مواضيع

تحضيرية

الموضوع الأول

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر: المستقيم (Δ) المعرف بمعادلات: $x=2t-1$ ، $y=-t+2$ ، $z=t+1$ حيث t وسيط حقيقي، و (P) ، (Q) مستويان معرفان بمعادلتيهما على الترتيب: $x+3y+z+1=0$ ، $x-y+2z+5=0$ و النقطة: $D(1;3;0)$. لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عين الجواب الصحيح معللا اختيارك.

1. ج1) $A(1;1;2)\in(\Delta)$ ، ج2) $B(-1;0;2)\in(\Delta)$ ، ج3) $C(0;1;2)\in(\Delta)$.
2. ج1) (Δ) محتوى في (P) ، ج2) (Δ) يقطع (P) ، ج3) (Δ) يوازي (P) .
3. ج1) (P) يوازي (Q) ، ج2) (P) و (Q) منطبقان ، ج3) (P) يعامد (Q) .
4. ج1) $d(D;(P))=\dfrac{6}{\sqrt{11}}$ ، ج2) $d(D;(P))=\sqrt{11}$ ، ج3) $d(D;(P))=\dfrac{\sqrt{11}}{11}$.

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+2n \end{cases}$.

1. احسب u_1 و u_2 .
2. أ) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $u_n\geq n$.
ب) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
3. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-4n+8$.
أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
ب) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n=10\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+4n-8$.
جـ) احسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين الثالث:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3+2(\sqrt{2}-1)z^2+4(1-\sqrt{2})z-8=0...(1)$

1. أ) بين أن المعادلة (1) تقبل حلا حقيقيا z_0 ظاهرا يطلب تعيينه.
ب) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z فإن:
$z^3+2(\sqrt{2}-1)z^2+4(1-\sqrt{2})z-8=(z-z_0)(z^2+az+b)$.
جـ) استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة (1) (نرمز بـ z_1 إلى حل المعادلة (1) حيث: $\mathrm{Im}(z_1)>0$)
3. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B

ذات اللاحقتين: $z_A = z_0$ ، $z_B = z_1$ على الترتيب.

أ) أحسب z_K لاحقة النقطة K منتصف القطعة $[AB]$ ثم الطويلة للعدد z_K.

ب) بين أن المثلث OAB متساوي الساقين ثم استنتج قيسا للزاوية $(\vec{u};\overrightarrow{OK})$.

جـ) استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ ، $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = e^{2x} - \frac{9}{2}e^x + 2$. وليكن (C) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس للمستوي. (وحدة الطول $1cm$).

I) 1. أ / بين أن المستقيم (d) الذي معادلته $y = 2$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$.

ب / أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (d) .

جـ / أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4. أ / عين نقاط تقاطع المنحنى (C) مع محوري الإحداثيات.

ب / أرسم (C) ، (d) و (T) في نفس المعلم.

5. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة :
$2e^{2x} - 9e^x + 4 - 2m = 0$.

6. احسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلتيهما $x = \ln\frac{1}{2}$ ، $x = \ln 4$.

II) نعتبر المعادلة التفاضلية $(E): y' - 2y = \frac{9}{2}e^x - 4$ ، حيث y يشير إلى دالة عددية ذات المتغير x و المعرفة و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

1. حل المعادلة التفاضلية $(E_0): y' - 2y = 0$. نرمز إلى حلولها بالرمز v

2. نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) = v(x) - \frac{9}{2}e^x + 2$.

أ / بين أن الدالة g حل للمعادلة (E).

ب / تحقق أن الدالة f هي الدالة الحل g والتي تحقق $g(-\ln 2) = 0$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلة له $2x+y-2z+4=0$ و النقط $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$.

1. أ/ بين أن النقط A ، B ، C تعرف مستويا .
ب/ بين أن هذا المستوي هو المستوي (P) .

2. أ/ بين أن المثلث ABC قائم ثم احسب مساحته.
ب/ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من النقطة O و العمودي على المستوي (P).
جـ/ استنتج احداثيات النقطة K المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (P).
د/ عين المسافة بين O و المستوي (P) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

3. نعتبر في هذا السؤال الجملة المثقلة : $\{(O;3);(A;1);(B;1);(C;1)\}$.
أ/ بين أن هذه الجملة تقبل مرجحا نسميه G .
ب/ نرمز بـ I إلى مركز ثقل المثلث ABC ، بين أن G تنتمي إلى المستقيم (OI) .
جـ/ عين المسافة بين G و المستوي (P) .

4. أ/ عين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$
ب/ استنتج الوضع النسبي للمستوي (P) و المجموعة (Γ).

التمرين الثاني:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.
لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عين الجواب الصحيح معللا اختيارك .

1. الحل للمعادلة: $2z+\bar{z}=9+i$ في $\mathbb{C}$ هو: ج1) 3 ، ج2) i ، ج3) $3+i$.

2. n عدد طبيعي ، العدد المركب $(1+i\sqrt{3})^n$ حقيقي إذا وفقط إذا كان n يكتب على الشكل: ج1) $3k+1$ ، ج2) $3k+2$ ، ج3) $3k$. حيث k عدد طبيعي.

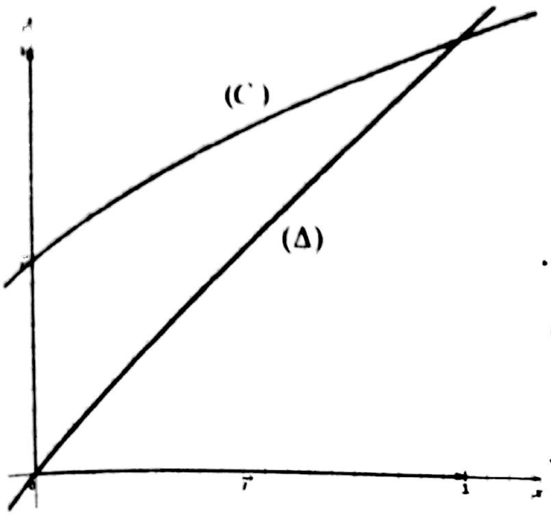
3. مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z=x+iy$ بحيث: $|z-1|=|z+i|$ هي مستقيم معادلة له: ج1) $y=x-1$ ، ج2) $y=-x$ ، ج3) $y=x$.

4. الشكل الأسي للعدد $z=-\sqrt{3}+e^{i\frac{\pi}{6}}$ هو: ج1) $e^{\frac{i5\pi}{6}}$ ، ج2) $e^{\frac{i7\pi}{6}}$ ، ج3) $e^{-\frac{i5\pi}{6}}$.

5. نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$. العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي يحول O إلى A ويحول A إلى B هي:
ج1) $z'=2z+i$ ، ج2) $z'=(1-i)z+i$ ، ج3) $z'=(1+i)z+1-i$.

التمرين الثالث:

(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=0$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=f(u_n)$. حيث f الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي:



$f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$ و المنحنى (C) المقابل هو للدالة f على المجال $[0;1]$ ، (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=x$.

1 . بين أن من أجل كل $x\in[0;1]$ فإن $f(x)\in[0;1]$.

2 . أ / انقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .

ب / ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

3 . أ / بين أن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\in[0;1]$.

ب / ادرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

جـ/ هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ برر .

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

1 . بين أن المتتالية (v_n) هندسية معينا أساسها وحدها الأول .

2 . أكتب بدلالة n الحد العام u_n للمتتالية (u_n) .

3 . أحسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n$.

التمرين الرابع :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^x+1$.

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$) .

1 . أ) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و استنتج مستقيما مقاربا (d) للمنحنى (C).

ب) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x وضعية (C) بالنسبة إلى (d) .

جـ) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم أحسب $f(2)$.

2 . ادرس اتجاه تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3 . بين أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين إحداثييها.

4 . أ) أرسم (C) و (d) في نفس المعلم.

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة:

$(m-1)e^{-x}=x-1$.

5 . أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب التكامل : $\int_0^1(x-1)e^x\,dx$.

ب) استنتج ، بالسنتمتر مربع ، مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلتها $x=0$ و $x=1$ و $y=0$.

الموضوع الثالث

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط : $A(1;2;3)$ ، $B(0;1;4)$ ، $C(-1;-3;2)$ ، $D(4;-2;5)$ و الشعاع $\vec{n}(2;a;b)$.

1. أ) بين أن النقط A ، B ، C ليست في استقامية.

ب) أوجد العددين a و b حتى يكون $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

جـ) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2. (Δ) مستقيم معرف بالتمثيل الوسيطي: $t \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+t \\ z = 4-t \end{cases}$.

.بين أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) و أن (Δ) عمودي على المستوي (ABC) .

3. لتكن E المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

أ) عين احداثيات النقطة E .

ب) بين أن E هي مركز ثقل المثلث ABC .

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$ وبحيث: $u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n}$.

1. احسب u_1 ، u_2 .

2. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2 \le u_n \le 4$.

ب) بين أن (u_n) متزايدة.

جـ) استنتج أن (u_n) متقاربة.

3. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $4 - u_{n+1} \le \dfrac{4-u_n}{2}$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 \le 4 - u_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

جـ) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث:

1. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (1)... $z^4 = -4$.

أ) بين أنه إذا كان العدد z_0 حل للمعادلة (1) فإن كل من $-z_0$ و $\overline{z_0}$ هو حل للمعادلة (1).

ب) تحقق أن العدد $z_0 = 1+i$ هو حل للمعادلة (1) ثم استنتج الحلول الثلاثة الأخرى.

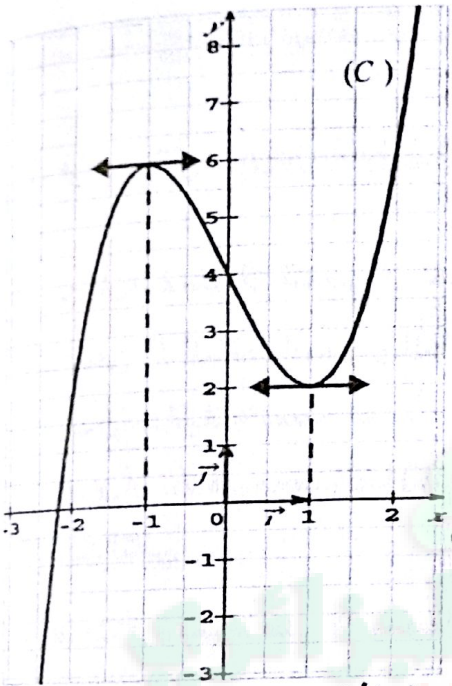
2 .في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B
C و D ذات اللواحق $z_A=1+i$ ، $z_B=-1+i$ ، $z_C=-1-i$ و $z_D=1-i$ على الترتيب.

أ / عين العبارة المركبة للدوران r الذي مركزه النقطة C و زاويته $-\frac{\pi}{3}$.

ب / عين لاحقتي النقطتين E و F صورتي B و D على الترتيب بالدوران r .

جـ / بين أن العدد المركب $\frac{z_A-z_E}{z_A-z_F}$ حقيقي ، ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقط A ، E ، F.

التمرين الرابع :



المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $g(x)=x^3-3x+4$

1 - أ) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدد $g(-2)$ و إشارة $g(-2,5)$.

ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $]-2,5;-2[$ يحقق: $g(\alpha)=0$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

2 - f هي الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يأتي: $f(x)=x+2+\frac{3x-2}{x^2}$. وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f . ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجالات مجموعة تعريفها مبينا المستقيم المقارب للمنحني (Γ) .

جـ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+2$ مقارب للمنحني (Γ) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

د) ادرس وضعية (Γ) بالنسبة إلى (Δ) .

هـ) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 - أ) بين أن المنحنى (Γ) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث $0,4<\beta<0,5$.

ب) نأخذ $\alpha\approx-2,2$ عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} .

جـ) أرسم المنحني (Γ) .

4- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (Γ) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيها : $x=\frac{2}{3}$ ، $x=2$.

الموضوع الرابع

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ محاوره (OX) ، (OY) ،
(OZ) نعتبر النقطة: $A(1;-2;4)$ و المستوي (P) الذي معادلته $2x-3y+z+2=0$.

1. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من النقطة A و العمودي على المستوي (P).
2. عين إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع (Δ) و (P).
3. اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتمس المستوي (P).
4. عين إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (S) و المستقيم (OZ).
5. عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثاني:

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3 .$$

1- أ) أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{4}x+3$.

ب) باستعمال الرسم السابق ، مثل على محور الفواصل و بدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .

جـ) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>4$.

3- بين أن (u_n) متناقصة.

4- هل (u_n) متقاربة؟ برر .

5- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-4$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

6- نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\ln(u_n-4)$.

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) بدلالة n ، أكتب عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n .

جـ) عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق : $u_n<4+2\times10^{-4}$.

التمرين الثالث:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A نقطة من المستوي المركب لاحقتها 2 ، ليكن S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$

1 . أحسب لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتحويل S ، ما تستنتج ؟.

2 . عين طبيعة التحويل S و عناصره المميزة .

3 . من أجل $z \neq 2$ بين أن : $z' - z = \left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)(2-z)$ ثم استنتج أن المثلث AMM' قائم في النقطة M' .

4 . بين أن التحويل h حيث: $h = S\,oS\,oS\,oS\,oS\,oS$ هو تحاك يطلب تعيين عناصره المميزة.

التمرين الرابع :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(2x) - \ln(x+1)$ ، وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $1cm$)

1) بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f(x) = \ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

2) أ / أحسب نهايتي الدالة f عند 0 وعند $+\infty$ وفسر النتيجتين بيانيا.

ب / ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = \ln 2$.

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) أ / عين A نقطة تقاطع المنحني (C) مع محور الفواصل .

ب/ استنتج إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

5) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحني (C) عند النقطة A .

6) أرسم (T) ، (Δ) و المنحني (C) .

7) نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$F(x) = x\ln(2x) - (x+1)\ln(x+1)$.

أ/ بين أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة F على المجال $]0;+\infty[$.

جـ/ λ عدد حقيقي حيث $0 < \lambda < 1$.

احسب ، بالسنتمتر مربع ، المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = \lambda$ ، $x = 1$ ، $y = 0$.

- احسب $\lim\limits_{\lambda \to 0} A(\lambda)$.

الموضوع الخامس

التمرين الأول:

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1 .

ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. بين أن الشعاع $\vec{n}(1;0;1)$ ناظم للمستوي (BCE) ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (BCE).
2. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من النقطة E والعمودي على المستوي (BCE).
3. بين أن النقطة R نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) هي نظيرة B بالنسبة إلى A.
4. بين أن النقطة D هي مرجح الجملة $\{(R;1),(B;-1),(C;2)\}$.
5. أ/ عين طبيعة و عناصر المجموعة (S) للنقط M من الفضاء بحيث:
$\left\|\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{2}$ ، ثم تحقق أن النقط B ، E و G تنتمي إلى المجموعة (S).

ب/ حدد الوضع النسبي للمجموعة (S) و المستوي (BCE).

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية معرفة كما يلي $u_0=\dfrac{1}{4}$ ، $u_1=\dfrac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n:

$4u_{n+2}=7u_{n+1}-3u_n$. (v_n) متتالية معرفة كما يلي: $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) أحسب u_2 و v_0 .

2) برهن أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}$.

4) أ/ عبر عن u_n بدلالة S_n .

ب/ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ/ أحسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$.

التمرين الثالث:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^3-2(1+i)z^2+2(1+2i)z-4i=0\ldots(E)$$

1. بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه .
2. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z يكون:
$z^3-2(1+i)z^2+2(1+2i)z-4i=(z-z_0)(z^2+az+b)$.
3. استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).
4. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B ، C صور الأعداد z_0 ، z_1 ، z_2 حلول المعادلة (E) على الترتيب.

(حيث z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب تماما و z_2 هو الحل الآخر)

أ) أكتب العدد $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_O}$ على الشكل الجبري ثم المثلثي.

ب) استنتج قيسا بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC})$ ثم حدد طبيعة الرباعي $OABC$.

جـ) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $\left(\dfrac{z_B - z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

التمرين الرابع :

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g .
2. أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+\ln x}{x}$ ،

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ و 0 .
2. بين أن الدالة المشتقة f' للدالة f لها نفس إشارة g ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .
3. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = \dfrac{x}{2}$ مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ).
4. أ / بين أنه توجد نقطة وحيدة A من (C) يكون المماس (T) عندها موازيا لـ (Δ) .
   ب / عين إحداثيي النقطة A ثم أكتب معادلة لـ (T) .
5. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم برر أن : $0,34 \le \alpha \le 0,35$.
6. أرسم (Δ) ، (T) و (C) .
7. أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = \dfrac{1}{e^2}$ و $x = e$.

الموضوع السادس

التمرين الأول :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط :
$A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ ، $C(-2;2;2)$.

1. أ/ أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم عين قيمة مدورة للوحدة بالدرجات لقيس الزاوية $\widehat{BAC}$.

ب/ استنتج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

جـ/ بين أن الشعاع $\vec{n}(2;-1;2)$ ناظم للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2. أ/ بين ان المستويين (P) و (P') المعرفين بالمعادلتين $x+y-3z+3=0$ ، $x-2y+6z=0$ على الترتيب متقاطعان في مستقيم (D) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

ب/ أدرس تقاطع المستويات الثلاث (ABC) ، (P) و (P') .

3. لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث:

$$x^2+y^2+z^2-2x+6y-2z+2=0$$

أ/ عين طبيعة المجموعة (S) محددا عناصرها المميزة.

ب/ ادرس تقاطع المستقيم (D) والمجموعة (S).

جـ/ بين أن المستوي (ABC) يمس المجموعة (S).

التمرين الثاني :

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$. ليكن z_1 و z_2 حلا المعادلة حيث $\mathrm{Im}(z_1)>0$. نسمي M و N النقطتان ذات اللاحقتين z_1 و z_2 على الترتيب.

2. عين لاحقتي النقطتين Q و P صورتي النقطتين M و N على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{u}$ ، ثم بين أن الرباعي $MNPQ$ مربع.

3. لتكن R نظيرة P بالنسبة إلى O ، ولتكن E صورة P بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ولتكن S صورة E بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته $\sqrt{3}$.

• عين لواحق النقط R ، E و S ، ثم بين أن S تنتمي إلى القطعة $[MN]$.

4. نضع: $\alpha=2-\sqrt{3}$.

أ) بين أن: $1+\alpha^2=4\alpha$ و $1-\alpha^2=2\alpha\sqrt{3}$.

ب) عبر بدلالة α عن Z و Z' لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ على الترتيب.

جـ) بين أن $|Z|=|Z'|$ و أن: $\frac{Z}{Z'}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث PRS.

التمرين الثالث :

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^{x}-x-1$.

1 . أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2 . استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=-xe^{x}+2e^{x}-1$.

1 . أدرس تغيرات الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

2 . بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[0;+\infty[$ ثم برر أن $1,8<\alpha<1,9$.

3 . استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

III) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$ ، وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس للمستوي . (وحدة الرسم $10cm$)

1 . أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و فسر النتيجة بيانيا.

2 . أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3 . استنتج أنه من أجل كل $x\in[0;1]$ فإن $f(x)\in[0;1]$.

4 . أ / بين أنه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ فإن: $f(x)-x=\frac{(1-x)g(x)}{e^{x}-x}$.

ب / استنتج وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=x$ على المجال $[0;+\infty[$.

جـ / أرسم (C) و (Δ) في نفس المعلم على المجال $[0;1]$.

5 . (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=\frac{1}{2}$ و من أجل كل $n\in\mathbb{N}$:
$u_{n+1}=f(u_n)$.

أ / باستعمال الرسم السابق ، مثل على محور الفواصل و بدون حساب ،الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

ب / برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\frac{1}{2}\le u_n\le u_{n+1}\le 1$.

جـ / بين أن (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

الموضوع السابع

التمرين الأول :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط : $A(-1;0;2)$، $B(1;4;0)$، $C(3;-4;-2)$. أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة:

1. يمكن اعتبار النقطة C كمرجح للنقطتين A و B.
2. المعادلة $x+z=1$ هي للمستوي المعين بالنقط A، B، C.
3. مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $AM^2-BM^2=10$ هي مستقيم.
4. مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=4$ هي سطح كرة.

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1=1$ و:
$$u_{n+1}=\frac{n}{2(n+1)}u_n+\frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

1. أ) بين بالتراجع أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3 .
ب) بين أن المتتالية (u_n) رتيبة.
2. (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n=n(3-u_n)$.
أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
ب) عبر بدلالة n عن v_n ثم u_n.
جـ) ادرس تقارب المتتاليتين (u_n)، (v_n).
3. أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_1+2u_2+3u_3+...+nu_n$، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

التمرين الثالث :

1. أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2+4z+5=0$، نسمي z_1 و z_2 حلي المعادلة حيث z_2 هو الحل الذي جزؤه التخيلي سالب.
ب) أحسب العدد $(z_1-z_2)^{2012}$.
جـ) استنتج حلول المعادلة: $\left(\frac{z}{2z-1}\right)^2+4\left(\frac{z}{2z-1}\right)+5=0$
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.
أ) برهن إنه إذا كانت A، B، A' و B' أربع نقط حيث $A\neq B$ و $A'\neq B'$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A إلى A' و يحول B إلى B'.
ب) **تطبيق** :نعتبر النقط A، B، C ذات اللواحق على الترتيب:
$z_A=-2+i$، $z_B=-2-i$ و $z_C=2-i$
•عين العناصر المميزة للتشابه المباشر الذي يحول B إلى C و A إلى B.

التمرين الرابع :

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$.

1 . أحسب نهايتي الدالة g عند 0 وعند $+\infty$.

2 . أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3 . احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$) .

1 . أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ ثم أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب) بين أن من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ فإن : $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$.

استنتج نهاية الدالة f عند 0 ، فسر النتيجة بيانيا .

2 . أ) بين أنه من أجل كل لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3 . أنشئ (C_f).

III) 1 . بين أن الدالة $H:x\to x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\to(\ln x)^2$ على المجال $]0;+\infty[$.

2 . استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

3 . احسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ ، $x=e$.

الموضوع التاسع

التمرين الأول :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر المستقيم (d) المعرف بالمعادلات الوسيطية : $x=2-\frac{t}{2}$ ، $y=1$ ، $z=5-\frac{3t}{2}$.

حيث t وسيط حقيقي.

والنقطتين $A(2;-1;1)$ ، $B(4;-2;2)$ والنقطة C من (d) ذات الفاصلة 1.

اجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة:

1. المستقيم (d) يوازي المحور $(O;\vec{j})$.
2. معادلة المستوي المار من النقطة A و العمودي على المستقيم (d) هي: $x+3z-5=0$.
3. إحداثيات النقطة C هي $(1;1;2)$.
4. قيس الزاوية الهندسية $\widehat{ABC}$ يساوي $\frac{\pi}{3}$ راديان.

التمرين الثاني :

1. (u_n) متتالية حدودها موجبة تماما معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_1=1$ وبحيث: $u_{n+1}=2u_n+\frac{n+2}{n(n+1)}$.

أ) احسب u_2 و u_3.

2. (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n=u_n+\frac{1}{n}$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_1+v_2+...+v_n$.

ج) اكتب بدلالة n الحد العام u_n.

د) ادرس تقارب المتتالية (u_n).

التمرين الثالث :

1. أ/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+12=0$. (نرمز إلى حلي هذه المعادلة بـ z_1 و z_2 ، حيث z_1 هو العدد المركب الذي جزؤه التخيلي موجب تماما)

ب/ احسب العدد المركب $(z_1-z_2)^{2012}$.

2. أ/ مثل النقط A ، B و I ذات اللواحق على الترتيب: z_1 ، z_2 ، $z_I=2$.

ب/ بين أن النقط A ، B و O تنتمي إلى دائرة مركزها I يطلب تعيين نصف قطرها .

جـ/ أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABO .

د / مثل النقطة C ذات اللاحقة $z_C = -2i\sqrt{3}$.

- اكتب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_I - z_A}$ على الشكل الجبري ، ماذا تستنتج بالنسب للنقط A ، C و I ؛

التمرين الرابع :

I - نعتبر g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي :

$g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$ حيث a و b عددان حقيقيان .

(C_g) المنحني الممثل للدالة g في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $1cm$.

عين قيمتي a و b بحيث يشمل (C_g) النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ ويقبل عند النقطة A مماسا يوازي محور الفواصل .

II - نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي :

$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1 . بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$.

2 . أ / بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلة لكل منهما .

ب / حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لكل من (Δ) و (Δ') .

3 . أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها .

4 . بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثييها .

5 . أ / أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-2 < \alpha < -1,5$.

ب / أرسم (Δ) و (Δ') و (C_f) .

6 . ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

7 . λ عدد حقيقي موجب تماما .

أ / أحسب $S(\lambda)$ ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها :

$y = x - 2$ ، $x = 0$ ، $x = \lambda$.

ب / أحسب $\lim_{\lambda \mapsto +\infty} S(\lambda)$.

الموضوع التاسع

التمرين الأول:

الجزء الأول: نعتبر النقطتين A و D من الفضاء و I منتصف القطعة $[AD]$.

1. برهن أنه من أجل كل نقطة M من الفضاء: $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=MI^2-IA^2$.
2. استنتج المجموعة (E) للنقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=0$.

الجزء الثاني: في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(3;0;0)$، $B(0;6;0)$، $C(0;0;4)$، $D(-5;0;1)$.

1. أ/ تحقق أن الشعاع $\vec{n}(4;2;3)$ ناظمي للمستوي (ABC). ثم عين معادلة للمستوي (ABC).
2. أ/ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) و المار بالنقطة D.

ب/ استنتج إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

جـ/ أحسب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC).

د/ بين أن النقطة H تنتمي إلى المجموعة (E) المعرفة في **الجزء الأول**

التمرين الثاني:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول: $u_0=3$ وبالعلاقة $u_{n+1}=\sqrt{u_n+12}$

1. أ/ في نفس المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، أنشئ (C) التمثيل البياني للدالة: $f:x\mapsto\sqrt{x+12}$ انطلاقا من التمثيل البياني للدالة الجذر التربيعي ثم المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

ب/ أنشئ على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 دون حسابها.

جـ/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n).

2. أ/ بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0\le u_n\le 4$.

ب/ بين أن (u_n) متناقصة. ماذا تستنتج ؟

3. أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $|u_{n+1}-4|\le\dfrac{|u_n-4|}{4}$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $|u_{n+1}-4|\le\dfrac{1}{4^n}$.

جـ/ استنتج نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الثالث:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط. عين الجواب الصحيح معللا اختيارك.

1. إذا كان $\frac{\pi}{6}$ عمدة للعدد المركب z فإن عمدة للعدد $\frac{i}{\bar{z}^{2}}$ هي :

ج1) $-\frac{\pi}{6}$ ، ج2) $\frac{\pi}{6}$ ، ج3) $-\frac{5\pi}{6}$ ، ج4) $-\frac{5\pi}{6}$.

2. إذا كان $z=-\sqrt{3}+e^{i\frac{\pi}{6}}$ فإن الشكل الأسي لـ z هو :

ج1) $e^{\frac{i5\pi}{6}}$ ، ج2) $e^{\frac{i7\pi}{6}}$ ، ج3) $\sqrt{3}e^{-\frac{i\pi}{6}}$ ، ج4) $e^{-\frac{i5\pi}{6}}$.

3. إذا كان z و z' عددان مركبان حيث $|z|=2$ و $z'=z-\frac{1}{\bar{z}}$ فإن $|z'|$ تساوي :

ج1) 1 ، ج2) $\frac{1}{2}$ ، ج3) $\frac{3}{2}$ ، ج4) $\frac{5}{2}$.

التمرين الرابع :

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة $g(x)=-x+1-2\ln x$.

أ / أدرس تغيرات الدالة g .

ب / أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^{2}}$.

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $1cm$.

أ / أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ و 0 .

ب / بين أن الدالة المشتقة f' للدالة f لها نفس إشارة g ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

جـ / بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

د / أنشئ المنحنى (C) .

3. أ / باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب التكامل : $\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^{2}}dx$.

ب / استنتج مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=1$ ، $x=e$

الموضوع العاشر

التمرين الأول :

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

عين في كل حالة مما يلي الجواب الصحيح مع التبرير :

1) المستقيم المار بالنقطتين $A(1;2;-4)$ ، $B(-3;4;1)$ و المستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي

$$\begin{cases} x=-11-4\lambda \\ y=8+2\lambda \quad ;\lambda\in\mathbb{R} \\ z=11+5\lambda \end{cases}$$

ج1) متقاطعان ؛ ج2) متوازيان تماما ؛ ج3) متطابقان ؛ ج4) ليسا من نفس المستوي .

2) المستوي (P) الذي معادلته $2x+3y-z+4=0$ و المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \quad ;\lambda\in\mathbb{R} \\ z=8+\lambda \end{cases}$$

ج1) متقاطعان ؛ ج2) متوازيان تماما ، ج3) (D) محتوى في (P)

3) مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن $A(3;1;3)$ ، $B(-6;2;1)$ هي :

ج1) مستقيم ، ج2) مستو معادلته $9x-y+2z+11=0$ ، ج3) مستو معادلته $x+7y-z-7=0$

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:

$$u_n=1-2\int_0^n e^{-2x}dx$$

1. أحسب u_n بدلالة n .

2. أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

3. أدرس تقارب المتتالية (u_n) .

4. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

5. أ/ أحسب بدلالة n الجداء : $P_n=u_1\times u_2\times...\times u_n$.

ب/ عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $P_n=e^{-4038090}$.

التمرين الثالث :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+2\sqrt{2}z+6=0$.

نرمز بـ z_B إلى الحل للمعادلة الذي جزؤه التخيلي موجب تماما.

2. لتكن النقطة A ذات اللاحقة $z_A = 2 + i\sqrt{2}$.

أ / مثل في نفس المعلم النقطتين A و B .

ب / بين أن النقطتين A و B تنتميان إلى الدائرة (Γ) ذات المركز O ونصف القطر $\sqrt{6}$.

3. نعتبر النقط I ، J و K ذات اللواحق z_I ، z_J و z_K على الترتيب حيث:

$z_I = 2i$ ، z_J طويلته 2 وعمدة له $\frac{3\pi}{4}$ ، $z_K = -z_J$.

أ / اكتب z_J على الشكل الجبري.

ب / مثل النقط I ، J و K ثم حدد طبيعة المثلث IJK .

جـ / عين نصف قطر الدائرة (Γ') المحيطة بالمثلث IJK .

د / ارسم (Γ) و (Γ').

هـ / استنتج طريقة لإنشاء مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $2 < |z| < \sqrt{6}$.

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ ، و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ / أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ و 0 ، مبينا المستقيمات المقاربة للمنحنى (C)

ب / أدرس اتجاه تغير الدالة f مبينا ثم شكل جدول تغيراتها .

2. أرسم (C) حيث الوحدة $1cm$ على محور الفواصل و $2cm$ على محور التراتيب .

3. ليكن m عددا حقيقيا موجبا تماما ولتكن A النقطة من (C) ذات الفاصلة m ، و (T_m) مماس (C) في النقطة A .

أ / أكتب بدلالة m معادلة المماس (T_m) .

ب / عين قيم m التي من أجلها المماس (T_m) يشمل المبدأ O .

جـ / أكتب معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها ثم أرسم كل مماس.

4. أحسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) ومحور الفواصل والمستقيمين (d_1) و (d_2) الذين معادلتيهما $x = e$ و $x = \frac{1}{e}$ على الترتيب.

5. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = -\frac{(\ln|x|)^2}{x}$.

أ / بين أن g دالة فردية.

ب / بين أنه يمكن رسم (γ) منحنى الدالة g انطلاقا من (C) ثم أرسمه.

د / استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمنحني (γ) والمستقيمين (d_1) و (d_2)

الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1;-2;4)$ ، $B(-2;-6;5)$ و $C(-4;0;-3)$.

1. أ) بين أن النقط A ، B ، C ليست في استقامية .

ب) بين أنه تكون نقطة $M(x;y;z)$ من المستوي (ABC) إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان λ و μ بحيث: $\begin{cases} x = 1-3\lambda-5\mu \\ y = -2-4\lambda+2\mu \\ z = 4+\lambda-7\mu \end{cases}$.

جـ) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2. أ) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من النقطة O و العمودي على المستوي (ABC) .

ب) استنتج احداثيات النقطة O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) .

3. لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC) .

وليكن t عددا حقيقيا حيث : $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$.

أ) بين أن : $t = \dfrac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$ ، ثم استنتج قيمة العدد t .

ب) عين احداثيات النقطة H ثم استنتج المسافة بين النقطة H و المستقيم (BC) .

التمرين الثاني :

1. أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2+(2\sin\alpha)z+1=0$

حيث α عدد حقيقي من المجال $[0;\pi]$.

ب) اكتب حلي المعادلة على الشكل الأسي.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطة M ذات اللاحقة z حيث: $z = -\sin\alpha + i\cos\alpha$.

عين مجموعة النقط M لما يمسح α المجال $[0;\pi]$.

التمرين الثالث :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير في كل حالة:

1. نرمي حجر نرد متوازن ذو ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 و نقرأ الوجه العلوي ، احتمال الحصول على رقم مضاعف للعدد 3 يساوي : ج1) $\frac{1}{6}$ ، ج2) $\frac{1}{3}$ ، ج3) $\frac{1}{2}$.

2. لتكن A و B حادثتان من مجموعة امكانيات بحيث $P(A)=0,2$ ، $P(B)=0,3$ ،

لدينا: $P(A\cap B)=0,1$

ج1) $P(A\cup B)=0,4$ ، ج2) $P(A\cup B)=0,5$ ، ج3) $P(A\cup B)=0,6$.

3. لتكن C و D حادثتان مستقلتان من مجموعة امكانيات بحيث $P(C)=0,4$ ،

$P(D)=0,5$. لدينا:

ج1) $P(C\cup D)=0,9$ ، ج2) $P(C\cup D)=0,02$ ، ج3) $P(C\cup D)=0,7$.

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-\ln(1+e^{-x})$.

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول : $2cm$)

1. أ/ أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ وفسر النتيجة بيانيا .

ب/ أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$.

2. أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x)=x+1-\ln(1+e^{x})$.

ب/ استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحني (C) .

جـ/ أدرس الوضع النسبي للمنحني (C) والمستقيم (Δ).

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4. أ/ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ يطلب تعيينه.

ب/ بين أن $f(x)\geq x$ تكافئ $x\leq-\alpha$.

5. أحسب $f(0)$ ثم أرسم (C) و (Δ).

6. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

أ/ أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq-\alpha$.

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

جـ/ استنتج المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها .

الموضوع الثاني عشر

التمرين الأول :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط : $A(0;1;-2)$، $B(2;1;0)$، $C(3;0;-3)$، $H(2;2;-2)$.

1. بين أن المعادلة $x-2y-z=0$ هي للمستوي (P) المحدد بالنقط H ، A ، B و أن $C\notin(P)$

2. أ/ بين أن المثلث HAB متساوي الساقين في H .

ب/ بين أن (CH) عمودي على المستوي (P) .

جـ/ بين أن $CA=CB$ ، ثم عين تمثيلا وسيطيا لـ (Δ) المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{ACB}$.

3. لتكن T المسقط العمودي لـ H على المستوي (ABC) . بين أن T تنتمي إلى (Δ) .

التمرين الثاني :

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث: $z'=(1-i\sqrt{3})z+5\sqrt{3}$

1. بين أن S تشابه مباشر يطلب تعيين مركزه Ω ونسبته وزاويته .

2. نعتبر التحويل النقطي f حيث: $f=\underbrace{S\,oS\,oS\,...oS}_{n\text{ مرة}}$. $(n\geq 2)$.

أ/ حدد طبيعة التحويل f مبينا عناصره المميزة.

ب/ عين قيم n حتى يكون f تحاكيا .

3. لتكن M_0 نقطة ذات اللاحقة $z_0=-1$ ، نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$M_{n+1}=S(M_n)$ و $u_n=\left\|\overrightarrow{\Omega M_n}\right\|$.

أ/ أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ أكتب u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

جـ/ احسب بدلالة n المجموع : $d_n=u_0+u_1+u_2...+u_n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}d_n$.

د/ عين النقط M_n التي تنتمي إلى القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره 26 .

التمرين الثالث :

يشارك لاعب في لعبة تتكون من ثلاثة أسئلة ، سؤال سهل ، سؤال متوسط و سؤال صعب . حيث احتمال أن يكون السؤال سهلا $0,4$ ، واحتمال أن يكون سؤال متوسطا $0,3$.

يختار اللاعب ، عشوائيا ، سؤالا واحدا ، احتمال أن يوفق اللاعب في الإجابة عن السؤال السهل $0,95$ واحتمال أن يوفق اللاعب في الإجابة عن السؤال المتوسط $0,6$ و احتمال أن يوفق اللاعب

في الإجابة عن السؤال الصعب $0,4$.

نعتبر الحوادث: F : «السؤال المختار سهل» ، M : «السؤال المختار متوسط» ،

D : «السؤال المختار صعب» ، R : «اللاعب يوفق في الإجابة عن السؤال المختار».

1. أنشئ شجرة الاحتمالات الموافقة للمعطيات مع كتابة جميع الاحتمالات التي تصادفها على الشجرة وتبرير كل حساب.

2. أ) عبر بجملة عن الحادثة $D \cap R$ ثم احسب $P(D \cap R)$.

ب) احسب احتمال أن يختار اللاعب السؤال السهل ولا يوفق في الإجابة عنه.

جـ) احسب احتمال أن يوفق اللاعب في الإجابة عن السؤال المختار.

د) اللاعب يوفق في الإجابة ، احسب احتمال أن يكون السؤال المختار سهلا.

هـ) اللاعب لم يوفق في الإجابة ، احسب احتمال أن يكون السؤال المختار متوسطا .

التمرين الثالث :

I) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(0)=0$ ومن أجل $x \neq 0$: $f(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) ادرس استمرارية الدالة f عند العدد 0.

ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 0 ، فسر النتيجة هندسيا.

2. أ) احسب نهايات الدالة f عند : $-\infty$ ، $+\infty$ وعند 0.

ب) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

جـ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

د) اكتب معادلة للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{2}$.

3. أنشئ (D) ، (T) و (C_f) في نفس المعلم.

4. أ) عين العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة F بحيث: $F(x)=ax^2e^{\frac{1}{x}}$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب) احسب بوحدة المساحة، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x=\frac{1}{2}$ ، $x=2$ ، $y=0$.

II) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(0)=0$ ومن أجل $x \neq 0$: $g(x)=e^{\frac{1}{x}+\ln|2x-1|}$.

وليكن (C_g) تمثيلها البياني.

1. اكتب $g(x)$ بدلالة $f(x)$.

2. اعتمادا على المنحنى (C_f) اشرح كيف يمكن رسم (C_g) ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

الموضوع الثالث عشر

التمرين الأول :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-5+3t \\ y=1+2t \\ z=-2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ والنقطتين $A(8;0;8)$ و $B(10;3;10)$.

1. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطتين A و B .
2. بين أن (D) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .
3. ليكن المستوي (P) الذي يحوي (Δ) ويوازي (D).

أ/ بين أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظم للمستوي (P) .

ب/ عين المعادلة الديكارتية للمستوي (P) .

جـ/ بين أن المسافة بين نقطة كيفية M من (D) و (P) مستقلة عن اختيار النقطة M .

4. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المعرف بتقاطع المستويين (P) و (xOy) .

التمرين الثاني :

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$.

أ) احسب الحد الأول u_0 .

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:
$u_{n+1}=e-(n+1)u_n$.

جـ) استنتج قيمة كل من u_1 و u_2 .

2. أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $[0;1]$ فإن: $\frac{1}{n+1}\le u_n\le\frac{e}{n+1}$.

ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث :

1. أ/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+2=0$ ، ثم عين الطويلة وعمدة لكل حل .

ب/ استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة : $(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$

2. في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب: $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2z_B$.

أ/ أكتب على الشكل الجبري كل من العددين ، z_B و z_C ، ثم علم النقط A ، B ، C.

ب/ بين أن النقط A ، B ، C تنتمي إلى دائرة (Γ) مركزها النقطة I ذات اللاحقة 3 و

نصف قطرها $\sqrt{5}$.

جـ / أحسب العدد $\frac{z_C - 3}{z_A - 3}$ ثم استنتج طبيعة المثلث IAC .

د / عين لاحقة النقطة E صورة النقطة O بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{IC}$.

هـ / عين لاحقة النقطة D صورة النقطة E بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

و / بين أن المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان .

التمرين الرابع :

I) لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1 . عين نهايتي الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

2 . أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3 . أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$ حيث: $1 < \alpha < 2$.

ب) باستعمال حاسبة عين حصرا للعدد α سعته $0,01$.

4 . استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.

و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(وحدة الطول $1cm$)

1 . أ) بين أن من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$.

استنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ب) بين أن: $g(\alpha) = \alpha^4 + \alpha^2$ وأن: $g(\alpha) \in [4,6;4,8]$.

ج) أحسب نهايتي الدالة g عند 0 وعند $+\infty$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g .

د) أرسم (C_g) في المعلم السابق.

2 . نعتبر النقطتين $A(0;2)$ ، $M(x;\ln x)$ حيث x عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$.

أ) بين أن: $AM = \sqrt{g(x)}$.

ب) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x) = \sqrt{x^2 + (2 - \ln x)^2}$.

باستعمال تغيرات الدالة g استنتج تغيرات الدالة h على المجال $]0;+\infty[$.

ج) استنتج أقرب نقطة P ، من منحني الدالة "ln" ، إلى النقطة A .

د) أحسب عندئذ المسافة AP ثم بين أن: $AP \in [2,1;2,2]$.

الموضوع الرابع عشر

التمرين الأول :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(1;0;2)$، $B(1;1;4)$، $C(-1;1;1)$.

1. أ) بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

ب) عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون الشعاع $\vec{n}(a;b;-2)$ ناظم للمستوي (ABC).

جـ) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2. ليكن المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب:
$2x+y+2z+1=0$ ، $x-2y+6z=0$.

أ) بين أن المستويان (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

ب) هل المستقيم (Δ) والمستوي (ABC) متقاطعان في نقطة ؟ برر إجابتك.

3. α عدد حقيقي يختلف عن -3 .

أ) عين بدلالة α احداثيات النقطة G_α مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;\alpha)\}$.

ب) تحقق من أنه لما α يمسح $\mathbb{R}-\{-3\}$ فإن النقطة G_α تنتمي إلى المستوي (ABC) .

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما بحيث: $\begin{cases}\ln(u_1)+\ln(u_5)=-12\\ \ln(u_2)-\ln(u_4)=4\end{cases}$

1. أ/ بين أن q أساس المتتالية (u_n) يساوي e^{-2} .

ب/ أحسب الحد الأول u_0 ثم أكتب u_n بدلالة n .

جـ/ أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$.

2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$v_n=\ln(u_{n+1})+\ln(u_n)$.

أ/ بين أن المتتالية (v_n) حسابية معينا أساسها وحدها الأول.

ب/ أحسب بدلالة n المجموع: $T_n=v_0+v_1+...+v_n$.

جـ/ عين العدد الطبيعي n بحيث: $T_n=-8$.

التمرين الثالث :

1. أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.

نرمز إلى حلي هذه المعادلة بـ: z_1 و z_2 حيث z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب.

ب) اكتب العدد المركب $(z_1-z_2)^{2012}$ على الشكل الأسي.

2. في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط M_1 ، M_2 و A ذات اللواحق على الترتيب: $\sqrt{2}(1+i)$ ، $\sqrt{2}(1-i)$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

أ) أوجد z_3 لاحقة النقطة M_3 صورة M_2 بالتحاكي H ذو المركز A والنسبة: -3 .

ب) أوجد z_4 لاحقة النقطة M_4 صورة M_2 بالدوران R ذو المركز O والزاوية : $-\frac{\pi}{2}$.

جـ) أكتب العدد المركب $\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}$ على الشكل الأسي.

د) حدد طبيعة المثلث $M_1M_3M_4$.

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{9}{2}e^{-2x}-3e^{-3x}$.

الجزء A : نعتبر المعادلة التفاضلية (E) : $y'+2y=3e^{-3x}$.

1) حل المعادلة التفاضلية (E') : $y'+2y=0$.

2) استنتج أن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\frac{9}{2}e^{-2x}$ هي حل المعادلة (E') .

3) تحقق أن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-3e^{-3x}$ هي حل المعادلة (E) .

4) بين أن f حل للمعادلة (E).

الجزء B : نسمي (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
(وحدة الطول $1cm$)

1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f(x)=3e^{-2x}\left(\frac{3}{2}-e^{-x}\right)$.

2) عين نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم عند $-\infty$.

3) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) عين إحداثيات نقاط تقاطع المنحني (C) مع محوري الإحداثيات.

5) أحسب $f(1)$ ثم أرسم (C) .

6) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) ومحور الفواصل و محور التراتيب و المستقيم ذي المعادلة $x=1$.

الموضوع الخامس عشر

التمرين الأول :

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ،

1. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من النقطة $A(-2;8;4)$ و $\vec{u}(1;5;-1)$ شعاع توجيه له

2. نعتبر المستويان: $(P): x-y-z=7$ و $(Q): x-2z=11$

بين أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (D') يطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

3. بين أن المستقيمين (D) و (D') ليسا من نفس المستوي .

4. نعتبر النقطتين $H(-3;3;5)$ و $H'(3;0;-4)$.

أ/ تحقق أن النقطة H تنتمي إلى (D) و أن النقطة H' تنتمي إلى (D') .

ب/ بين أن المستقيم (HH') عمودي على كل من المستقيمين (D) و (D') .

جـ/ استنتج المسافة بين المستقيمين (D) و (D') .

5. عين مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\overrightarrow{MH'}.\overrightarrow{HH'}=126$.

التمرين الثاني :

I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;6[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$.

1. أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2. استنتج أن من أجل كل x بحيث $x<3$ لدينا : $f(x)<3$.

II) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=-3$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$

1. بين بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n<3$.

2. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

3. برر أن المتتالية (u_n) متقاربة.

4. بين أن النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق : $l^2-6l+9=0$ ، ثم استنتج قيمة l .

III) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$.

1. بين أن المتتالية (v_n) حسابية معينا أساسها وحدها الأول .

2. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3. أحسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n$.

التمرين الثالث :

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$ ، ثم أكتب الحلول على الشكل الأسي .

2. في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A ، B ذات اللاحقتين على الترتيب: $z_A=1+i$ ، $z_B=2i$ ، ومن أجل كل عدد مركب z يختلف عن z_A نعتبر العدد المركب Z' حيث : $Z'=\dfrac{z-2i}{z-1-i}$

أ) عين وأنشئ المجموعة (E) للنقط $M(z)$ حتى يكون العدد المركب Z' تخيلي صرف.

ب) عين وأنشئ المجموعة (F) للنقط $M(z)$ حتى يكون $|Z'|=1$.

3. ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

أ) عين لاحقتي النقطتين B' و I' صورتي النقطتين B و $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ على الترتيب بالدوران r.

ب) عين صورتي المجموعتين (E) و (F) بالدوران r .

التمرين الرابع :

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1-2x+e^{2x}$.

1. أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$.

II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+2+xe^{-2x}$.

نسمي (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(وحدة الطول: $2cm$ على محور الفواصل ، $1cm$ على محور الفواصل)

1. عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2. أ/ بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^{2x}}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم حدد إشارة $f(x)$ على المجال $[0;+\infty[$

3. أ/ بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+2$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ).

4. ارسم (C) و (Δ).

II) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x-\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)e^{-2x}$.

1. بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

2. أحسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) ومحور الفواصل و محور التراتيب و المستقيم ذي المعادلة $x=1$. (تعطى القيمة المضبوطة ثم القيمة المدورة إلى 10^{-1})

الموضوع السادس عشر

التمرين الأول :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط :
$A(1;-1;3)$ ، $B(0;3;1)$ ، $C(6;-7;-1)$ ، $D(2;1;3)$.

1. أ) عين احداثيات النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$.

ب) عين طبيعة و عناصر المجموعة (E) للنقط M من الفضاء بحيث :
$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21}$$

2. أ) بين أن النقط A ، B ، D ليست في استقامية .

ب) تحقق أن الشعاع $\overrightarrow{CG}$ ناظم للمستوي (ABD) ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABD) .

جـ) عين احداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة G على المستوي (ABD) .

3. بين أن المستوي (ABD) يقطع المجموعة (E) في دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1=e^4$ وبالعلاقة $u_{n+1}=\sqrt[3]{\dfrac{u_n}{e}}$.

1. أحسب u_2 و u_3 .

2. لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n=1+2\ln(u_n)$.

أ/ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب/ أكتب v_n ثم u_n بدلالة n .

جـ/ أحسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$.

التمرين الثالث :

1. في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب : $z_A=3$ ، $z_B=5-2i$ ، $z_C=5+2i$

والنقطة M ذات اللاحقة z بحيث M تختلف عن A و B.

أ) بين أن المثلث ABC قائم و متساوي الساقين .

ب) فسر هندسيا طويلة وعمدة العدد المركب Z' حيث : $Z'=\dfrac{z-3}{z-5+2i}$.

جـ) عين المجموعة (E) للنقط $M(z)$ حتى يكون العدد المركب Z' حقيقيا سالبا تماما .

2. لتكن (Γ) الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و لتكن النقطة Ω ذات اللاحقة $2-i$.

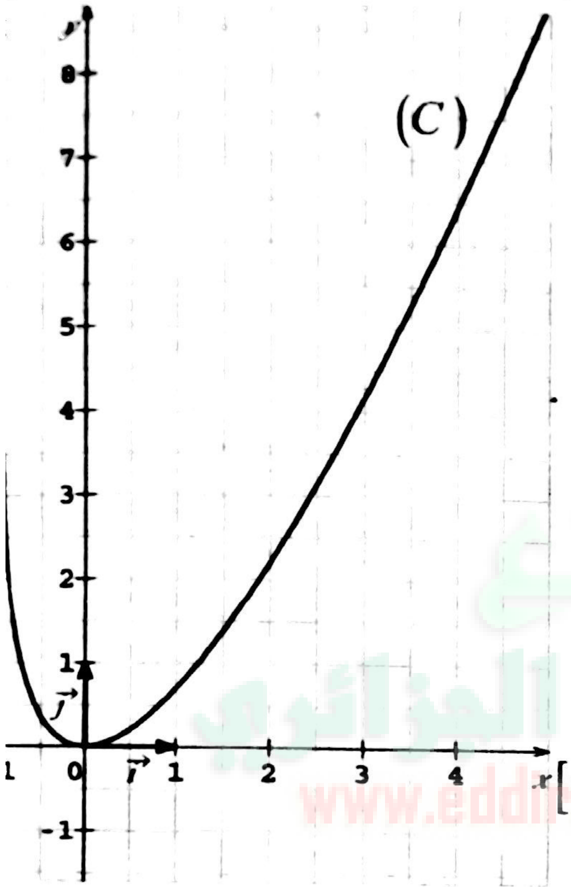
أ) عين لاحقة النقطة w مركز الدائرة (Γ).

ب) عين العبارة المركبة للدوران r الذي مركزه Ω وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

جـ) عين المعادلة الديكارتية للمجموعة (Γ') صورة الدائرة (Γ) بالدوران r .

التمرين الرابع :

I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x\ln(x+1)$ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (أنظر الشكل المقابل).



1. أحسب $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ، كيف تفسر النتيجة بيانيا ؟
2. عين $f(0)$ ونهاية f عند $+\infty$.
3. أثبت أن f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.
4. أحسب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا .
5. استنتج جدول تغيرات f وإشارة $f(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

II) لتكن F الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$

$F(x)=\frac{(x^2-1)\ln(x+1)}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}$.

1. بين أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال $[0;+\infty[$.
2. احسب $F(0)$ ونهاية الدالة F عند $+\infty$.
3. استنتج اتجاه تغير الدالة F وشكل جدول تغيراتها.
4. عين معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) الممثل للدالة F عند النقطة ذات الفاصلة 1.
5. أرسم في معلم متعامد ومتجانس (Γ) و (T) .

III) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $h(x)=F(e^{-x})$.

أحسب $h'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة h .

الموضوع السابع عشر

التمرين الأول :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط :

$A(2;-1;0)$ ، $B(0;3;-4)$ ، $D(4;1;1)$ ، $E\left(0;3;\frac{1}{2}\right)$.

1. أ) عين إحداثيات النقطة C حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

ب) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ ثم استنتج طبيعة متوازي أضلاع $ABCD$.

2. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABD).

3. أ) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من النقطة E والعمودي على (ABD) .

ب) عين إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع (Δ) و المستوي (ABD).

جـ) تحقق أن I منتصف $[BD]$.

4. أكتب معادلة سطح الكرة التي مركزها E وتمس المستوي (ABD) .

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

1) أ/ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، أنشئ (C) التمثيل البياني للدالة $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

ب/ أنشئ على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 دون حسابها .

جـ/ ما هو تخمينك حول إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) ؟

2) أ/ بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 2$.

ب/ بين أن (u_n) متناقصة. ماذا تستنتج ؟

جـ/ بين أن النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق: $l \geq 2$ و $l = \sqrt{l+2}$.

د/ إستنتج قيمة l .

التمرين الثالث :

1) نعتبر الأعداد المركبة : $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^4$ ، $z_2 = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

أ/ أكتب على الشكل المثلثي كل من الأعداد : z_1 ، z_2 و z_3 .

ب/ عين الشكل الجبري للعدد z_3 .

جـ / استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

د / أحسب العدد المركب $(z_3)^{2012}$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر التحويل النقطي r الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=(1+i)z+1$.

أ / عين طبيعة التحويل r محددا عناصره المميزة .

ب / A نقطة من المستوي لاحقتها z_1 ، عين لاحقة صورة النقطة A بالتحويل r .

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=e^x-2e^{\frac{x}{2}}$.

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$).

I) 1. أ) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$. فسر النتيجة هندسيا .

ب) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أ) بين أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثييها .

ب) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحني (C) عند النقطة A .

4. أ) عين نقاط تقاطع المنحني (C) مع محوري الإحداثيات .

ب) أرسم (T) و (C) في نفس المعلم .

جـ) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة :

$$e^x-2e^{\frac{x}{2}}-m=0 .$$

د) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها :

$x=0$ ، $x=2\ln 2$ ، $y=0$.

II) نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y-2y'=-e^x....(E)$.

1. تحقق أن الدالة f هي حل للمعادلة (E) .

2. نضع : $y=g-f$ حيث g دالة عددية للمتغير الحقيقي x .

أ) حل المعادلة التفاضلية : $y-2y'=0....(E_0)$.

ب) تحقق أن الدالة g هي حل للمعادلة (E) .

3. استنتج حلول المعادلة (E) .

الموضوع الثامن عشر

التمرين الأول :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1;2;-1)$ ، $B(1;1;0)$ ، $C(9;-1;-2)$ ، $D(1;1;1)$.

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عين الجواب الصحيح معللا اختيارك :

1. معادلة المستوي (ABC) هي :

ج1) $x+2y+2z-3=0$ ، ج2) $x+y-3=0$ ، ج3) $x+2y+2z-1=0$.

2. تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) هو :

ج1) $\begin{cases} x=1-t \\ y=2-4t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=-1+3t \end{cases}$ ، ج2) $\begin{cases} x=1 \\ y=-1-t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=3+t \end{cases}$ ، ج3) $\begin{cases} x=1 \\ y=1-2t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=2t \end{cases}$.

3. إحداثيات النقطة D' نظيرة النقطة D بالنسبة إلى المستوي (ABC) هي :

ج1) $\left(\frac{5}{9};\frac{1}{9};\frac{1}{9}\right)$ ، ج2) $\left(\frac{10}{9};\frac{11}{9};\frac{10}{9}\right)$ ، ج3) $\left(\frac{7}{9};\frac{5}{9};\frac{5}{9}\right)$.

4. مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=9$ هي :

ج1) سطح كرة يشمل D ، ج2) سطح كرة مركزها D ، ج3) مستو مار من D .

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة بـ : $u_0=e^2$ و $u_8=9u_{10}$.

1. أ- عين أساس المتتالية (u_n) .

ب- أكتب بدلالة n عبارة u_n ثم أحسب : $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n$.

جـ- أحسب بدلالة n الجداء : $P_n=u_0\times u_1\times...\times u_n$.

2. نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي :
$v_n=\ln(u_n)$.

أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب - أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ثم أحسب : $\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{S_n}{n^2}$.

التمرين الثالث :

من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $-1+i$ ، نضع: $f(z)=\frac{2z+i}{z+1-i}$ ، حيث: $z=x+iy$ مع x و y عددان حقيقيان.

. حقيقيا

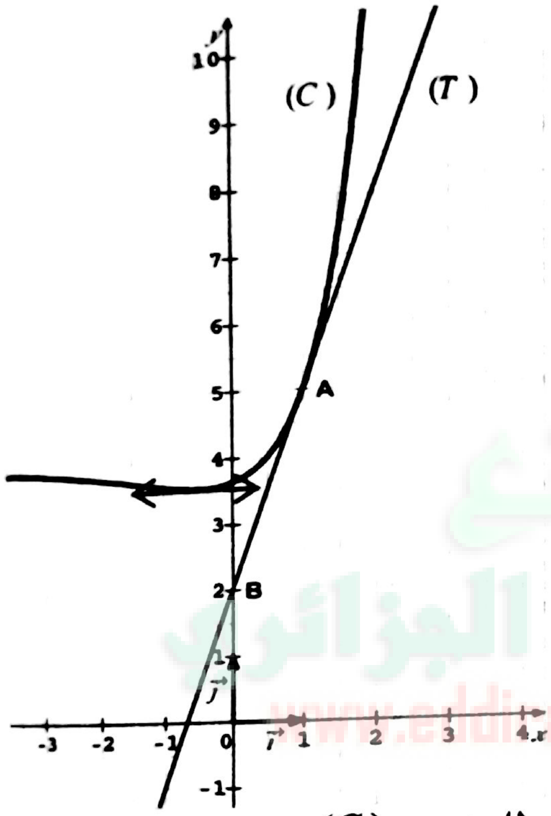
2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $f(z) = z + i$.

3. نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A = 1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 9 - i\sqrt{3}$.

أ) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S بحيث: $C = S(B)$ و $A = S(O)$ يحول

ب) عين نسبة وزاوية التشابه المباشر S ثم استنتج النسبة والزاوية للتحويل المركب $S \circ S$.

التمرين الرابع :



المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (ax + b)e^{x-1} + c$ ، حيث a ، b و c أعداد حقيقية. المنحنى (C) يقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{2}$ ويقبل مماسا (T) في النقطة $A(1;5)$ ويشمل النقطة $B(0;2)$.

الجزء الأول :

1. حدد $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(1)$ و $f'(1)$.

2. أحسب $f'(x)$.

3. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c .

الجزء الثاني :نقبل أن: $f(x) = (2x - 1)e^{x-1} + 4$.

1. أ) بين أن المستقيم (d) الذي معادلته $y = 4$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (d) .

جـ) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3. بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثييها .

4. أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 6$ يقطع المنحنى (C) في نقطة وحيدة فاصلتها α من المجال $[1;2]$.

ب) عين حصرا للعدد α سعته 25×10^{-2} .

5. أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $x \mapsto (2x - 1)e^{x-1}$ على المجال $[0;1]$.

ب) استنتج مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات ذات المعادلات: $x = 0$ ، $x = 1$ و $y = 0$.

الموضوع التاسع عشر

التمرين الأول :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقطتين $A(3;0;6)$ ، $I(0;0;6)$ ، والمستقيم (D) المار من النقطتين A و I .

ونعتبر المستويين: $(P): 2y+z-6=0$ ، $(Q): y-2z+12=0$.

1. بين أن المستويين (P) و (Q) متعامدان و أن تقاطعهما هو المستقيم (D) .
2. بين أن المستويين (P) و (Q) يقطعان على الترتيب المحور $(O;\vec{j})$ في نقطتين B و C يطلب تعيينهما .
3. عين معادلة ديكارتية للمستوي (T) المار من النقطة B والشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظم له.
4. أ/ عين إحداثيي النقطة H نقطة تقاطع المستقيم (OA) و المستوي (T) .

ب/ ماذا تمثل النقطة H في المثلث ABC ؟ علل جوابك .

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1} \end{cases}$

1) أ/ بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1<u_n<2$.

ب/ بين أن (u_n) متزايدة. ماذا تستنتج ؟

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\ln(u_n-1)$.

أ/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية معينا أساسها وحدها الأول.

ب/ أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ/ أحسب $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$.

التمرين الثالث :

1. نعتبر الأعداد المركبة التالية: $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_3=\dfrac{z_1}{z_2}$.

أ) أكتب z_1 على الشكل المثلثي و z_2 على الشكل الجبري.

ب) أكتب العدد z_3 على الشكل الجبري ثم الشكل المثلثي .

جـ) استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

د) بين أن العدد $\left(\dfrac{z_3}{\sqrt{2}}\right)^{2010}$ تخيلي صرف.

2 . نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ من المستوي ذات اللاحقة z
النقطة $M'(x';y')$ ذات اللاحقة z' حيث: $\begin{cases} x' = -3x + 4 \\ y' = -3y - 4 \end{cases}$. و النقطتين A و B ذات
اللاحقتين z_1 و z_2 على الترتيب.

أ) عبر عن z' بدلالة z .

ب) عين طبيعة التحويل S محددا عناصره المميزة .

جـ) عين معادلة وسيطية لصورة الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 2 بالتحويل S.

التمرين الرابع :

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = -4 + (4-2x)e^x$.

1 . أحسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2 . أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3 . بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين على $\mathbb{R}$ أحدهما 0 و الآخر نرمزله بـ α حيث : $1,59 < \alpha < 1,6$.

4 . استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{2x-2}{e^x - 2x}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$).

1 . أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ثم فسر النتيجتين بيانيا .

2 . أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

جـ) أثبت أن : $f(\alpha) = \dfrac{2-\alpha}{\alpha - 1}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3 . أ) عين نقاط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات .

ب) احسب $f(-2)$ ، $f(-1)$ و $f(2)$ ثم أنشئ (C_f) .

III) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = -x + \ln(e^x - 2x)$.

1 . بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أحسب دالتها المشتقة الأولى .

2 . استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

3 . احسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات ذات المعادلات : $x = 0$ ، $x = 2$ و $y = 0$.

الموضوع العشرون

التمرين الأول :

$(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$ معلم متعامد و متجانس للفضاء.

1) أ/ عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

ب/ بين أن المستقيم (OG) عمودي على المستوي (ABC).

جـ/ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

د/ عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC) .

2) لتكن النقطة $D(1;0;1)$ و النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على (ABC).

أ/ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (DH) ثم استنتج إحداثيات النقطة H .

ب/ حدد طبيعة المثلث OGH .

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = e^{-\frac{1}{3}+2n}$.

1. بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2. أ) احسب بدلالة n كلا من المجموعين:

$S_1 = u_0 + u_1 + ... + u_n$ و $S_2 = u_0^2 + u_1^2 + ... + u_n^2$.

ب) عين العدد الطبيعي n بحيث: $S_1 = \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2}(1-e^{10})$.

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \ln(u_n)$.

أ) حدد طبيعة المتتالية (v_n) .

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_3 = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، ثم عين العدد الطبيعي n بحيث: $S_3 = \frac{160}{3}$.

التمرين الثالث :

θ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1) أ/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0 ......(E)$.

نرمز إلى حلي المعادلة (E) بـ z_1 و z_2 حيث z_1 هو العدد المركب الذي جزؤه التخيلي موجب.

ب/ أكتب حلي المعادلة (E) على الشكل الأسي.

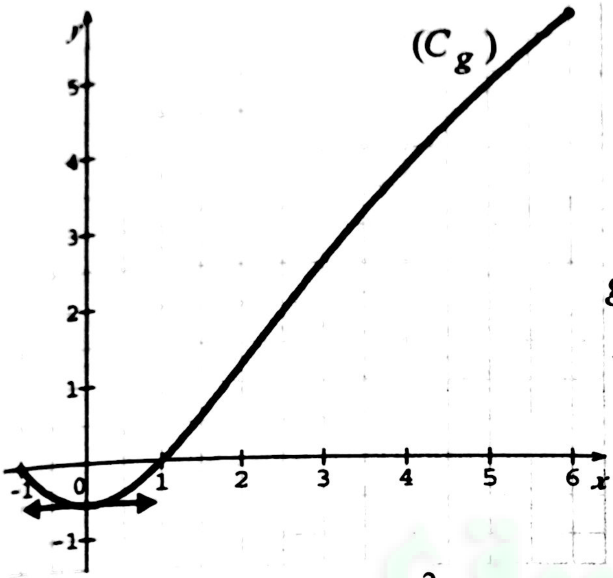
2) نعتبر النقطتين A ، B ، صورتي z_1 و z_2 على الترتيب.

أ / فسر هندسيا طويلة و عمدة العدد المركب : $\frac{z_A}{z_B}$.

ب / عين قيمة الوسيط θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع .

التمرين الرابع :

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 3\ln(x^2+5) - 3\ln 6$.



المنحني (C_g) المقابل هو التمثيل البياني للدالة g على المجال $[-1;6]$. المماس لـ (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0 موازي لمحور الفواصل .

1 . بقراءة بيانية ، شكل جدول تغيرات الدالة g .

2 . بقراءة بيانية ،حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$

3 . حل ، في المجال $[-1;6]$ ، المعادلة $g(x) = 3$.

4 . عين النقاط من المنحني (C_g) بحيث يكون المماسعندها موازيا للمستقيم الذي معادلة له : $y = x$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2+6x+5}{x^2+5}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$.

1 . أ) بين أن المستقيم (d) الذي معادلته $y = 1$ مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (d) .

2 . أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3 . أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحني (C_f) عند النقطة $A(0;1)$.

4 . أ) عين نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات .

ب) أرسم (d) ، (T) و (C_f) في نفس المعلم .

5 . أ) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x) = 1 + g'(x)$.

ب) استنتج ، بالسنتمتر مربع ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x = -5$ ، $x = 1$ ، $y = 0$.