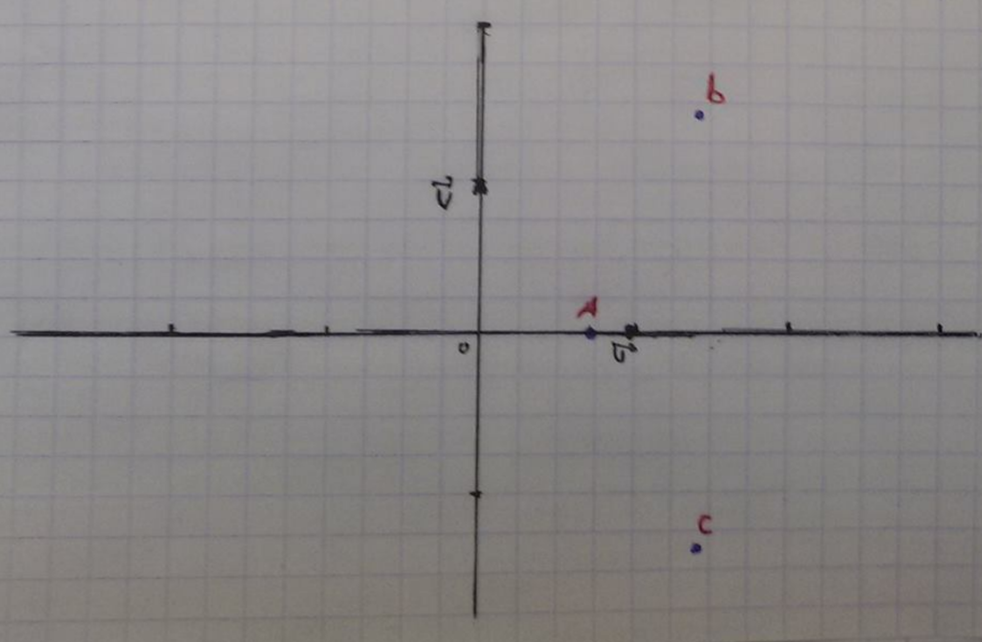
. $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$

$\operatorname{Arg}(z_2) \left| \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \quad \theta = -\pi/4$

$\boxed{z_2 = 2e^{-i\pi/4}}$

. $z_3 = \overline{z_2} \rightarrow \boxed{z_3 = 2e^{i\pi/4}}$

II) 1) تعليم النقط A , B , C على المعلم



2) حساب اللاحقتين d و e

• D صورة النقطة C بالتشابه S الذي مركزه A ونسبته 3 وزاويته π

• $d-a=3e^{i\pi}(c-a) \Rightarrow d-a=3(\cos\pi+i\sin\pi)(c-a)$

$d=-3c+3a+a \Rightarrow d=3c+4a$

$d=-3(\sqrt{2}-i\sqrt{2})+4\frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}+i3\sqrt{2}+2\sqrt{2}$

$\boxed{d=-\sqrt{2}+i3\sqrt{2}}$

: E صورة C بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

• $e-0=e^{-i\pi/2}(c-0) \Rightarrow e=\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})(c)$

$e=-b=-ic$ $\quad \boxed{e=-(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}$

III) 1) كتابة z على الشكل المثلثي:

$z=\frac{d-b}{e-b}=\frac{-\sqrt{2}+i3\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \cancel{\frac{i2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}} = -i$ $\quad \boxed{z=-i}$

$z=-i$

$z=\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2)$

2) طبيعة الرباعي $ADFE$ مربع

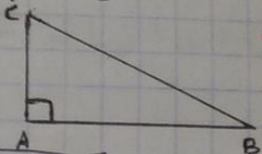
2

التمرين الثالث (04)

1) تبيان أن ABC قائم في A

هناك عدة طرق للبرهان منها:

ط 1: نظرية فيتاغورس



$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6-6\\-2-1\\-1-5\end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = BC = \sqrt{(-3)^2+(-6)^2} = \sqrt{45}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6-3\\-2+2\\-1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = AC = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{18}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-3\\1+2\\5-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{3^2+3^2+3^2} \Rightarrow AB = \sqrt{27}$

$45 = 18 + 27 \Rightarrow$ إذن مثلث ABC قائم في A

ط 2: إثبات تعامد الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = 9 - 9 = 0 \Rightarrow$ إذن مثلث ABC قائم في A

2) معادلة المستوي (P)

ط 1: أي مستوي معادلته من الشكل $ax + by + cz + d = 0$

حيث (a, b, c) إحداثيات الشعاع الناظمي للمستوي و (x, y, z) إحداثيات نقطة تنتمي للمستوي

لدينا $A \in (P)$ والشعاع $\overrightarrow{AB} \perp P$ إذن هو ناظمي له

$3x + 3y + 3z + d = 0$

$3(3) + 3(-2) + 3(2) + d = 0 \Rightarrow d = -9$

إذن معادلة (P) من الشكل: $\boxed{3x + 3y + 3z - 9 = 0}$

ط 2: $M(x, y, z)$ نقطة حيث $M \in (P)$ إذن $\overrightarrow{AM} \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\\z-2\end{pmatrix} = 3(x-3) + 3(y+2) + 3(z-2) = 0$

$= 3x - 9 + 3y + 6 + 3z - 6 = 0$

$\boxed{(P): 3x + 3y + 3z - 9}$

(3

أ) $(P) \Rightarrow 3x+3y+3z-9=0$ و $(P') \Rightarrow x-z-1=0$

المستويان (P) و (P') متعامدان لأن حتى يكون مستويان متعامدان في الفضاء يكفي أن تتعامد أشعتهما الناظمية

$\vec{n}_p = \vec{AB} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ و $\vec{n}_{p'} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ، $\vec{n}_{p'} \cdot \vec{n}_p = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = 9-9=0$

إذن $\vec{n}_{p'} \perp \vec{n}_p$ معناه أن $(P') \perp (P)$

ب) تبيان أن $(P') \cap (P) = \Delta$

• التمثيل الوسيطي لـ (Δ)

$$(\Delta)\begin{cases} x = 3+t \\ y = -2-2t \\ z = 2+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

• نقوم بتعويض التمثيل الوسيطي لـ (Δ) في (P) و (P')

$(P): 3x+3y+3z-9.$

$3(3+t)+3(-2-2t)+3(2+t)=0$

$9+3t-6-6t+6+3t-9=0 \Rightarrow \Delta \in (P)$ إذن

$(P') = x-z-1$

$3+t-2-t-1=0 \longrightarrow \Delta \in (P')$ إذن

من النتائج المحصل عليها أعلاه نلاحظ أن $(P') \cap (P) = \Delta$

(4

أ) - البرهان أن H هي المسقط العمودي لـ D على Δ

للبرهان نستعمل العلاقة التالية: $\vec{DH} \cdot \vec{u}$

كما يجب التأكد أن $H \notin \Delta$

$\vec{DH}\begin{pmatrix}4/3 - 0\\4/3 - 1\\1/3 - 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\vec{DH}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}4/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{4}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0 \Rightarrow \vec{DH} \perp \vec{u}$ إذن

ومنه H هي المسقط العمودي لـ D على (Δ)

ب) حساب المسافة بين D و (Δ): المسافة هي: $d(D,\Delta) = \|\vec{DH}\|$

$\|\vec{DH}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+1+4}{9}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$

5) أ- تبيان أن $E \in (\Delta)$

الطريقة 1: التمثيل الوسيطي لـ (Δ)

$$\Delta \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 2t & t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$$

x , y , z : هم إحداثيات أي نقطة تنتمي لـ Δ

نعوض إحداثيات E في التمثيل الوسيطي

$0 = 3 + t \Rightarrow \boxed{t = -3}$

$4 = -2 - 2t \Rightarrow 6 = -2t \Rightarrow \boxed{t = -3}$

$-1 = 2 + t \Rightarrow \boxed{t = -3}$

قيمة الوسيط t ثابتة إذن $E \in (\Delta)$

طريقة 2: لدينا $(P) \cap (P') = \Delta$ معناه $B \in (P)$ و $\in (P')$

لبرهان أن $E \in (\Delta)$ يكفي البرهان أن $E \in (P)$ و $E \in (P')$

$(P): 3x + 3y + 3z - 9$

$3(0) + 3(4) + 3(-1) - 9 = 12 - 12 = 0 \Rightarrow E \in (P)$

$(P'): x - z - 1$

$+1 - 1 = 0 \Rightarrow E \in (P')$

بما أن $E \in (P)$ و (P') فإن $E \in (\Delta)$

ب- حساب حجم رباعي الوجوه $ABCE$

$V = \frac{S \cdot h}{3} \Rightarrow S = \frac{1}{2}(AB \cdot AC) = \frac{1}{2}(\sqrt{27} \cdot \sqrt{18}) = \frac{9\sqrt{6}}{2}$

$h = EA$ $\qquad \overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ -2 - 4 \\ 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$EA = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$$V = \frac{\frac{9\sqrt{6}}{2} \cdot 3\sqrt{6}}{3} = \frac{27 \cdot 6}{6} = 27 UV$$

التمرين الرابع (06,5)

(I $g(x) = x - x\ln x$ $\quad D_g =]0;+\infty[$

1) أ) حساب $\lim_{x\to 0} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$\boxed{\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0}$ نهاية شهيرة

• $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \overset{0}{x} - \overset{0}{x\ln x} = 0$

• $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x - x\ln x = \lim_{x\to+\infty} x(1-\ln x)$

• $\lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{x}\,\underset{-\infty}{(1-\ln x)} = -\infty$

ب) دراسة تغيرات الدالة g

• $g'(x) = 1 - \left[\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right] = 1 - \ln x + 1$

$g'(x) = -\ln x$

$g'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow -1 \neq 0$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

$\Rightarrow$ الدالة g متزايدة على المجال $]0,1]$ و متناقصة على المجال $[1,+\infty[$

جدول التغيرات للدالة g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$-\infty$

$g(1) = 1 - 1\ln 1 = 1$

2) • تبيان أن $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا (α) (مبرهنة القيم المتوسطة)

بما أن الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[1,+\infty[$ (متناقصة)

• $g(3,5) > -1$ و $g(3,6) < -1$ • إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإنه يوجد حلا وحيدا α يحقق $g(\alpha) = -1$ حيث $3,5 < \alpha < 3,6$

3) إستنتاج إشارة $g(x)+1$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)+1$	||	$+$	0	$-$	

II) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x+1}$, $D_f=]0,+\infty[$

1) تبيان أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين $y=0$ ، $x=0$

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{\ln x}{x+1} = \lim \dfrac{1}{x+1}(\ln x) = -\infty$

$x=0$ مستقيم مقارب عمودي لـ C_f.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1}\cdot \ln x$

$\lim \dfrac{1}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}\cdot \cancel{x}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1\cdot 0 = 0$

$y=0$ مستقيم مقارب أفقي لـ C_f بجوار $+\infty$

2) أ) البرهان أن $f'(x)=\dfrac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

- $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}(x+1)-\ln x}{(x+1)^2} = \dfrac{\frac{x+1-x\ln x}{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2} = \dfrac{x-x\ln x+1}{x(x+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)+1$ لأن من أجل $x\in]0,+\infty[$ $.\ x(x+1)^2>0$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]0,\alpha]$ و متناقصة على المجال $[\alpha,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

جـ) معادلة المماس عند $x=1$

$T=f'(1)(x-1)+f(1)$

$T=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

د- حساب $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

هذه حالة عدم تعين حلها عن طريق استعمال العدد المشتق: نأخذ البسط ونشتقه

$\bullet \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$:

$$[f(x) - f(\alpha)]' = f'(x) = g(x) + 1$$

$$\lim_{x \to \alpha} g(x) + 1 = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0$$

التفسير الهندسي: f قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة α والمنحنى (C_f) يقبل مماس معامل توجيهه 0

3) أ) تبيان أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

$$\bullet\ f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha + 1}$$

لدينا: $g(\alpha) = -1 \Rightarrow \alpha - \alpha \ln \alpha = -1$

$$\ln \alpha = \frac{1 + \alpha}{\alpha}$$

الآن نقوم بتعويض قيمة $\ln \alpha$ في $f(\alpha)$

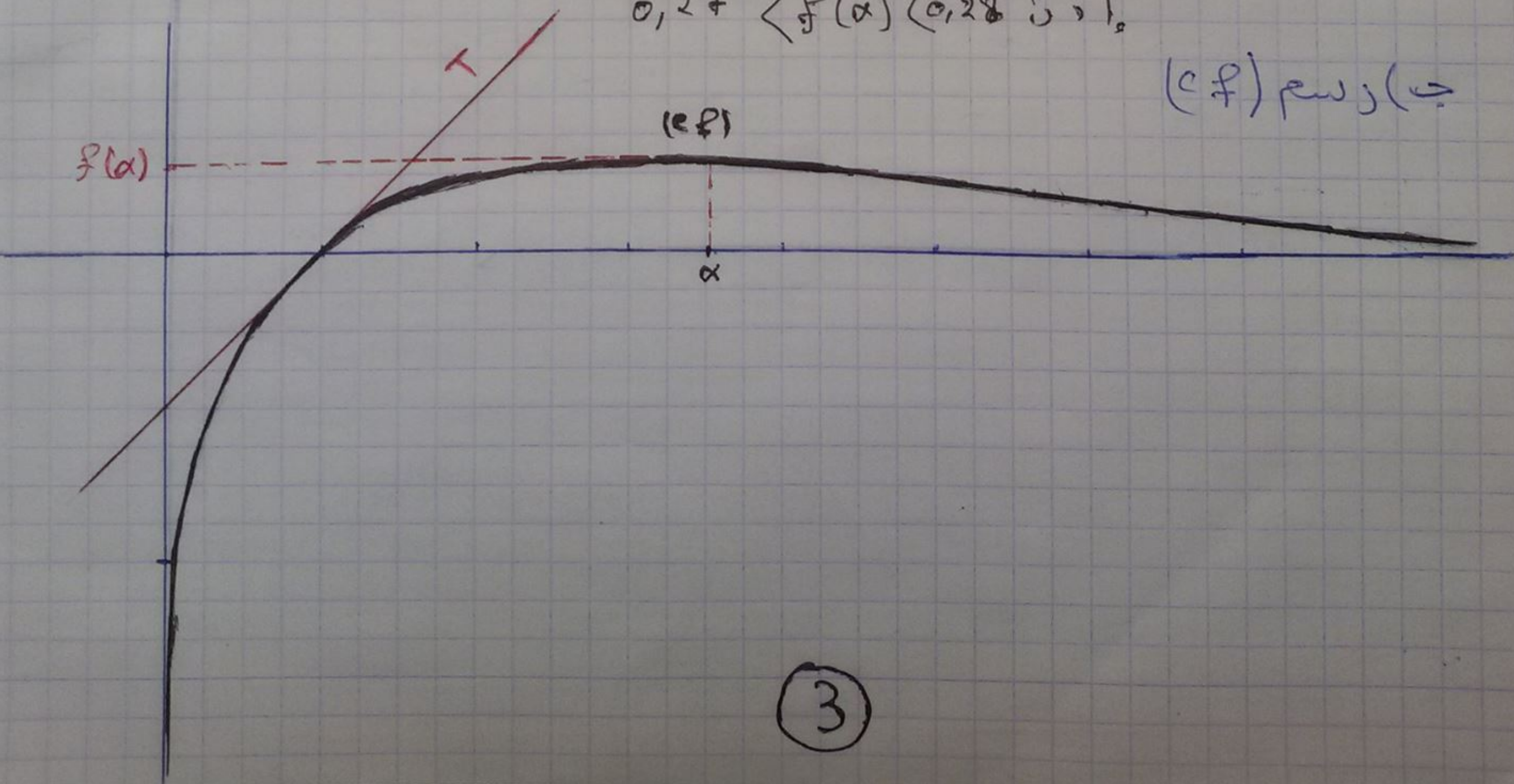
$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1} \cdot \ln \alpha = \frac{1}{\alpha + 1} \cdot \frac{1 + \alpha}{\alpha} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

ب) حصر $f(\alpha)$

لدينا $3,5 < \alpha < 3,6 \Leftarrow \frac{1}{3,6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3,5}$

إذن: $0,27 < f(\alpha) < 0,28$

ج) رسم (C_f)



4) أ- التحقق أن E يؤول حلها إلى حل المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}x-m$

لدينا: $\cdot\ f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$ $\cdot\ \frac{\ln x}{x+1}=\frac{1}{2}x-m \Rightarrow \frac{\ln x}{x+1}=\frac{x-2m}{2}$

$2\ln x=(x+1)(x-2m) \Rightarrow 2\ln x=x^2-2xm+x-2m$

$2\ln x=x^2+x-2m(x+1)$

خاصية من خصائص " ln "

$y\ln x=\ln x^y$

$E_x:\ 3\ln x=\ln x^3$

ب) تعيين قيم m التي من أجلها تقبل حلين متمايزين

حلولها هي فواصل تقاطع $\mathcal{C}_f$ و مستقيم ذو: $f(x)=\frac{1}{2}x-m$

ملاحظة معامل توجيه المستقيم هو نفسه ميل المماس T أي متوازيين

~~من أجل~~ . $m\in\,]\cancel{-\frac{1}{2},+}$

. من أجل $m\in\,]-\infty,-\frac{1}{2}[$ المعادلة E تقبل حلين متمايزين

. من أجل $m=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ المعادلة E تقبل حلا مضاعفا

. من أجل $m\in\,]-\frac{1}{2},+\infty[$ المعادلة E لا تقبل حلول

غير مطالب بهم

(5

$h(x)=\frac{\ln|x|}{-|x|-1}$ $D_h=\mathbb{R}^*$

أ- تبيان أن h زوجية

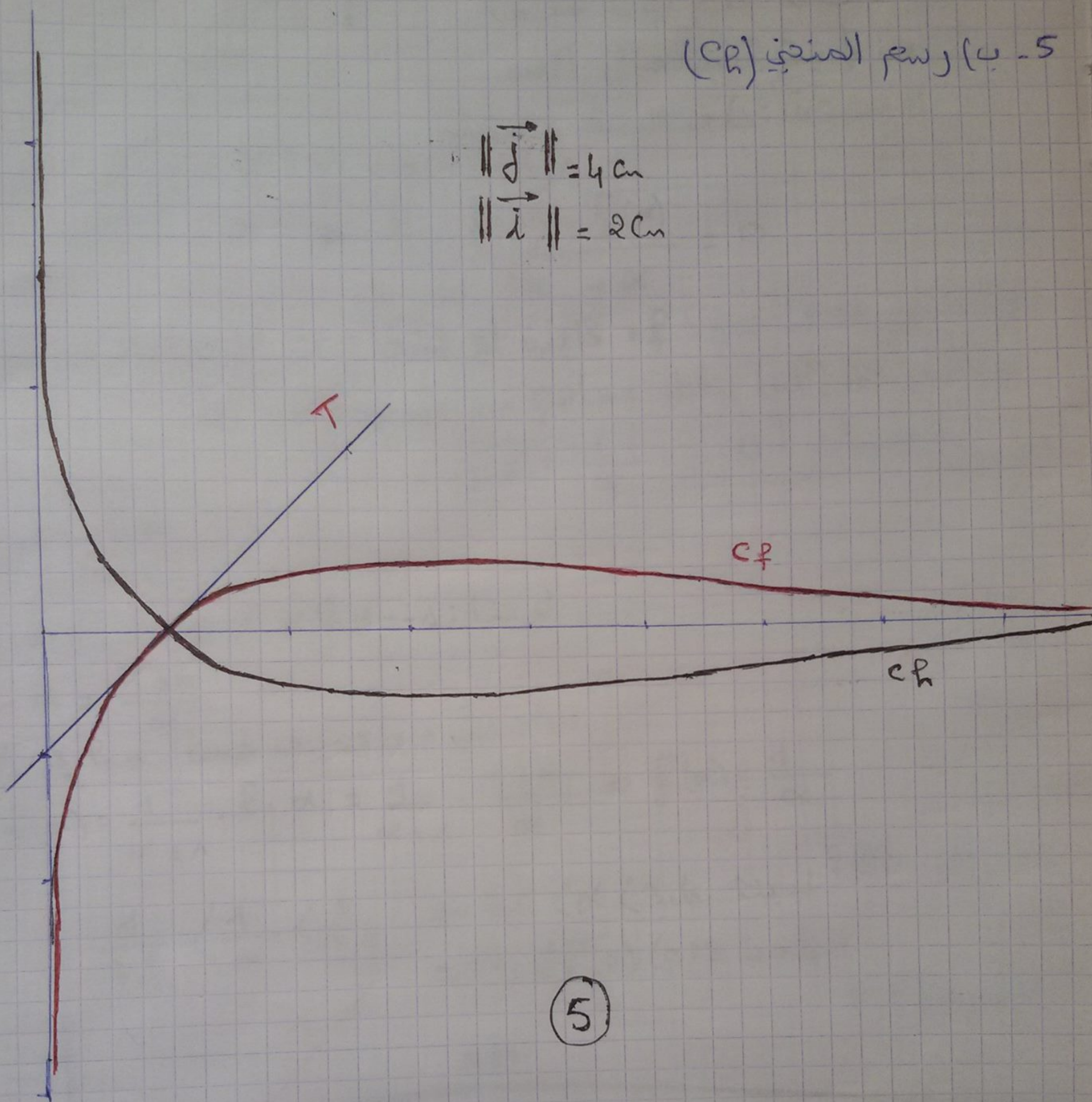
$h(x)=\frac{\ln|x|}{-|x|-1} \Rightarrow h(-x)=\frac{\ln|-x|}{-|-x|-1}=\frac{\ln|x|}{-|x|-1}$

$h(x)=h(-x)$ إذن الدالة h زوجية

5 - ب) رسم المنحني (C_h)

$\|\vec{j}\| = 4\,cm$

$\|\vec{i}\| = 2\,cm$



5