التمرين الأوّل☹

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها.
3. حدّد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).
4. بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)+f(-x)=2$ وفسّر النتيجة هندسيا.
5. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1، يطلب كتابة معادلة له.
6. احسب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل ثم ارسم كلا من (T) و (C_f).
7. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(3-m)e^x=m+1$

الحل☺

1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=-1$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x-1=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x(3+e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3+e^{-x})}{(1+e^{-x})}=\dfrac{3}{1}=3$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$f'(x)=\frac{3e^x(e^x+1)-e^x(3e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{e^x\left(3(e^x+1)-(3e^x-1)\right)}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{e^x(3e^x+3-3e^x+1)}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)>0$ لأنّ $4e^x>0$ و $(e^x+1)^2>0$ وعليه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3

aziz_mus1@hotmail.fr

3. تحديد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=-1$ بجوار $-\infty$.

و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=3$ بجوار $+\infty$.

4. تبيين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)+f(-x)=2$.

$$f(x)+f(-x)=\frac{3e^x-1}{e^x+1}+\frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{3e^x-1}{e^x+1}+\frac{e^{-x}\left(3-e^x\right)}{e^{-x}\left(1+e^x\right)}=\frac{3e^x-1}{e^x+1}+\frac{3-e^x}{1+e^x}=\frac{2e^x+2}{e^x+1}=2$$

تفسير النتيجة هندسيا.

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإنّ $-x\in\mathbb{R}$ ولدينا $f(x)+f(-x)=2$ معناه $f(-x)=2-f(x)$ أي $f(2\times0-x)=2\times1-f(x)$ وعليه النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5. تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1، يطلب كتابة معادلة له.

(T) معامل توجيهه 1 معناه $f'(x)=1$.

لنحل المعادلة $f'(x)=1$

$f'(x)=1$ معناه $\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=1$ ويكافئ $4e^x=e^{2x}+2e^x+1$ ويكافئ $e^{2x}-2e^x+1=0$ ويكافئ $\left(e^x-1\right)^2=0$

أي $x=0$ وبالتالي (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 عند النقطة ذات الفاصلة 0.

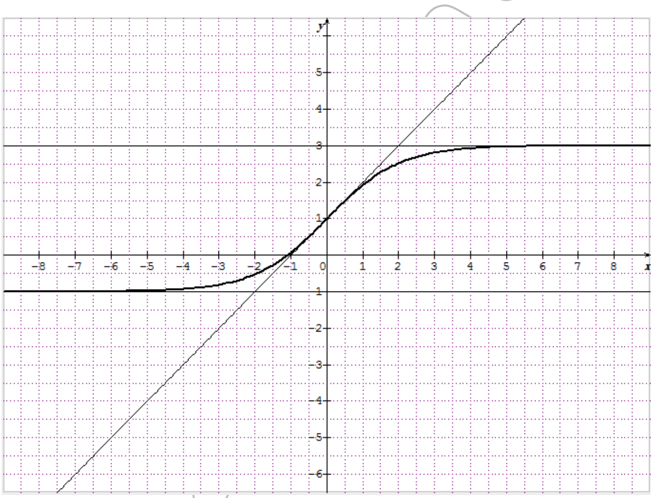
كتابة معادلة المماس (T).

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=x+1$

6. حساب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.

$f(x)=0$ تكافئ $\frac{3e^x-1}{e^x+1}=0$ وتكافئ $3e^x-1=0$ وتكافئ $e^x=\frac{1}{3}$ أي $x=-\ln3$ إذن $(C_f)\cap(Ox)=\{B(-\ln3;0)\}$

رسم كلا من (T) و (C_f).



7. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(3-m)e^x=m+1$

$(3-m)e^x=m+1$ يكافئ $3e^x-me^x=m+1$

يكافئ $3e^x-1=m\left(e^x+1\right)$ أي $f(x)=m$

إذا كان $m\le-1$ أو $m\ge3$ فإن المعادلة لاتقبل حلا.

إذا كان $-1<m<1$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا

إذا كان $1<m<3$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حلا واحد و وحيدا معدوما.

<u>التمرين الثاني</u>

I) لتكن الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(2-x)e^x-1$

1. عّن نهايتي الدّالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
2. أ- ادرس تغيّرات الدالة g.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ب ـ شكل جدول تغيّرات الدّالة g.

3. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1{,}2 \prec \alpha \prec -1{,}1$ و $1{,}8 \prec \beta \prec 1{,}9$.

4. استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. أ ـ بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-x)^2}$.

ب ـ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

3. أ ـ بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$ (حيث العدد α المعرّف في السؤال 3 الجزء I))

ب ـ عيّن حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2})

ج ـ ارسم (C_f).

الحل☺

I) لتكن الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(2-x)e^x-1$

1. تعيين نهايتي الدّالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^x-1=\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x-xe^x-1=-1$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ إذن

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^x-1=-\infty$.

2- أ- دراسة تغيرات الدالة g.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=-e^x+e^x(2-x)=e^x(1-x)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(1-x)$

من أجل $x\in]1;+\infty[$، $1-x<0$ أي $g'(x)<0$

من أجل $x\in]-\infty;1[$، $1-x>0$ أي $g'(x)>0$

وعليه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$

جـ ـ جدول تغيّرات الدّالة g.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	↗	$e-1$	↘	$-\infty$

3. تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β بحيث $-1{,}2\prec\alpha\prec-1{,}1$ و $1{,}8\prec\beta\prec1{,}9$.

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ و خاصة على المجال $[-1,2;-1,1]$ و $g(-1,2)\approx -0,03$ ، $g(-1,1)\approx 0,03$ إذن $g(-1,2)\times g(-1,1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1,2;-1,1[$ بحيث $g(\alpha)=0$

ولدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و خاصة على المجال $[1,8;1,9]$ و $g(1,8)\approx 0,2$ ، $g(1,9)\approx -0,3$ إذن $g(1,8)\times g(1,9)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β من المجال $]1,8;1,9[$ بحيث $g(\beta)=0$.

4. استنتاج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-1=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-x=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x-x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}=1$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

2. أ ـ تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-x)^2}$.

ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(2-x)-1}{(e^x-x)^2}=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$$

ب ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f.

لدينا $(e^x-x)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ وعليه $f'(\alpha)=0$ ؛ $f'(\beta)=0$

من أجل $x\in]-\infty;\alpha[\cup]\beta;+\infty[$ فإنّ $f'(x)<0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[\beta;+\infty[$.

من أجل $x\in]\alpha;\beta[$ فإنّ $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

aziz_mus1@hotmail.fr

3. أ - تبيين أنّ $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

لدينا $f(\alpha)=\dfrac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-\alpha}$ ولدينا $g(\alpha)=0$ تكافئ $(2-\alpha)e^{\alpha}-1=0$ وتكافئ $e^{\alpha}=\dfrac{1}{2-\alpha}$

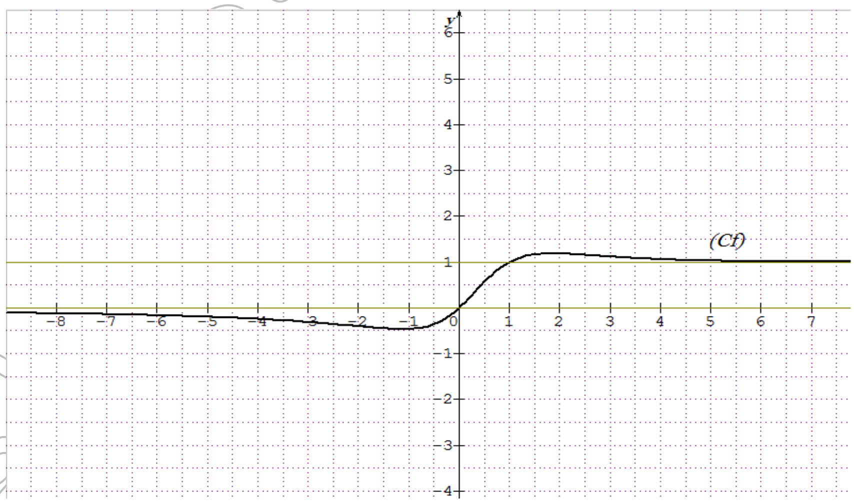
ومنه $f(\alpha)=\dfrac{\dfrac{1}{2-\alpha}-1}{\dfrac{1}{2-\alpha}-\alpha}=\dfrac{\dfrac{-1+\alpha}{2-\alpha}}{\dfrac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha}}=\dfrac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2}=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

ب - تعيين حصرا للعددين $f(\alpha)$ **و** $f(\beta)$.

$-1,2<\alpha<-1,1$ معناه $-2,2<\alpha-1<-2,1$ تكافئ $\dfrac{1}{-2,2}<\dfrac{1}{\alpha-1}<\dfrac{1}{-2,1}$ أي $-0,48<f(\alpha)<-0,45$.

ولدينا $1,8<\beta<1,9$ معناه $0,8<\beta-1<0,9$ تكافئ $\dfrac{1}{0,8}<\dfrac{1}{\beta-1}<\dfrac{1}{0,9}$ أي $1,11<f(\beta)<1,25$.

ج - رسم (C_f).



التمرين الثالث☹

نعتبر الدّالة f المعرفة على$\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2}{e^{x}+1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم استنتج أنّ النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

2. أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

3. أ - بيّن أنّ المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(x+2)$، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

4. أ - بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1,7<\alpha<-1,6$.

ب - من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x)=k$.

5. ارسم (C_f) ومستقيميه المقاربين.

الحل☺

نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2}{e^{x}+1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب $f(x)+f(-x)$.

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)+f(-x)=x+\frac{2}{e^{x}+1}-x+\frac{2}{e^{-x}+1}=\frac{2}{e^{x}+1}+\frac{2e^{x}}{e^{x}\left(e^{-x}+1\right)}=\frac{2}{e^{x}+1}+\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}=\frac{2e^{x}+2}{e^{x}+1}=2$$

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإنّ $-x\in\mathbb{R}$ ولدينا $f(x)+f(-x)=2$ معناه $f(-x)=2-f(x)$ أي $f(2\times 0-x)=2\times 1-f(x)$ إذن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

2. أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{2}{e^{x}+1}=+\infty$$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^{x}+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

استنتاج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا $f(x)=2-f(-x)$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2-f(-x)\right]=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[2-f(t)\right]=-\infty$

ب ـ دراسة اتجاه تغير الدالة f.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=1-\dfrac{2e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\dfrac{e^{2x}+1}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$ و $e^{2x}+1>0$ و $\left(e^{x}+1\right)^{2}>0$

إذن $f'(x)>0$ وعليه الدّالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3. أ ـ تبيين أنّ المستقيم ذا المعادلة $y=x$ **مستقيم مقارب مائل للمنحنى** (C_f) **بجوار** $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x}+1}=0$$

إذن المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب ـ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{x}+1}-2=2-2=0$$

تفسير النتيجة بيانيا.

بما أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=0$ فإنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+2$ بجوار $-\infty$

4. أ ـ تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-1,7<\alpha<-1,6$.

لدينا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على المجال $[-1,7;-1,6]$ و $f(-1,7)\approx -0,008$ ، $f(-1,6)\approx 0,064$

أي $f(-1,7)\times f(-1,6)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]-1,7;-1,6[$

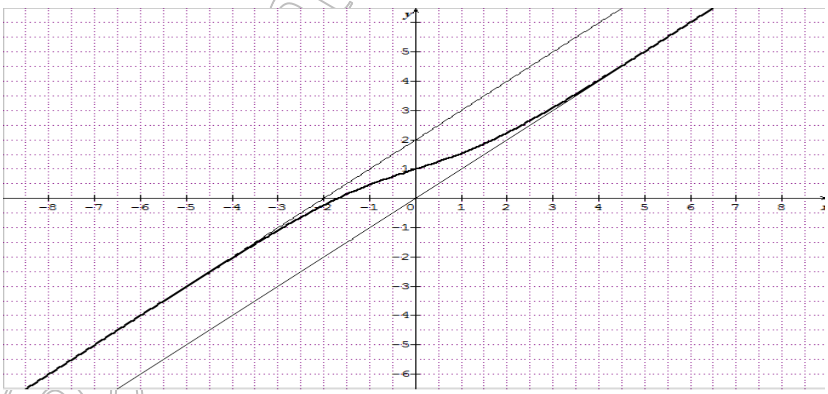
بحيث $f(\alpha)=0$ وبما أنّ الدّالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإنّ α وحيد.

ب ـ من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x)=k$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)+f(-x)=2$ وخاصة $f(\alpha)+f(-\alpha)=2$ ومنه $f(-\alpha)=2$ لأنّ $f(\alpha)=0$

إذن العدد $(-\alpha)$ هو حل للمعادلة $f(x)=2$ وعليه $k=2$.

5. رسم (C_f) ومستقيميه المقاربين.



<u>التمرين الرابع</u>☹

I- g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x)=e^x+x+1$

1. ادرس تغيّرات الدّالة g على $\mathbb{R}$.
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,3<\alpha<-1,2$.
3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أنّ $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$ ، ثمّ استنتج تغيّرات f على $\mathbb{R}$.
2. بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha+1$ ، ثمّ استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
3. عيّن معادلة المماس (d) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر، ثمّ ادرس الوضع النسبي لـ (d) و (C_f)
4. بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$
5. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)، ثمّ ارسم (d) و (Δ) و (C_f).

<u>الحل</u>☺

I- g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x)=e^x+x+1$

1. دراسة تغيّرات الدّالة g على $\mathbb{R}$.

aziz_mus1@hotmail.fr

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+x+1=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+x+1=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $g'(x)=e^x+1$

من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)>0$ وعليه الدّالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيّرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. **تبيين أنّ المعادلة** $g(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **حيث** $-1,3<\alpha<-1,2$.

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي على المجال $[-1,3;-1,2]$ ولدينا $g(-1,3)\approx-0,02$ ، $g(-1,2)\approx 0.10$ أي $g(-1,3)\times g(-1,2)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]-1,3;-1,2[$ بحيث $g(\alpha)=0$ وبما أنّ الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإنّ α وحيد.

3. **استنتاج إشارة** $g(x)$ **على** $\mathbb{R}$.

من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)<0$

من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)>0$ ؛ و $g(\alpha)=0$.

II- f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **تبيين أنّ** $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$.

$$f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(e^x+1)-e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+e^x+xe^{2x}+xe^x-xe^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

استنتاج تغيّرات f على $\mathbb{R}$.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

في المجال $]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)<0$ أي $f'(x)<0$

وفي المجال $]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)>0$ أي $f'(x)>0$

إذن الدّالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{e^x+1}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{e^x\left(1+e^{-x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+e^{-x}}=+\infty$$

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. **تبيين أنّ $f(\alpha)=\alpha+1$.**

لدينا $g(\alpha)=0$ يكافئ $e^\alpha+\alpha+1=0$ أي $e^\alpha=-(\alpha+1)$

إذن $f(\alpha)=\dfrac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}=\dfrac{-\alpha(\alpha+1)}{-(\alpha+1)+1}=\dfrac{-\alpha(\alpha+1)}{-(\alpha+1)+1}=\dfrac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha}=\alpha+1$

طريقة ثانية:

لدينا $f(\alpha)-(\alpha+1)=\dfrac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}-(\alpha+1)=\dfrac{\alpha e^\alpha-\alpha e^\alpha-e^\alpha-\alpha-1}{e^\alpha+1}=\dfrac{-\left(e^\alpha+\alpha+1\right)}{e^\alpha+1}=\dfrac{-g(\alpha)}{e^\alpha+1}$

لكن $g(\alpha)=0$ ومنه $f(\alpha)-(\alpha+1)=0$ أي $f(\alpha)=(\alpha+1)$

استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$.

$-1,3<\alpha<-1,2$ معناه $-0,3<\alpha+1<-0,2$ أي $-0,3<f(\alpha)<-0,2$.

3. **تعيين معادلة المماس (d) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر.**

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ولدينا $f'(0)=\dfrac{1}{2}$ و $f(0)=0$ ومنه $(d): y=\dfrac{1}{2}x$

دراسة الوضع النسبي لـ (d) و (C_f)

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{xe^x}{e^x+1}-\frac{x}{2}=\frac{2xe^x-xe^x-x}{2\left(e^x+1\right)}=\frac{xe^x-x}{2\left(e^x+1\right)}=\frac{x\left(e^x-1\right)}{2\left(e^x+1\right)}$$

لدينا $2\left(e^x+1\right)>0$ ومنه إشارة $f(x)-\dfrac{1}{2}x$ هي نفس إشارة $x\left(e^x-1\right)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
e^x-1	$-$	0	$+$
$f(x)-\frac{1}{2}x$	$+$		$+$
الوضعية	(C_f) فوق (d)	يمس	(C_f) فوق (d)

4.تبيين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ(C_f) في جوار $+\infty$

لدينا $f(x)-x=\dfrac{xe^x}{e^x+1}-x=\dfrac{xe^x-xe^x-x}{e^x+1}=\dfrac{-x}{e^x+1}$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x\left(\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\left(\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)}=0$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ(C_f) في جوار $+\infty$.

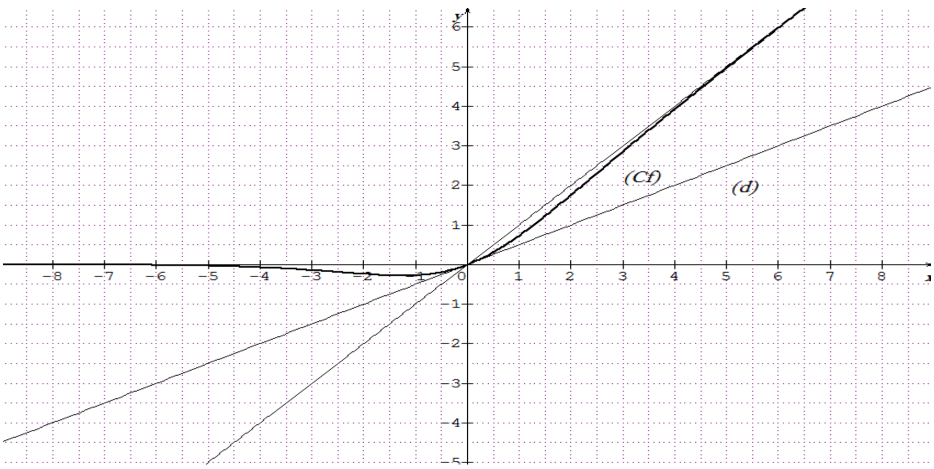
5.دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

إشارة $f(x)-x$ هي نفس إشارة $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

(C_f) و (Δ) يتقاطعان في O.

رسم (d) و (Δ) و (C_f).



التمرين الخامس☹

I - الدّالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2-1)e^{-x}$.

1. **أ -** احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها. (**نأخذ:** $g(1-\sqrt{2})\approx -0,25$ و $g(1+\sqrt{2})\approx 1,43$)

2. **أ -** بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ ، ثمّ تحقّق أنّ أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8<\alpha<-0,7$

ب - استنتج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II - الدّالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **أ -** احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2. **أ -** بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$. (يرمز f' إلى الدّالة المشتقة للدالة f).

ب - شكّل جدول تغيّرات الدّالة f على $\mathbb{R}$. (**نأخذ:** $f(\alpha)\approx -0,9$)

3. **أ -** بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب - مثّل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f)

جـ - ناقش بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2+me^x=0$.

الحل☺

1. **أ - حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+(x^2-1)e^{-x}=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-1)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+(x^2-1)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x^2e^{-x}-e^{-x}$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ (التزايد المقارن) و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

ب - دراسة اتجاه تغيّر الدالة g **.**

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=2xe^{-x}-e^{-x}(x^2-1)$

$$=e^{-x}\left[2x-(x^2-1)\right]$$

$$=e^{-x}(-x^2+2x+1)$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{-x}>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(-x^2+2x+1)$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+2x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة g متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;1-\sqrt{2}]$ و $[1+\sqrt{2};+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}]$

جدول تغيّرات الدالة g **.**

x	$-\infty$	α		$1-\sqrt{2}$		0		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$			$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	0 ↘		$g\left(1-\sqrt{2}\right)$	↗	0	↗	$g\left(1+\sqrt{2}\right)$	↘	1

2. أ ـ **تبيين أنّ المعادلة** $g(x)=0$ **تقبل حلين في** $\mathbb{R}$**.**

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]$ و تأخذ قيمها في المجال $\left[g\left(1-\sqrt{2}\right);+\infty\right[$ ولدينا $g\left(1-\sqrt{2}\right)\approx -0,25$ إذن $0\in\left[g\left(1-\sqrt{2}\right);+\infty\right[$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]$

ولدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$ وتأخذ قيمها في المجال $\left[g\left(1-\sqrt{2}\right);g\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$ و $0\in\left[g\left(1-\sqrt{2}\right);g\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$ ولدينا كذلك الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left[1+\sqrt{2};+\infty\right[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]1;g\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$ و $0\notin\left]1;g\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

إذن على المجال $\left[1+\sqrt{2};+\infty\right[$، $g(x)\neq 0$

خلاصة: المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

التحقّق أنّ أحدهما معدوم والآخر α **حيث:** $-0,8<\alpha<-0,7$

بما أنّ $g(0)=1+(0-1)e^{0}=0$ فإنّ $\beta=0$ ولدينا $g(-0.7)\approx -0.02$ و $g(-0.8)\approx 0.19$ أي $g(-0.7)\times g(-0.8)<0$ ومنه $-0,8<\alpha<-0,7$.

ب ـ **استنتاج إشارة** $g(x)$ **؛ حسب قيم العدد الحقيقي** x **.**

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II ـ الدّالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$.

1. أ ـ **حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **.**

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}-(x+1)^2e^{-x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-(x+1)^2e^{-x}=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x-(x+1)^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}x-\left(x^2e^{-x}+2xe^{-x}+e^{-x}\right)=+\infty$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}2xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

ب ـ **تبيين أنّ المستقيم** (Δ) **ذا المعادلة** $y=x$ **، مقارب مائل للمنحنى** (C_f) **عند** $+\infty$ **.**

$$f(x)-x=x-(x+1)^2e^{-x}-x=-(x+1)^2e^{-x}=-\left(x^2e^{-x}+2xe^{-x}+e^{-x}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-\left(x^2e^{-x}+2xe^{-x}+e^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\left(\frac{x^2}{e^x}+2\frac{x}{e^x}+e^{-x}\right)=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

ليكن x عددا حقيقيا؛ $f(x)-x=-(x+1)^2e^{-x}$

لدينا $e^{-x}>0$ و $(x+1)^2\geq 0$ إذن $f(x)-x\leq 0$

ومنه المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم (Δ).

2. أ ـ **تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)$.**

$$f'(x)=1-\left[2(x+1)e^{-x}-e^{-x}(x+1)^2\right]=1-\left[e^{-x}\left(1-x^2\right)\right]=1+e^{-x}\left(x^2-1\right)=g(x)$$

ب ـ جدول تغيّرات الدّالة f .

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. أ ـ **تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.**

$f'(x_0)=1$ يكافئ $1+\left(x_0{}^2-1\right)e^{-x_0}=1$ ويكافئ $\left(x_0{}^2-1\right)e^{-x_0}=0$ لدينا $e^{-x_0}\neq 0$ ومنه $x_0{}^2-1=0$ أي $x_0=1$ أو $x_0=-1$ إذن (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1 عند النقطتين $M(1;f(1))$ و $M'(-1;f(-1))$.

كتابة معادلة المماسين

المماس عند النقطة $(1;f(1))$ معادلته $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=x-1+\left(1-4e^{-1}\right)$ أي $y=x-4e^{-1}$

المماس عند النقطة $(-1;f(-1))$ معادلته $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ ومنه $y=x+1-1$ أي $y=x$

ب ـ تمثيل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f)

جـ ـ المناقشة بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2+me^x=0$.

$(x+1)^2+me^x=0$ تكافئ $me^x=-(x+1)^2$

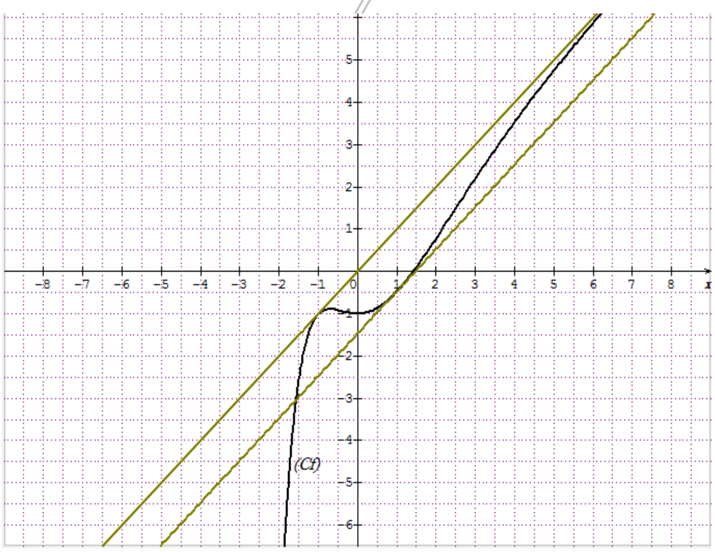
وتكافئ $m=-(x+1)^2e^{-x}$ و تكافئ

$x+m=x-(x+1)^2e^{-x}$ أي $f(x)=x+m$

إذا كان $m\in\left]-\infty;-4e^{-1}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا

إذا كان $m=-4e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما مضاعف

إذا كان $m\in\left]-4e^{-1};0\right[$ فإن المعادلة تقبل ثلاثة حلول



إذا كان $m=0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا
إذا كان $m\in]0;+\infty[$ فإن المعادلة لا تقبل حلا.

التمرين السادس☹

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=e^x-x-1$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g.

2) استنتج أنّ $g(x)\geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

3) علل أنه، من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x-x>0$.

II- 1. أ) احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) فسّر النتائج هندسيا.

2. أ) احسب $f'(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. أ) عيّن معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

ب) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T).

جـ) علل أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثياتها.

4. أُرسم (T) و (C_f).

الحل☺

I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=e^x-x-1$.

1) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g.

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=e^x-1$

$g'(x)=0$ معناه $e^x-1=0$ ويكافئ $e^x=1$ أي $x=0$

$g'(x)>0$ معناه $e^x-1>0$ ويكافئ $e^x>1$ أي $x>0$

$g'(x)<0$ معناه $e^x-1<0$ ويكافئ $e^x<1$ أي $x<0$

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) استنتاج أنّ $g(x)\geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

لدينا $g(0)=e^0-0-1=0$؛

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ إذن فهي تقبل قيمة حدية صغرى تبلغها عند $x=0$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)\geq g(0)$ أي $g(x)\geq 0$.

3) تعليل أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x-x>0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)\geq 0$ يكافئ $e^x-x-1\geq 0$ أي $e^x-x\geq 1$ وبالتالي $e^x-x>0$

II- 1. أ) **حساب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.**

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\left(\frac{e^x}{x}\right)-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)-1}=-1$$ لأنّ $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\frac{e^x}{x}\right)-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)-1}=0$$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

ب) تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=-1$ بجوار $-\infty$.

و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$.

2. أ) حساب $f'(x)$.

ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{1(e^x-x)-x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x-x-xe^x+x}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$$

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f

لدينا $e^x>0$ و $(e^x-x)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1-x)$

من أجل $x\in]1;+\infty[$، $1-x<0$ ومنه $f'(x)<0$

من أجل $x\in]-\infty;1[$، $1-x>0$ ومنه $f'(x)>0$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

3. أ) تعيين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

معادلة المماس (T) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=x$.

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T).

ليكن x عددا حقيقيا : $\frac{-xg(x)}{e^x-x}=\frac{-x(e^x-x-1)}{e^x-x}=\frac{x-xe^x+x^2}{e^x-x}=f(x)-x=\frac{x}{e^x-x}-x$

لدينا $g(x)\geq 0$ و $e^x-x>0$ ومنه إشارة $f(x)-x$ على $\mathbb{R}$ هي نفس إشارة $-x$

إذا كان $x>0$ فإن $-x<0$ ومنه $f(x)-x<0$

إذا كان $x<0$ فإنّ $-x>0$ ومنه $f(x)-x>0$

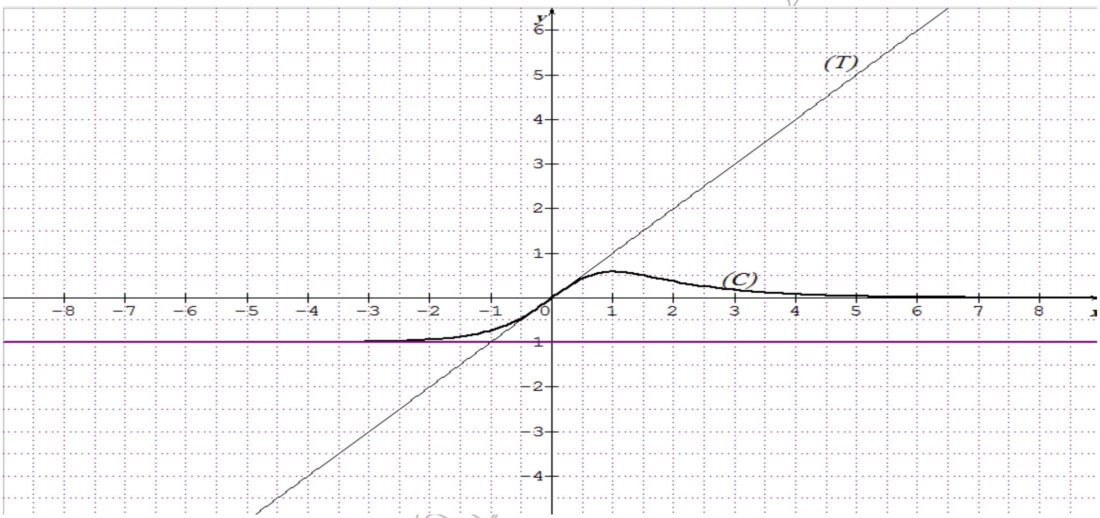
وعليه من أجل $x\in]-\infty;0[$، (C_f) يوجد فوق (T)، ومن أجل $x\in]0;+\infty[$، (C_f) يوجد تحت (T)

و (T) يخترق (C_f) في النقطة O مبدأ المعلم.

جـ) تعليل أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثياتها.

بما أنّ المماس (T) يخترق المنحنى (C_f) في نقطة التماس O فإن النقطة O هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

. رسم (T) و (C_f).



التمرين السابع☹

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1+(x-1)e^x$.

1. احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.
3. استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=x+(x-2)e^x$.

نرمز بـ(C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإنّ: $f'(x)=g(x)$.
   ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.
2. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f). ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ)
3. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياها.
4. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
6. بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1,6<\alpha<1,7$.
7. احسب $f(0)$، $f(1)$ ثم ارسم (Δ)، (T) والمنحني (C_f).
8. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

الحل☺

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1+(x-1)e^x$.

1. **حساب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.**

لدينا $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ إذن $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 1+(x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty} 1+xe^x-e^x=1$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+(x-1)e^{x}=+\infty$.

2. **دراسة اتجاه تغيّر الدالة g .**

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=e^{x}+(x-1)e^{x}=xe^{x}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{x}>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x وعليه $g'(0)=0$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ فإنّ $g'(x)<0$

ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ $g'(x)>0$

إذن الدّالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

3. استنتاج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أنّ $g(x)\geq 0$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=x+(x-2)e^{x}$.

نرمز بـ(C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإنّ: $f'(x)=g(x)$.

$f'(x)=1+e^{x}+(x-2)e^{x}=1+(x-1)e^{x}=g(x)$

ب) استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ ومنه أجل كل $x\in]-\infty;2]$، $f'(x)\geq 0$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;2]$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	$-\infty$		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↗	2

2. تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f). ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ)

$$\lim_{x\to-\infty}=f(x)-x=\lim_{x\to-\infty} f(x)=(x-2)e^{x}=\lim_{x\to-\infty} xe^{x}-e^{x}=0$$

إذن للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x$.

3. إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياها.

طريقة 1: لدينا $f''(x)=g'(x)$ ومنه $f''(x)$ تنعدم عند 2 وتغير من إشارتها ما يعني أنّ النقطة $\omega(0;-2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

طريقة 2: لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ و $f'(0)=0$ إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا أفقيا عند النقطة $\omega(0;-2)$ معادلته $y=-2$.

نلخص إشارة $f(x)+2$ من خلال جدول تغيرات الدّالة f.

من أجل $x\in]-\infty;0[$، $f(x)<-2$ أي $f(x)+2<0$

ومن أجل $x\in]0;2[$، $f(x)>2$ أي $f(x)+2>0$

في المجال $]-\infty;0[$ المنحنى (C_f) يقع تحت مماسه ؛ و في المجال $]0;2[$ المنحنى (C_f) يقع فوق مماسه.

إذن المماس يخترق المنحنى في نقطة التماس $\omega(0;-2)$ وهذا يعني أن النقطة $\omega(0;-2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

ملاحظة: يمكن إثبات ذلك مباشرة بما أنّ $f'(x)$ تنعدم عند 0 ولا تغيّر من إشارتها فإن النقطة $\omega(0;-2)$ هي نقطة إنعطاف.

4. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

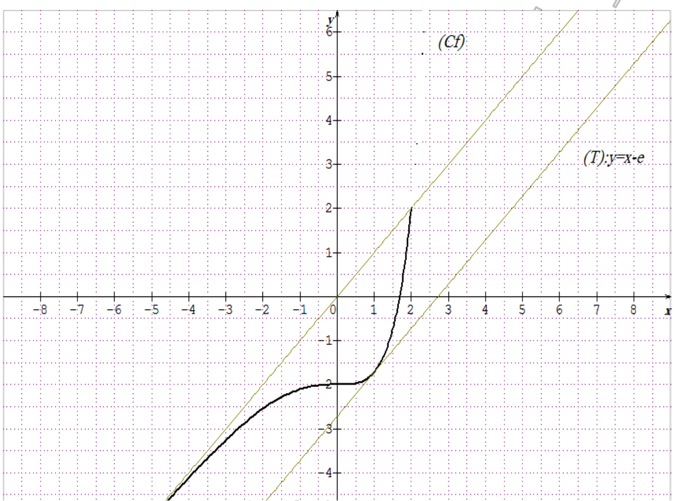
$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=(x-1)+1-e$ أي $(T):y=x-e$.

6. تبيين أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1,6<\alpha<1,7$.

لدينا الدّالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ وخاصة على المجال $[1,6;1,7]$ و $f(1,6)\approx-0,38$ ، $f(1,7)\approx0,05$ أي $g(1,6)\times g(1,7)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]1,6;1,7[$ بحيث $f(\alpha)=0$

وبما أنّ الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإنّ α وحيد.

ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1,6<\alpha<1,7$.



7. حساب $f(0)$ ، $f(1)$ ورسم (Δ)، (T) والمنحنى (C_f).

$f(0)=0+(0-2)e^0=-2$ ، $f(2)=2+(2-2)e^2=2$.

8. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

إذا كان $m<-e$ أو $m>0$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلا

إذا كان $m=-e$ فإنّ المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا

إذا كان $m=0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا واحدا وحيدا

إذا كان $-e<m<0$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

<u>التمرين الثامن</u>☹

I) الدالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(1-x)e^x$.

1. ادرس تغيّرات الدالة g، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0;+\infty[$.
3. تحقق أنّ $1,27<\alpha<1,28$، ثمّ استنتج، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}$،

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2. أ - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب - بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ ، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

3. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث (Δ') هو المستقيم ذو المعادلة $y=1$.

4. أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f .

ب - بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha$ ، ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f.

5. أ - أثبت أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $-\alpha$.

ب - أثبت أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة $M(-\alpha;0)$ موازيا للمستقيم (Δ).

جـ - اكتب معادلة (T).

6. ارسم (Δ)،(Δ') ، (T) و (C_f).

7. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ،عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=x+f(m)$.

الحل☺

I) الدالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(1-x)e^x$.

1. دراسة تغيّرات الدالة g .

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x-xe^x=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^x(1-x)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=-e^x+e^x(1-x)=-xe^x$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $-x$ وعليه $g'(0)=0$

من أجل $x\in]-\infty;0[$ ، $-x>0$ ومنه $g'(x)>0$ و من أجل $x\in]0;+\infty[$ ، $-x<0$ ومنه $g'(x)<0$

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g .

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$			
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

2. تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0;+\infty[$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2]$ و $0\in]-\infty;2]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$.

3. التحقق أنّ $1,27<\alpha<1,28$.

لدينا $g(1,28)\approx-0,007$ و $g(1,27)\approx 0,03$ إذن $g(1,28)\times g(1,27)<0$ ومنه $1,27<\alpha<1,28$

استنتاج، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)>0$ ومن أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)<0$ و $g(\alpha)=0$.

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}$،

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=1$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

التفسير: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$.

2. أ ـ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+x+1=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}=-\infty$

ب ـ تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ ، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

$$f(x)-(x+1)=\frac{e^x+x+1}{e^x+1}-(x+1)=\frac{e^x+x+1-xe^x-e^x-x-1}{e^x+1}=\frac{-xe^x}{e^x+1}$$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-xe^x}{e^x+1}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}-xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x+1=1$.

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ ، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

3. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

ليكن $x\in\mathbb{R}$: لدينا $f(x)-(x+1)=\dfrac{-xe^x}{e^x+1}$

$e^x+1>0$ و $e^x>0$ ومنه إشارة $f(x)-(x+1)$ على $\mathbb{R}$ هي نفس إشارة $-x$.

إذا كان $x>0$ فإن $-x<0$ ومنه $f(x)-(x+1)<0$

إذا كان $x<0$ فإنّ $-x>0$ ومنه $f(x)-(x+1)>0$

وعليه من أجل $x\in]-\infty;0[$ ، (C_f) يوجد فوق (Δ)، ومن أجل $x\in]0;+\infty[$ ، (C_f) يوجد تحت (Δ)

و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الإحداثيتين $(0;1)$.

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ') ذو المعادلة $y=1$.

$f(x)-1=\dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}-1=\dfrac{x}{e^x+1}$، إشارة $f(x)-1$ هي من نفس إشارة x على $\mathbb{R}$.

وعليه من أجل $x\in]0;+\infty[$، (C_f) يكون فوق (Δ')؛ ومن أجل $x\in]-\infty;0[$، (C_f) يكون أسفل (Δ')

و (C_f) يقطع (Δ') في النقطة ذات الإحداثيتين $(0;1)$.

4. أ - تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.

لدينا $f(x)-1=\dfrac{x}{e^x+1}$ ومنه $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}+1$

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x)=\frac{1(e^x+1)-xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{1+(1-x)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f.

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ لأنّ $(e^x+1)^2>0$ وعليه

من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$، $g(x)>0$ أي $f'(x)>0$

ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$، $g(x)<0$ أي $f'(x)<0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

ب - تبيين أنّ $f(\alpha)=\alpha$.

$f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^\alpha+1}+1$ ولدينا $g(\alpha)=0$ تكافئ $1+(1-\alpha)e^\alpha=0$ ومنه $e^\alpha=\dfrac{-1}{1-\alpha}$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha}{e^\alpha+1}+1=\frac{\alpha}{\frac{-1}{1-\alpha}+1}+1=\frac{\alpha}{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}+1=\alpha\left(\frac{1-\alpha}{-\alpha}\right)+1=\alpha$$

طريقة ثانية: لدينا $f(\alpha)-\alpha=\dfrac{e^\alpha+\alpha+1}{e^\alpha+1}-\alpha=\dfrac{e^\alpha+\alpha+1-\alpha e^\alpha-\alpha}{e^\alpha+1}=\dfrac{1+(1-\alpha)e^\alpha}{e^\alpha+1}=\dfrac{g(\alpha)}{e^\alpha+1}=0$

بما أنّ $f(\alpha)-\alpha=0$ فإنّ $f(\alpha)=\alpha$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	α	↘	$-\infty$

5. أ - تبيين أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $-\alpha$.

$f(-\alpha)=\dfrac{e^{-\alpha}-\alpha+1}{e^{-\alpha}+1}$ ولدينا $e^\alpha=\dfrac{-1}{1-\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ يكافئ $e^{-\alpha}=\alpha-1$

إذن $\dfrac{(\alpha-1)-\alpha+1}{(\alpha-1)+1}=0$ ومنه $f(-\alpha)=$ ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $-\alpha$.

ب ـ تبيين أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(-\alpha;0)$ موازيا للمستقيم (Δ).

المماس (T) يوازي المستقيم (Δ) معناه $f'(-\alpha)=1$

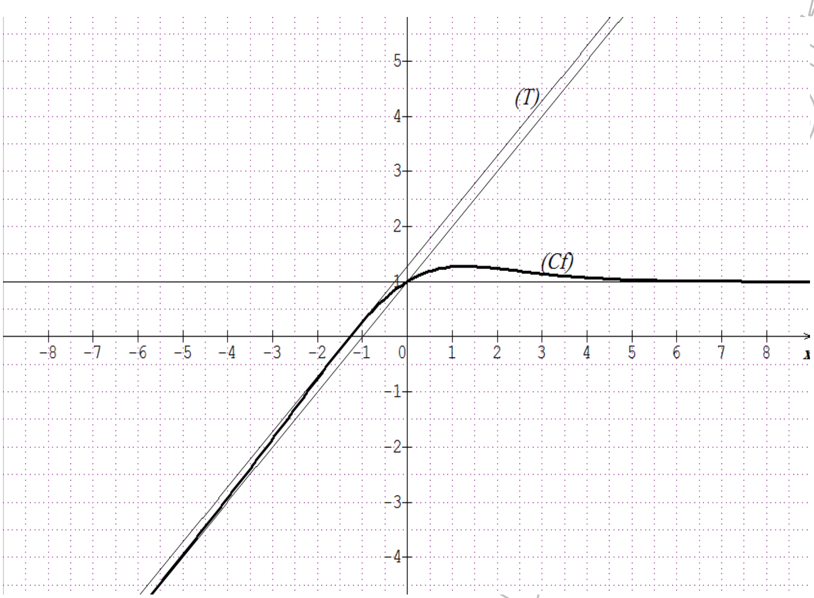
$$f'(-\alpha)=\frac{g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)e^{-\alpha}}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)(\alpha-1)}{(\alpha-1+1)^2}=\frac{1+\alpha^2-1}{\alpha^2}=1$$

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة $M(-\alpha;0)$ موازيا للمستقيم (Δ).

جـ ـ كتابة معادلة (T).

معادلة المماس (T) هي: $y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(-\alpha)$ أي $y=x+\alpha$

6. رسم (Δ)، (Δ')، (T) و (C_f).



7. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=x+f(m)$.

إذا كان $m<0$ فإنّ $f(m)<1$

ومنه المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا

إذا كان $m=0$ فإنّ $f(m)=1$ ومنه المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما

إذا كان $m\in]0;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ فإنّ $1<f(m)<\alpha$ ومنه المعادلة تقبل حلّين سالبين

إذا كان $m=\alpha$ فإنّ $f(m)=\alpha$

ومنه المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا $x=-\alpha$.

التمرين التاسع☹

I ـ g دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x+4-4e^x$.

أ ـ ادرس تغيّرات الدّالة g.

ب ـ بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1{,}6<\alpha<-1{,}59$.

جـ ـ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II ـ f دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2e^x-1}{2xe^x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(2xe^x+1)^2}$.
2. احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$، ثمّ فسّر النتائج هندسيا.
3. ادرس تغيّرات الدالة f.

4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$.

5. بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، ثمّ عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6. ارسم المنحنى (C_f).

7. ناقش بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $2mx-2+(m+1)e^{-x}=0$.

<u>الحل</u>☺

I - g دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x+4-4e^x$.

أ - دراسة تغيّرات الدّالة g .

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=2-4e^x=2(1-2e^x)$

$g'(x)=0$ معناه $1-2e^x=0$ يكافئ $e^x=\dfrac{1}{2}$ أي $x=-\ln 2$

$g'(x)>0$ معناه $1-2e^x>0$ يكافئ $e^x<\dfrac{1}{2}$ أي $x<-\ln 2$

$g'(x)<0$ معناه $1-2e^x<0$ يكافئ $e^x>\dfrac{1}{2}$ أي $x>-\ln 2$

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-\ln 2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-\ln 2;+\infty[$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+4=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+4-4e^x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty} 2x+4-4e^x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2+\dfrac{4}{x}-4\dfrac{e^x}{x}\right)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

<u>جدول التغيرات:</u>

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$2-2\ln 2$	↘	$-\infty$

ب - تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-1{,}6<\alpha<-1{,}59$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;-\ln 2]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2-2\ln 2]$ و $0\in]-\infty;2-2\ln 2]$

إذن يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $]-\infty;-\ln 2]$ بحيث $g(\alpha)=0$

و كذلك الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-\ln 2;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2-2\ln 2]$ و $0\in]-\infty;2-2\ln 2]$ إذن يوجد عدد حقيقي وحيد β في المجال $[-\ln 2;+\infty[$ بحيث $g(\beta)=0$

و بما أنّ $g(0)=2(0)+4-4e^0=0$ فإنّ $\beta=0$

ولدينا $g(-1{,}6)\approx-0{,}007$ و $g(-1{,}59)\approx 0{,}004$ أي $g(-1{,}59)\times g(-1{,}6)<0$ ومنه $-1{,}6<\alpha<-1{,}59$

جـ - استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

aziz_mus1@hotmail.fr

II - f دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2e^x-1}{2xe^x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي** x ، $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(2xe^x+1)^2}$ **.**

ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{2e^x(2xe^x+1)-\left((2e^x+2xe^x)(2e^x-1)\right)}{(2xe^x+1)^2}=\frac{4xe^{2x}+2e^x-4e^{2x}+2e^x-4xe^{2x}+2xe^x}{(2xe^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4e^x+2xe^x-4e^{2x}}{(2xe^x+1)^2}=\frac{e^x(2x+4-4e^x)}{(2xe^x+1)^2}=\frac{e^x g(x)}{(2xe^x+1)^2}$$

2. **حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، **ثمّ تفسير النتائج هندسيا.**

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x-1=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x+1=1$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x-1}{2xe^x+1}=-1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x-1}{2xe^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(2-e^{-x})}{e^x(2x+e^{-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-e^{-x})}{(2x+e^{-x})}=0$$

التفسير: (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $y=-1$ و $y=0$ بجوارات $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب.

3. **دراسة تغيّرات الدالة** f **.**

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ وعليه $f'(\alpha)=0$ ؛

من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[\cup]0;+\infty[$ يكون $f'(x)<0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[0;+\infty[$

ومن أجل كل $x\in]\alpha;0[$ يكون $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;0]$.

جدول تغيرات الدالة f **.**

x	$-\infty$		α		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗	1	↘	0

4. **حل في** $\mathbb{R}$ **المعادلة** $f(x)=0$ ، **ثمّ استنتج إشارة** $f(x)$ **.**

$f(x)=0$ تكافئ $\dfrac{2e^x-1}{2xe^x+1}=0$ وتكافئ $2e^x-1=0$ أي $x=-\ln 2$.

إشارة $f(x)$ **.**

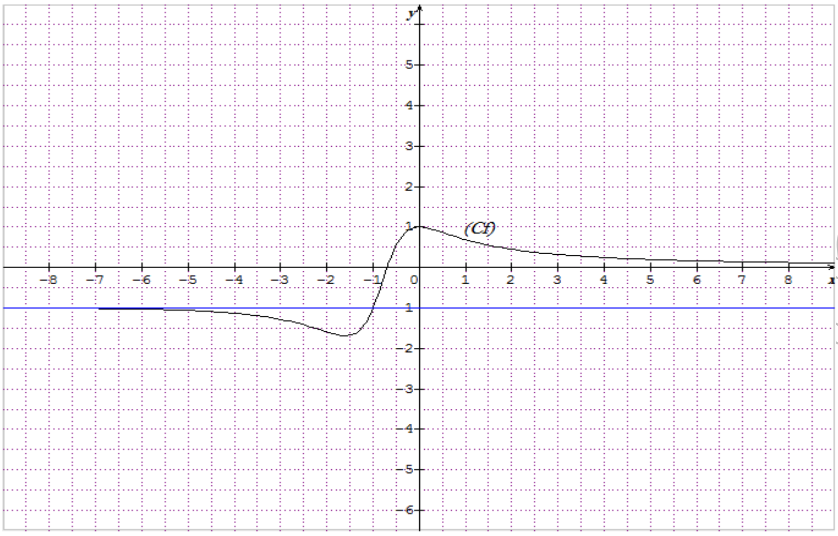
يمكن إستنتاج إشارة $f(x)$ من جدول تغيراتها والتي تكون كما يلي:

من أجل $x\in]-\infty;-\ln 2[$ ، $f(x)<0$ ؛ومن أجل $x\in]-\ln 2;+\infty[$ ، $f(x)>0$ ؛ كما أنّ $f(-\ln 2)=0$.

5. **تبيين أنّ:** $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$.

$f(\alpha)=\frac{2e^{\alpha}-1}{2\alpha e^{\alpha}+1}$ ولدينا $g(\alpha)=0$ يكافئ $2\alpha+4-4e^{\alpha}$ و يكافئ $e^{\alpha}=\frac{\alpha+2}{2}$ أي $2\alpha e^{\alpha}=\alpha^2+2\alpha$

إذن $f(\alpha)=\frac{2e^{\alpha}-1}{2\alpha e^{\alpha}+1}=\frac{(\alpha+2)-1}{\alpha^2+2\alpha+1}=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\frac{1}{\alpha+1}$



تعيين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا $-1,6<\alpha<-1,59$ معناه

$-0,6<\alpha+1<-0,59$ ويكافئ

$\frac{1}{-0,59}<\frac{1}{\alpha+1}<\frac{1}{-0,6}$ أي

$-1,7<f(\alpha)<-1,66$

6. **رسم المنحنى** (C_f).

7. **المناقشة بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي** m **، عدد وإشارة حلول المعادلة:**

$2mx-2+(m+1)e^{-x}=0$.

$2mx-2+(m+1)e^{-x}=0$ معناه

$2mxe^{x}-2e^{x}+m+1=0$ ومعناه $m(2xe^{x}+1)=2e^{x}-1$ وتكافئ $m=\frac{2e^{x}-1}{2xe^{x}+1}$ أي $f(x)=m$

إذا كان $m<\frac{1}{\alpha+1}$ أو $m>1$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلا.

إذا كان $m=\frac{1}{\alpha+1}$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا $x=\alpha$

إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما.

إذا كان $\frac{1}{\alpha+1}<m<-1$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين.

إذا كان $-1<m<0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا

إذا كان $0<m<1$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

التمرين العاشر☹

I- نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$

1. ادرس تغيّرات الدّالة g .
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,38<\alpha<-0,37$.
3. استنتج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيّم x .

II- نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$.

2. ادرس تغيّرات الدّالة f .

. بيّن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

4. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d).

5. بيّن أنّ المنحنى يقبل نقطة انعطاف.

6. بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$.

7. ارسم (d) و (C_f)؛ نأخذ $\alpha\approx-0{,}375$.

III- (Δ_β) مستقيم معادلته $y=2x+\beta$ حيث β عدد حقيقي.

1. عيّن β حتى يكون (Δ_β) مماسا للمنحنى في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

2. ناقش بيانيا، حسب قيم العدد الحقيقي β، عدد حلول المعادلة : $-\dfrac{x}{e^x}+1-\beta=0$

<u>الحل</u>☺

I- نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$

1. دراسة تغيّرات الدّالة g .

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{-x}+2=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x}+2=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}-e^{-x}+2=2$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=e^{-x}-e^{-x}(x-1)=e^{-x}(2-x)$

من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{-x}>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(2-x)$ وعليه $g'(2)=0$

من أجل كل $x\in]-\infty;2[$ فإنّ $2-x>0$ أي $g'(x)>0$ إذن الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$.

ومن أجل كل $x\in]2;+\infty[$ فإنّ $2-x<0$ أي $g'(x)<0$ إذن الدّالة g متناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α		2		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$	$2+e^{-2}$	$\searrow$	2

2. تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0{,}38<\alpha<-0{,}37$.

لدينا الدّالة g مستمرة على المجال $]-\infty;2]$ وبالتالي على المجال $[-0{,}38;-0{,}37]$ و $g(-0{,}38)\approx-0{,}01$ ، $g(-0{,}37)\approx0{,}01$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]-0{,}38;-0{,}37[$ بحيث $g(\alpha)=0$ وبما أنّ الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ فإنّ α وحيد.

3. إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيّم x.

من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)<0$

و من أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)>0$ كما أنّ $g(\alpha)=0$

II- نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)$.

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=2-\left[e^{-x}-xe^{x}\right]=2+e^{-x}(x-1)=g(x)$$

2. دراسة تغيّرات الدّالة f .

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ وعليه $f'(\alpha)=g(\alpha)=0$

من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$ فإنّ $f'(x)<0$

و من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ فإنّ $f'(x)>0$

وبالتالي الدّالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. تبيين أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x+1)=\lim_{x\to+\infty}-xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{e^{x}}=0$$

إذن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

4. دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d).

لدينا $f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ ومنه إشارة $f(x)-(2x+1)$ هي نفس إشارة $-x$.

في المجال $]-\infty;0[$، $-x>0$ أي $f(x)-(2x+1)>0$ ومنه (C_f) يقع فوق (d).

و في المجال $]0;+\infty[$، $-x<0$ أي $f(x)-(2x+1)<0$ ومنه (C_f) يقع تحت (d).

و (C_f) يقطع (d) في النقطة $A(0;1)$.

5. تبيين أنّ المنحنى يقبل نقطة انعطاف.

لدينا $f''(x)=g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $g'(x)$.

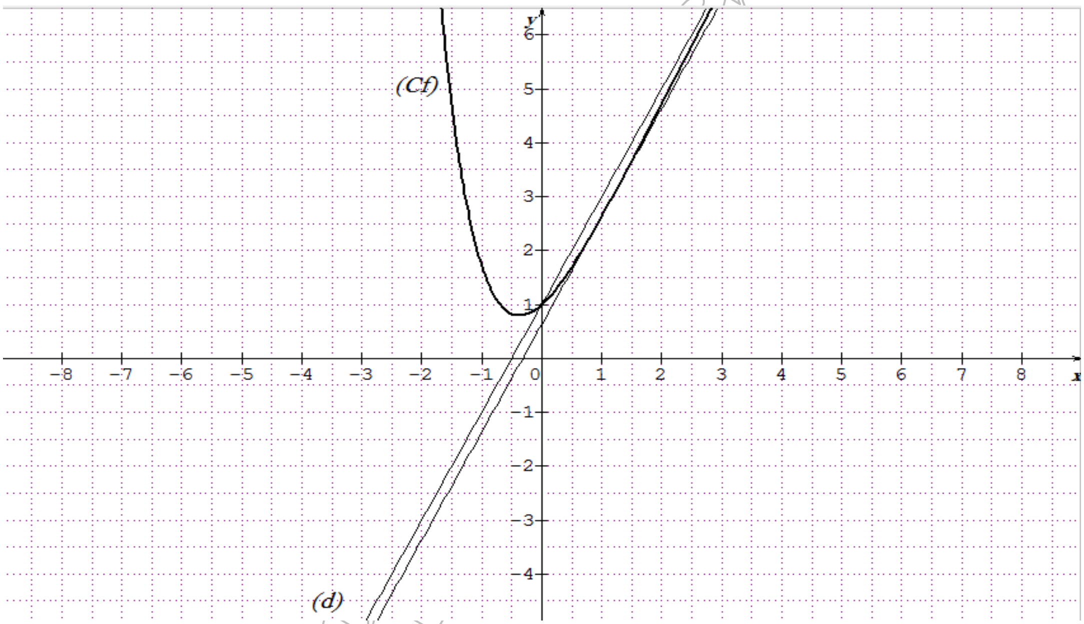
$f''(x)$ تنعدم من أجل 2 وتغير من إشارتها بجوار 2 وهذا يعني أنّ النقطة $B(2;f(2))$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

6. تبيين أنّ $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$.

لدينا $f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha e^{-\alpha}$ ولدينا $g(\alpha)=0$ معناه $(\alpha-1)e^{-\alpha}+2=0$ أي $e^{-\alpha}=-\dfrac{2}{\alpha-1}$

إذن $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2\alpha}{\alpha-1}=\frac{(2\alpha+1)(\alpha-1)+2\alpha}{\alpha-1}=\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$

7. رسم (d) و (C_f)؛ نأخذ $\alpha\approx-0,375$.



III- (Δ_β) مستقيم معادلته $y=2x+\beta$ حيث β عدد حقيقي.

1.تعيين β حتى يكون (Δ_β) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

$f'(x)=2$ معناه $(x-1)e^{-x}+2=2$ يكافئ $(x-1)e^{-x}=0$ أي $x=1$

لدينا $f(1)=3-e^{-1}$ ؛

(Δ_β) مماس للمنحنى (C_f) إذا كان يشمل النقطة $A(1;3-e^{-1})$ ومنه $3-e^{-1}=2(1)+\beta$ أي $\beta=1-e^{-1}$

إذن من أجل $\beta=1-e^{-1}$ يكون (Δ_β) مماسا للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;3-e^{-1})$.

2. المناقشة بيانيا، حسب قيم العدد الحقيقي β، عدد حلول المعادلة : $-\frac{x}{e^x}+1-\beta=0$

$-\frac{x}{e^x}+1-\beta=0$ تكافئ $\beta=-\frac{x}{e^x}+1$ تكافئ $2x+\beta=-\frac{x}{e^x}+1+2x$ ومنه $2x+\beta=-xe^{-x}+1+2x$

أي $f(x)=2x+\beta$.

إذا كان $\beta\in]-\infty;1-e^{-1}[$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلول.

إذا كان $\beta=1-e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا و هو 1.

إذا كان $\beta\in]1-e^{-1};1[$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $\beta\in[1;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا.

aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الحادي عشر☹

I- f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ ،

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

x	$f(x)$
0.20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2) احسب $f'(x)$. بيّن أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α.باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α

4) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)، ثمّ المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5) عيّن بيانيا مجموعة قيّم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II- g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة **)**.

1) ادرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) **أ)** تحقّق من أنّ: $g\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أنّ: $g'\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\dfrac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقّق من أنّ: $y=\dfrac{2}{(\alpha-1)^3}x-\dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

الحل☺

I - f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ ،

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ **.**

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x-1}}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}=2$.

ولدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{x}{x-1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}e^{\frac{1}{x-1}}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}=-\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=2$ بجوار $-\infty$.

ولدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور التراتيب معادلته $x=1$.

2) حساب $f'(x)$ **. وتبيين أنّ الدالة** f **متناقصة تماما على المجال** $]-\infty;1[$ **.**

الدالة f عبارة عن عمليات على دوال قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ فهي قابلة للإشتقاق على هذا المجال ولدينا:

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{-1}{(x-1)^2}\left(1+e^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

من أجل كل $x\in]-\infty;1[$ ، $f'(x)<0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

aziz_mus1@hotmail.fr

جدول تغيّرات الدالة f .

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	2 $\searrow$ $-\infty$

3) تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α .

لدينا الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2[$ و $0\in]-\infty;2[$ إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1[$.

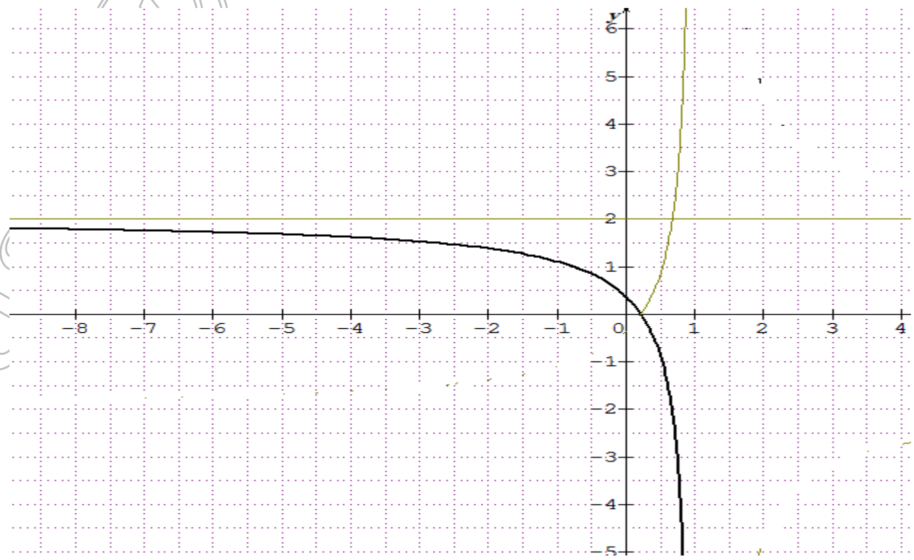
إيجاد حصرا للعدد α باستعمال جدول القيم أعلاه.

نلاحظ أنّ $f(0,21)\approx 0,016$ و $f(0,22)\approx -0,005$ إذن $f(0,21)\times f(0,22)<0$ ومنه $0,21<\alpha<0,22$

4) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثمّ المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

$$\begin{cases}|f(x)|=f(x);f(x)\geq 0\\|f(x)|=-f(x);f(x)\leq 0\end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases}|f(x)|=f(x);x\in]-\infty;\alpha]\\|f(x)|=-f(x);x\in[\alpha;1[\end{cases}$$

إذن (C') ينطبق على (C) في المجال $]-\infty;\alpha]$ و (C') يناظر (C) بالنسبة لمحور الفواصل في المجال $[\alpha;1[$.



5) تعيين بيانيا مجموعة قيّم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة من أجل قيّم m من المجال $\left]\frac{1}{e};2\right[$ (لاحظ أنّ $f(0)=\frac{1}{e}$)

II- g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة **)**.

1) دراسة تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(2x-1)$ ؛ نضع $t=2x-1$ لما x يئول إلى $-\infty$ فإنّ t يئول $-\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(2x-1)=\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)=2$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{t\to 1} f(t)=-\infty$

aziz_mus1@hotmail.fr

الدالة g تقبل الإشتقاق على المجال $]-\infty;1[$ ولدينا: $g'(x)=2f'(2x-1)$

إذا كان $x<1$ فإنّ $2x-1<1$ ومنه $f'(2x-1)<0$ إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$

يمكن إتباع طريقة إتجاه تغيّر مركب دالتين.

نعتبر الدالة $u:x\mapsto 2x-1$ المعرّفة على المجال $]-\infty;1[$ إذن $g(x)=f[u(x)]=(f\circ u)(x)$

الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]\lim\limits_{x\to-\infty}u(x);\lim\limits_{x\to1}u(x)\right[=]-\infty;1[$ والدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيّرات الدالة g .

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 1
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	2 $\searrow$ $-\infty$

2) أ) التحقّق من أنّ: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، **ثمّ تبيين أنّ:** $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

$$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=f(\alpha+1-1)=f(\alpha)=0$$

$$g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right)=2f'(\alpha+1-1)=2f'(\alpha)$$

ب) استنتاج معادلة (T) **المماس لمنحنى الدالة** g **في النقطة ذات الفاصلة** $\frac{\alpha+1}{2}$.

$y=g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)+g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ ومنه $y=2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$

ج) التحقّق من أنّ: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، **معادلة للمستقيم** (T).

لدينا $f(\alpha)=0$ يكافئ $\frac{\alpha}{\alpha-1}+e^{\frac{1}{\alpha-1}}=0$ أي $e^{\frac{1}{\alpha-1}}=-\frac{\alpha}{\alpha-1}$

ومنه $2f'(\alpha)=\frac{-2}{(\alpha-1)^2}\left(1+e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)=\frac{-2}{(\alpha-1)^2}\left(1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)=\frac{-2}{(\alpha-1)^2}\left(\frac{-1}{\alpha-1}\right)=\frac{2}{(\alpha-1)^3}$

إذن معادلة المستقيم (T) هي: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x+\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$.

التمرين الثاني عشر☹

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$ ، (C) تمثيلها البياني في معلم ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I-1 . نعتبر الدّالة h المعرّفة على كما يلي: $h(x)=xe^x+1$.

أ) ادرس تغيّرات الدالة h .

aziz_mus1@hotmail.fr

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x)>0$.

2. نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x+2-e^{x}$.

أ) احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β مع $\alpha>\beta$ ثمّ تحقق أنّ $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

د) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- 1. احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$ ثمّ فسّر النتائج هندسيا.

2. أ) بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\dfrac{e^{x}g(x)}{(xe^{x}+1)^{2}}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. أ) تحقق أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$.

ب) عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}.

4. عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5. أ) تحقق أنّ $f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{xe^{x}+1}$ حيث $u(x)=e^{x}-xe^{x}-1$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة u ثمّ استنتج اشارة $u(x)$.

جـ) استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T).

6. أُرسم (T) و (C). (**نقبل أنّ** $-1{,}85<\beta<-1{,}84$ و $-1{,}19<f(\beta)<-1{,}18$)

الحل☺

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}$، (C) تمثيلها البياني في معلم ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الرّسم $2cm$.

I- 1. نعتبر الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=xe^{x}+1$.

أ) دراسة اتجاه تغيّر الدالة h.

الدّالة h تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x: $h'(x)=e^{x}+xe^{x}=e^{x}(x+1)$

لدينا $e^{x}>0$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي إشارة $(1+x)$؛ $h'(-1)=0$

من أجل $x\in]-\infty;-1[$، $h'(x)<0$ وعليه الدّالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$.

من أجل $x\in]-1;+\infty[$، $h'(x)>0$ وعليه الدّالة h متزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

ب) تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x)>0$.

لدينا الدالة h تقبل قيمة حدّية صغرى تبلغها عند $x=-1$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x)\geq h(-1)$ أي $h(x)\geq 1-e^{-1}$ وبالتالي $h(x)>0$.

2. نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x+2-e^{x}$.

أ) حساب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x+2-e^{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x+2-e^{x}=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^{x}}{x}\right)=-\infty$$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$.

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g .

$g'(x)=1-e^{x}$

$g'(x)=0$ معناه $1-e^{x}=0$ ويكافئ $e^{x}=1$ أي $x=0$

$g'(x)>0$ معناه $1-e^{x}>0$ ويكافئ $e^{x}<1$ أي $x<0$

$g'(x)<0$ معناه $1-e^{x}<0$ ويكافئ $e^{x}>1$ أي $x>0$

إذن الدّالة g متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

جدول التغيّرات.

x	$-\infty$		β		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$

جـ) تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ **تقبل حلين** α **و** β **مع** $\alpha>\beta$

الدّالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;1]$ و $0\in]-\infty;1]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]-\infty;0]$.

ولدينا الدّالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;1]$ و $0\in]-\infty;1]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$.

التحقق أنّ $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

لدينا $g(1{,}14)\approx0{,}013$ و $g(1{,}15)\approx-0{,}008$ أي $g(1{,}14)\times g(1{,}15)<0$ ومنه $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

د) استنتاج اشارة $g(x)$ **على** $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II- 1. حساب نهايتي f **عند** $-\infty$ **و** $+\infty$ **ثمّ فسّر النتائج هندسيا.**

لدينا $\lim_{x\to-\infty} e^{x}-1=-1$ و $\lim_{x\to-\infty} xe^{x}+1=1$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}=-1$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(1-e^{-x}\right)}{e^{x}\left(x+e^{-x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}=0$$

2. أ) تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{e^{x}g(x)}{\left(xe^{x}+1\right)^{2}}$.

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f'(x)=\frac{e^x\left(xe^x+1\right)-\left(e^x+xe^x\right)\left(e^x-1\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{xe^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x-xe^{2x}+xe^x}{\left(xe^x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x-e^{2x}+xe^x}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x+2-e^x\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{e^x g(x)}{\left(xe^x+1\right)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f .

لدينا $e^x>0$ و $\left(xe^x+1\right)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

في المجموعة $]-\infty;\beta[\cup]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)<0$ أي $f'(x)<0$ وعليه الدّالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;\beta]$ و $[\alpha;+\infty[$

وفي المجال $]\beta;\alpha[$ ، $g(x)>0$ أي $f'(x)>0$ وعليه الدّالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3. أ) التحقق أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$.

لدينا $g(\alpha)=0$ معناه $\alpha+2-e^\alpha=0$ أي $e^\alpha=\alpha+2$

$$f(\alpha)=\frac{e^\alpha-1}{\alpha e^\alpha+1}=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\frac{1}{\alpha+1}$$

ب) تعيين حصرا للعدد $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} .

لدينا $1{,}14<\alpha<1{,}15$ معناه $2{,}14<\alpha+1<2{,}15$ يكافئ $\dfrac{1}{2{,}15}<\dfrac{1}{\alpha+1}<\dfrac{1}{2{,}14}$ أي $0{,}46<f(\alpha)<0{,}47$.

4. تعيين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

معادلة (T) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=x$.

5. أ) التحقق أنّ $f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ **حيث** $u(x)=e^x-xe^x-1$.

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f(x)-x=\frac{e^x-1}{xe^x+1}-x=\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}=\frac{-1-x+e^x\left(1-x^2\right)}{xe^x+1}=\frac{-(x+1)+e^x(1+x)(1-x)}{xe^x+1}$$

$$f(x)-x=\frac{(1+x)\left(e^x(1-x)-1\right)}{xe^x+1}=\frac{(1+x)u(x)}{xe^x+1}$$

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة u ثمّ استنتاج إشارة $u(x)$.

الدالة u تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x : $u'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x$

إشارة $u'(x)$ هي نفس إشارة $-x$

من أجل $x>0$ فإنّ $u'(x)<0$ ؛ ومن أجل $x<0$ فإنّ $u'(x)>0$ و $u'(0)=0$.

وعليه الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ولها قيمة حدية عظمى هي $u(0)=0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $u(x)\le 0$.

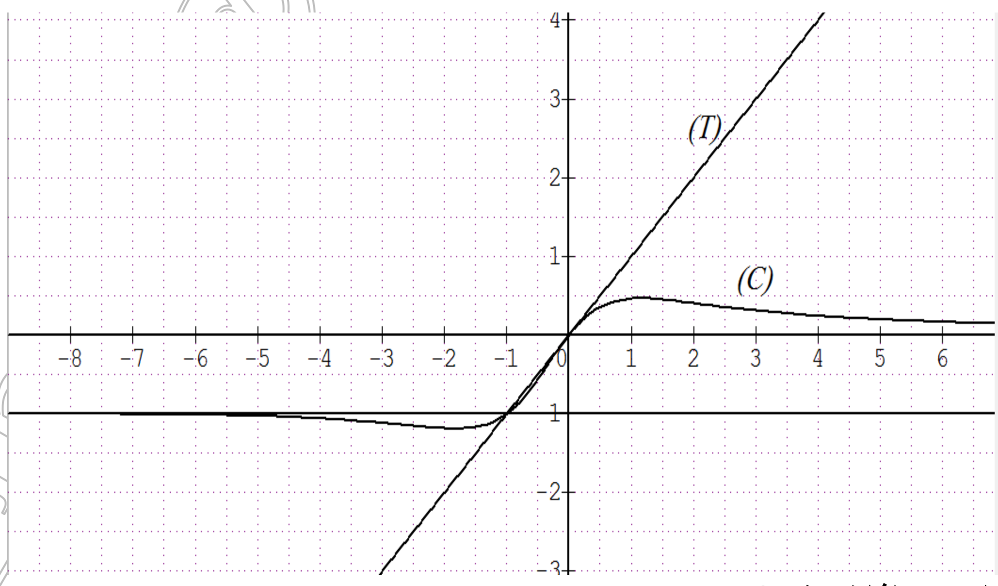
جـ) استنتاج الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T).

لدينا $f(x)-x=\dfrac{(1+x)u(x)}{xe^x+1}=\dfrac{(1+x)u(x)}{xe^x+1}$ و $h(x)>0$ ومنه إشارة $f(x)-x$ هي إشارة $(1+x)u(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$u(x)$		$-$		$-$	0	$-$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

في المجال $]-\infty;-1[$ ، (C) يقع فوق (T) وفي المجال $]-1;+\infty[$ ، (C) يقع تحت (T) ويشتركان في النقطتين $A(-1;-1)$ و O

6. رسم (T) و (C).



التمرين الثالث عشر☹

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب ـ احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا.

2. ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. أ ـ بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب:

$y=x$ و $y=x+1$.

ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

4. أثبت أنّ $\omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f).

5. أ - بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1,4<\beta<-1,3$.

ب - هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

جـ - ارسم (Δ)،(Δ') ثمّ المنحنى (C_f).

د - ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$

الحل☺

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$

نرمز بـ(C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ - حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x-1}=-1$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x-\frac{1}{e^x-1}=-\infty$.

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-\frac{1}{e^x-1}=+\infty$.

ب - حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{e^x-1}=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} e^x-1=0^-$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} x-\frac{1}{e^x-1}=+\infty$

ولدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{e^x-1}=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} e^x-1=0^+$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x-\frac{1}{e^x-1}=-\infty$

التفسير: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$.

2. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f جدول تغيّراتها.

من أجل $x\neq 0$ لدينا: $f'(x)=1+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا $e^x>0$ و $(e^x-1)^2>0$ ومنه $f'(x)>0$ وعليه الدّالة f متزايدة تماما على مجالي تعريفها.

جدول التغيّرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

3. أ ـ تبيين أنّ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب:
$y=x$ و $y=x+1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{e^x-1}=0$ إذن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{e^x-1}-1=1-1=0$ إذن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=x+1$ بجوار $-\infty$.

ب ـ دراسة وضعية $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى (Δ)

$f(x)-x=\dfrac{-1}{e^x-1}$ ؛ إشارة $f(x)-x$ هي عكس إشارة e^x-1

x	$-\infty$ … 0	0 … $+\infty$
e^x-1	$-$	$+$
$f(x)-x$	$+$	$-$
الوضعية النسبية	$\left(C_f\right)$ يقع فوق (Δ)	$\left(C_f\right)$ يقع تحت (Δ)

ب ـ دراسة وضعية $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى (Δ').

$$f(x)-(x+1)=-\frac{1}{e^x-1}-1=\frac{-e^x}{e^x-1}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $-e^x<0$ ومنه إشارة $f(x)-(x+1)$ هي عكس إشارة e^x-1

x	$-\infty$ … 0	0 … $+\infty$
e^x-1	$-$	$+$
$f(x)-(x+1)$	$+$	$-$
الوضعية النسبية	$\left(C_f\right)$ يقع فوق (Δ')	$\left(C_f\right)$ يقع تحت (Δ')

4. إثبات أنّ $\omega\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر بالنسبة للمنحنى $\left(C_f\right)$.

$\omega\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تناظر إذا تحقق مايلي: من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ فإنّ $-x\in\mathbb{R}^*$

ومن أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(-x)+f(x)=1$

لدينا $x\in\mathbb{R}^*$ معناه $x\neq0$ ومنه $-x\neq0$ أي $-x\in\mathbb{R}^*$.

$$f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}+x-\frac{1}{e^x-1}=\frac{-e^x}{1-e^x}-\frac{1}{e^x-1}=1$$

إذن $\omega\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر بالنسبة للمنحنى $\left(C_f\right)$.

5. أ ـ تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln2<\alpha<1$ و $-1,4<\beta<-1,3$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ وبالخصوص على المجال $[-1,4;-1,3]$ ولدينا

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$f(-1,4)\approx -0,07$ و $f(-1,3)\approx 0,07$ أي $f(-1,4)\times f(-1,3)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β من المجال $]-1,4;-1,3[$ يحقق $f(\beta)=0$.

ولدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[\ln 2;1]$ و $f(\ln 2)\approx -0,3$ و $f(1)\approx 0,4$ أي $f(\ln 2)\times f(1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]\ln 2;1[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

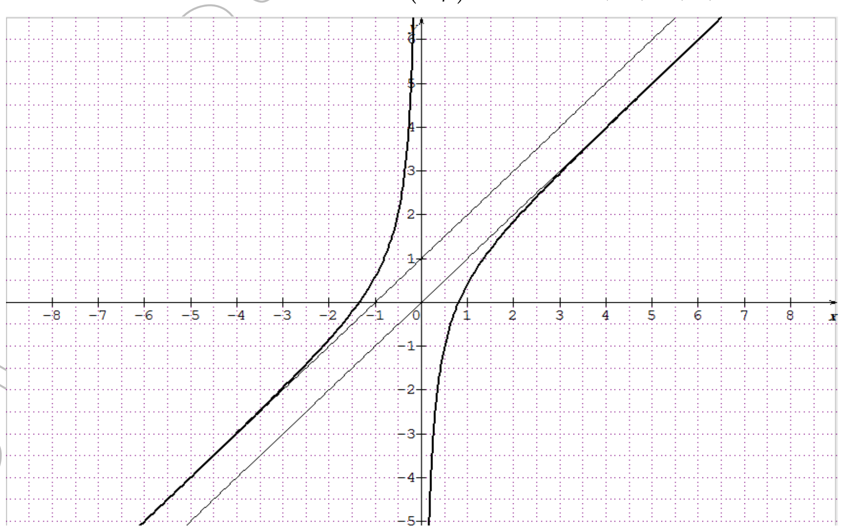
ب ـ هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

المماس يوازي (Δ) معناه $f'(x_0)=1$.

$f'(x_0)=1$ يكافئ $1+\dfrac{e^{x_0}}{\left(e^{x_0}-1\right)^2}=1$ ويكافئ $\dfrac{e^{x_0}}{\left(e^{x_0}-1\right)^2}=0$ أي $e^{x_0}=0$ و هذا مستحيل.

ومنه لا يوجد مماس لـ (C_f) يوازي المستقيم (Δ).

جـ ـ رسم (Δ)، (Δ') والمنحنى (C_f).



د ـ المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$

$(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $m-1=me^{x}$ وتكافئ $-1=m\left(e^{x}-1\right)$ تكافئ $m=\dfrac{-1}{e^{x}-1}$ تكافئ $x+m=x-\dfrac{1}{e^{x}-1}$

أي $f(x)=x+m$ ومنه حلول المعادلة هي فواصل النقط المشتركة بين (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=x+m$

إذا كان $m<0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

إذا كان $0\le m\le 1$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m>1$ فإنّ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا.

التمرين الرابع عشر☹

I ـ لتكن الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=ax+b-\dfrac{4e^{x}}{e^{x}+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

نرمز بـ (C_g) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ـ عيّن a و b بحيث (C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ ويقبل عند النقطة A مماسا موازيا لمحور الفواصل

II ـ نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x-2+\dfrac{8}{e^x+2}$

2.احسب نهايتي الدّالة عند $-\infty$ و $+\infty$.

3. ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f وشكل جدول تغيّراتها.

4. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)$.

ـ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

5. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.

6. بيّن أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1{,}7<\alpha<-1{,}6$.

7. ارسم (Δ)، (Δ') و (C_f).

III ـ نعتبر الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=[f(x)]^2$.

ـ عيّن اتجاه تغيّر الدّالة ثمّ شكل جدول تغيراتها.

الحل☺

I ـ لتكن الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=ax+b-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

نرمز بـ(C_g) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ـ تعيين a و b بحيث (C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ ويقبل عند النقطة مماسا موازيا لمحور الفواصل

(C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ معناه $g(\ln 2)=\ln 2$ يكافئ $(\ln 2)a+b-\dfrac{4e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}+2}=\ln 2$ ويكافئ $(\ln 2)a+b-2=\ln 2$ أي $(\ln 2)a+b=\ln 2+2 \ldots(1)$.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)=a-\dfrac{8e^x}{(e^x+2)^2}$

(C_g) يقبل عند النقطة A مماسا موازيا لمحور الفواصل معناه $g'(\ln 2)=0$ ويكافئ $a-1=0$ أي $a=1$

بالتعويض عن قيمة a في المعادلة (1) نجد $(\ln 2).(1)+b=\ln 2+2$ ومنه $b=2$.

II ـ نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x-2+\dfrac{8}{e^x+2}$

$$f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}=x-2+4-\frac{4e^x}{e^x+2}=x-2+\frac{4e^x+8-4e^x}{e^x+2}=x-2+\frac{8}{e^x+2}$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

2. حساب نهايتي الدّالة عند $-\infty$ و $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{e^x+2}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-2+\frac{8}{e^x+2}=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{e^x+2}=0$

3. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f

الدّالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=1-\frac{8e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{e^{2x}+4e^x+4-8e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{e^{2x}-4e^x+4}{(e^x+2)^2}=\frac{(e^x-2)^2}{(e^x+2)^2}$$

إذن الدّالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 2$	↗	$+\infty$

4. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{e^x+2}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{4e^x}{e^x+2}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+2=2$.

- استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x-2$ بجوار $+\infty$.

و لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ') مائل معادلته $y=x+2$ بجوار $-\infty$.

5. تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.

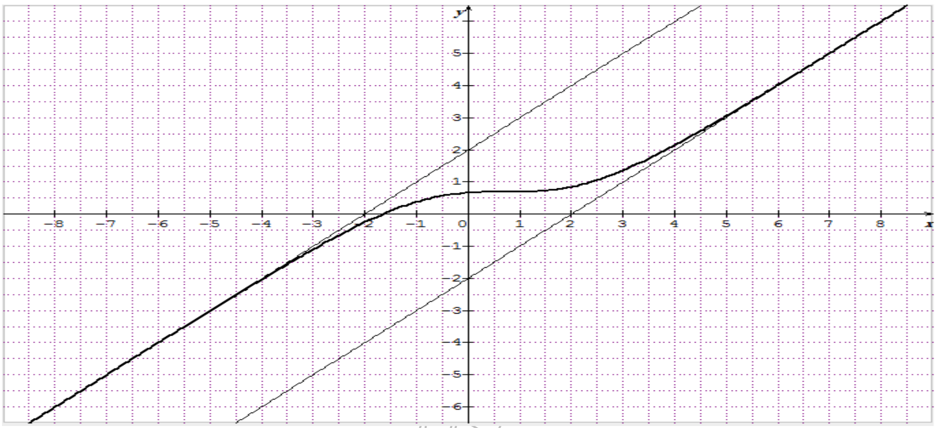
بما أنّ $f'(x)$ تنعدم عند العدد $\ln 2$ ولاتغير من إشارتها فإن النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

6. تبيين أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1,7<\alpha<-1,6$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على المجال $[-1,7;-1,6]$ ولدينا $f(-1.6)=0.03$ ، $f(-1.7)=-0.03$ أي $f(-1.7)\times f(-1.6)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1,7;-1,6[$ بحيث $f(\alpha)=0$ وبالتالي (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1,7<\alpha<-1,6$.

7. رسم (Δ) ، (Δ') و (C_f).

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr



III ـ نعتبر الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=[f(x)]^2$.

ـ تعيين اتجاه تغيّر الدّالة h .

نضع $u(x)=x^2$ عندئذ $h(x)=[f(x)]^2=u[f(x)]=(u\circ f)(x)$

لدينا $u'(x)=2x$ ومنه $h'(x)=f'(x)\times u'(f(x))=f'(x)\times 2f(x)=2f'(x)\times f(x)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $2f'(x)\geq 0$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$		α		$\ln 2$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

يمكن اتباع طريقة اتجاه تغيّر مركب دالتين:

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;0]$ والدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ وبالتالي الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$.

و لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[0;+\infty[$ والدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

بما أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} u(x)=+\infty$ فإنّ $\lim_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$

بما أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$ فإنّ $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

جدول تغيرات الدّالة h .

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$h(\alpha)=[f(\alpha)]^2=0$.